број: 124/4 година: 2025/26.

Тангента

ЧАСОПИС ЗА МАТЕМАТИКУ И РАЧУНАРСТВО ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Београд, 2026.

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
„ТАНГЕНТА”- часопис за математику и рачунарство
за ученике средњих школа.
Излази у четири броја током школске године.
Адреса: „Тангента”, Друштво математичара Србије,
Поштански фах 355, 11000 Београд
Телефон: (011)3036-818

Уплате на жиро рачун:
Друштво математичара Србије – број 340-13536-62.
На уплатници као сврху уплате назначити „За Тангенту”.

Штампа: **Донат Граф** д.о.о, Београд
На основу члана 23. став 2, тачка 9. Закона о порезу на додатну вредност („Регистар прописа”, број 11 – новембар 2004.) часопис се сматра серијском публикацијом од посебног интереса за науку и опорезије се по стопи од 8%. Корице freepik.

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51
ТАНГЕНТА : часопис за математику и рачунарство за ученике средњих школа : часопис за математику и рачунарство Друштва математичара Србије / главни и одговорни уредник Војислав Петровић. - 1995/1996, бр. 1- . - Београд : Друштво математичара Србије, 1995- (Београд : Донат граф). - 24 cm

Тромесечно.
ISSN 0354-656X = Тангента
COBISS.SR-ID 103642375

ФИКСНА ТАЧКА У АНАЛИЗИ И ГЕОМЕТРИЈИ

Радоје Шћепановић, Подгорица (Црна Гора)

У овом чланку биће реч о методи тзв. фиксне тачке и њеним применама у анализи и геометрији. Најпре дефиниција.

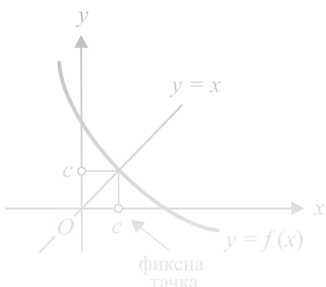
Дефиниција 1. Нека је f пресликавање произвољног скупа A у самог себе, $f : A \to A$. Елемент $c \in A$називамо *фиксном* (*непокретном*, *двојном* или *инваријантном*) тачком пресликавања f , ако је

$$f(c) = c. \tag{1}$$

Другим речима, фиксна тачка се прикавањем f слика у саму себе.

1. Фиксна тачка у анализи

За пресликавање $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дато са $y = f(x)$, фиксна тачка је решење једначине $f(x) = x$. Са становишта графика, то је апсциса пресечне тачке графика функција $y = f(x)$ и $y = x$ (сл. 1).



Сл. 1.

У неку руку, важи и обратно. Ако је дата произвољна једначина $g(x) = 0$, тада су њена решења фиксне тачке пресликавања f, где је $f(x) = g(x) + x$.

Пример 1. (а) Пресликавање $f(x) = x^2 - 3x + 3$ има две фиксне тачке, 1 и 3, јер је $f(1) = 1$ и $f(3) = 3$. Сходно горе наведеном, то су ре-

НАГРАДНИ ЗАДАЦИ

Александар Миленковић, Ненад Стојановић

У рубрици „Наградни задаци” у сваком броју дајемо 20 задатака који су подељени у две групе. Задаци из прве групе су подељени по разредима и намењени су пре свега ученицима који се такмиче у Б категорији, док су задаци из друге групе намењени ученицима А категорије и нису подељени по разредима.

Позивамо све читаоце да шаљу предлоге задатака које сматрају посебно интересантним, као и сугестије које ће нам помоћи при састављању рубрике. Такође, позивамо све ученике да на адресу редакције шаљу откуцана или читко исписана решења постављених задатака; сваки задатак на засебном листу. Исто важи и за предлоге задатака. У наредним бројевима часописа публикују се комплетна решења раније постављених задатака, а на крају циклуса најуспешнији решавачи се награђују.

Предлоге и решења задатака слати на адресу:

„Тангента” – за рубрику „Наградни задаци”
Природно-математички факултет
Радоја Домановића 12
34000 Крагујевац

или **електронском поштом** (искључиво **pdf** формат) на адресу

tg_nagradnizadaci@yahoo.com

најкасније до 10.09.2026.

Прва група

Први разред

М2194. Колика је аритметичка средина свих петоцифрених бројева у којима се свака од цифара 1, 2, 5, 7 и 8 јавља тачно по једанпут?

М2195. На испиту из математике, 10% студената добило је 70 поена, 35%

Hello, World!
Објектно-оријентисано програмирање: парадигма коју сви користе, а ретки разумеју

Александар Купусинац
Факултет техничких наука, Нови Сад

"When I use a word," Humpty Dumpty said in rather a scornful tone, "it means just what I choose it to mean – neither more nor less."
— THROUGH THE LOOKING-GLASS AND WHAT ALICE FOUND THERE by LEWIS CARROLL

1. Увод

Објектно-оријентисано програмирање (ООП) настало је шездесетих година 20. века, али је почело да се широко примењује тек средином осамдесетих година појавом програмског језика C++. Данас ООП представља једну од најзаступљенијих и најутицајнијих програмских парадигми. Већина савремених програмских језика у потпуности или делимично подржава објектно-оријентисану парадигму, а огроман број различитих апликација развијен је управо применом ООП принципа.

Основна идеја ООП јесте да се програм реализује као систем међусобно повезаних објеката који размењују поруке. Сваки објекат има идентитет, стање и понашање. Идентитет је одређен његовим јединственим именом у оквиру програма. Стање је одређено тренутним вредностима његових поља, док је понашање описано методама класе којој тај објекат припада. На тај начин програм постаје модел сложеног реалног система. ООП омогућава једноставније решавање сложених проблема, висок степен поновне употребе програмског кода и добро организовану поделу послова између програмера који учествују у развоју софтвера.

Посебно је занимљиво то што велики број програмера свакодневно користи ООП, пише класе и креира објекте, али без дубљег разумевања основних појмова на којима се ова парадигма заснива. Због тога није реткост да се појмови као што су класа, објекат, поље и метода користе по при-

ПРЕДЛОЗИ ЗА ЧЕТВРТИ ПИСМЕНИ ЗАДАТАК

Мирјана Катић

ГИМНАЗИЈЕ, СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

I РАЗРЕД

Линеарне једначине и неједначине; сличност;
тригонометрија правоуглог троугла

1. (а) У скупу реалних бројева решити једначину $x|x+1|+1=\frac{|x\ +1|}{x+1}$.

(б) Одредити вредност $a \in \mathbb{R}$ за које је 2026 решење једначине
$\frac{x-2a}{2+x}-\frac{x+2a}{x-2}=\frac{4a}{4-x^2}$.

2. Решити систем једначина

$$\frac{x}{a-p}+\frac{y}{b-p}=1$$

$$\frac{x}{a-q}+\frac{y}{b-q}=1 \ (a \neq b \text{ и } p \neq q).$$

3. За коју вредност параметра b једначина $\frac{2b+5}{3}=\frac{5bx+1}{4}$ има негативно решење?

4. Приказати решења неједначине $|x+y|<2026$ у равни xOy.

5. Израчунати углове и непознате дужине страница троугла ABC ако је познато $a=12$, $h_c=6\sqrt{3}$ и површина троугла $P=18\left(\sqrt{3}+3\right)$.

II РАЗРЕД

Тригонометријске функције

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА

„КЕНГУР БЕЗ ГРАНИЦА”

Немања Вучићевић, Александар Миленковић, Јелена Стеванић

Почетком осамдесетих, професор математике у Сиднеју Петер Халоран (Peter O'Halloran) осмислио је математичко такмичење са вишеструким понуђеним одговорима. Овакав начин ораганизовања такмичења омогућава објективно и једноставно прегледања тестова од стране било код прегледача за велики број учесника. За организаторе националног такмичења из математике у Аустралији ово је био огроман успех.

Током 1991. године два француска наставника математике Андре Деледик (André Deledicq) и Жан Пјер Будин (Jean Pierre Boudine) одлучили су да започну организовање такмичења у Француској под називом „Кенгур” по узору на такмичење у Аустралији, а називом такмичења одају почаст својим аустралијским колегама. На првом организованом такмичењу учествовало је 120 000 младих француских математичара. Убрзо се, организовању, прикључују и многе земље Европе, тако да европске земље, њих 21, заједно формирају асоцијацију „Кенгур без граница”

Број ученика који се такмиче у земљама чланицама није сталан, на глобаном нивоу је махом константан. Број такмичара у Србији 2026. године приближно је износио 22 700.

Број задатака на тестовима се разликује у нижим и вишим разредима основне школе, док тест за средњошколце садржи 30 задатака са три степена тежине. Сваки задатак има 5 понуђених одговора од којих је само један тачан. Тачан одговор за задатке 1 – 10 вреди 3 бода, за задатке 11 – 20 вреди 4 бода, а за задатке 21 – 30 5 бодова.

Ако ученик нетачно одговори, одузима му се четвртина бодова предвиђених за тај задатак, а ако не одговори на питање, добија 0 бодова. Добијени збир се повећава за 30, тако да не буде ученика са негативним збиром бодова. Максималан број бодова за ученике средњих школа је 150.

Ученици средњих школа се такмиче у следећим категоријама:

К1: друштвени смер гимназије, језичке гимназије, III степен стручних школа;

К2: IV степен стручних школа;

К3: природно-математички и општи смер гимназије, као и специ-

МАТЕМАТИЧКЕ ЦРТИЦЕ

НЕКЕ НЕЈЕДНАКОСТИ КОД ПРАВОУГЛОГ ТРОУГЛА

Драгољуб Милошевић, Горњи Милановац

Наши млади читаоци знају доста чињеница везаних за правоугли троугао. У овом чланку ћемо се упознати с неким мање познатим неједнакостима везаних за правоугле троуглове.

Теорема 1. Ако је h висина која одговара хипотенузи c правоуглог троугла ABC, тада важи следећа двојна неједнакост

$$1 < \frac{c+h}{a+b} \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}. \tag{1}$$

Доказ. Из познате неједнакости за странице троугла, $a + b > c$, следи $(a + b - c)^2 > 0$, односно

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2c(a + b) + 2ab > 0$$

Одавде је, због $a^2 + b^2 = c^2$ (Питагорина теорема) и $ab = ch$ (двострука површина троугла),

$$2c^2 - 2c(a + b) + 2ch > 0.$$

Дељењем леве и десне стране претходне неједнакости са $2c$ добијамо $c - (a + b) + h > 0$, односно $\frac{c+h}{a+b} > 1$, а то је лева страна неједнакости (1).

Што се тиче десне стране, уочимо тачку C_1 средиште хипотенузе BC (сл. 1).

Сл. 1.

Као што је познато, C_1 је центар описане кружнице око троугла, па је $AC_1 = C_1B = CC_1 = \frac{c}{2}$

НАШ ГОСТ

ЗОВ ГИМНАЗИЈЕ

Математичка гимназија (МГ) у Београду више је него институција. Основана далеке 1966. године, одувек је била, а и остала, прави расадник математичких талената. Многи њени ученици касније су направили блиставе каријере на престижним универзитетима, како у земљи тако и широм света.

Међутим, неки су се вратили својој „првој љубави“ и тамо, као наставници, наставили да образују надарене младе полазнике. МГ их је, као неки магнет којем нису могли да се одупру, вукла натраг. Један од таквих, управо је наш саговорник.

То је Срђан Огњановић, бивши ученик, потом наставник и најзад директор МГ.

Срђане, наклоност и љубав према математици вероватно си открио још у најмлађим данима.

У мојој широј породици преовлађивали су друштвењаци, тако да су се сви чудили одакле неко од нас да студира математику, први сам кренуо тим путем. Претпостављам да је значајнији за моје опредељење био утицај наставника. Заиста сам имао изванредну учитељицу и касније наставнике у основној школи.

После основне школе, право у МГ. Зашто баш тамо?

За Математичку гимназију сам сазнао готово случајно, од једног друга чија је сестра већ похађала МГ. То су била друга времена. Гимназија је тек основана, а медије тада није много занимало да пишу о „елитизму“ у школству, за шта су нас у време социјализма понекад оптуживали, тако да се о нашој школи врло мало знало.

Први утисци су били невероватни. Уплашио сам се да је то превише за мене. Какви професори и какви ученици!

ДОКАЗ БЕЗ РЕЧИ

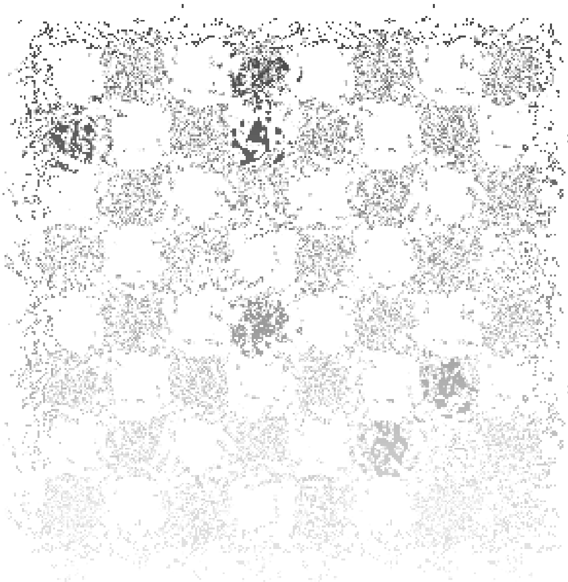
Ненад Стојановић

Доказ без речи, назив је за методу визуелног „доказивања“ математичких тврђења. Појавио се у прошлом веку и брзо стекао широку популарност. Представља спој уметности и математике. Бројне речи и ознаке замењује слика која својим садржајем све објашњава.

Збир бесконачног геометријског низа

НАГРАДНИ ШАХОВСКИ ЗАДАТАК

Тангента 123 - решење



Бели вуче и матира у 3 потеза

1. Sb7+!! Tb7 2. Tc8+! Kc8 3. Te8 мат

ШАХОВСКА СТРАНА

РАНЕ ПЕДЕСЕТЕ

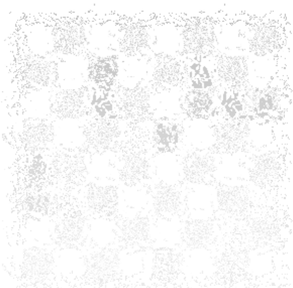
Почетак 50-тих година прошлог века изнедрио је многа будућа велика шаховска имена. Осим чувене мађарске тројке Адорјан, Рибли, Сакс, ту су швеђанин Андерсон, наш Љубојевић и холанђанин Тиман.

Овај чланак је о стваралаштву недавно преминулог Јана Тимана.

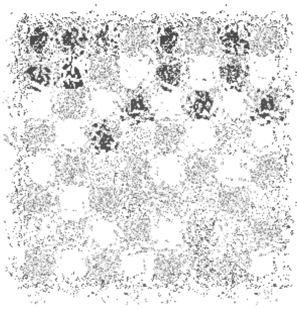
Био је то један ретко свестран познавалац шаха. Одличан у теорији отварања, креативан и маштовит у средишњици, врстан познавалац завршница.

Од касних 70-тих, па све до раних 90-тих важио је за најјачег играча ван Совјетског савеза. Носио је ласкаву титулу The best of the West.

У прилог томе иде ефектна победа над новопеченим прваком света Гаријем Каспаровим из 1985.

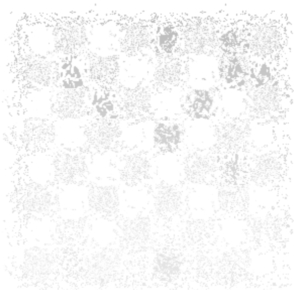


У овој позицији „пуној барута“, Тиман (бели) креће у силовити напад. **1. d6 Dd6** (једино због претње De5 мат) **2. Df3+ Ke7** (2. … Kg7 3. Df7+ Kh8 4. Dg8 мат или 2. … Kg5 3. h4+ Kh4 4. Te4+ Kg5 5. Tg4+ Kh5 6. Dh3 мат) **3. Df7+ Kd8 4. Td1 Ta1**. С надом у спас после 5. [illegible]



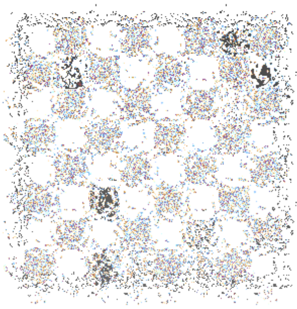
Прерано је 1. Dh7+ Kf8. Зато прво **1. Se5! de5**. Остало је још горе: 1. ... fe5 2. Dh7 мат, 1. ... De5 2. Dh7+ Kf8 3. Df7 мат, 1. ... fg5 2. Tf7+ Df7 3. Tf7+ Kh8 4. D(T)h7 мат, 1. ... hg5 2. Dg6+ Kh8 (2. ... Kf8 3. Sh7+) 3. Sf7+. **2. Dh7+ Kf8 3. Tf6+! Sf6** (3. ... Df6 4. Tf6+ Sf6 5. Df7 мат.) **4. Dh8 мат**.

Сетимо се и бриљанције с филипинским велемајстором Тореом (бели) из 1982.



Бели краљ је у крајње опасној зони, али природно 1. Lh3 или 2. Le2 не даје ништа. После Sc3, црни чак губи,

Јан има сасвим нешто друго на уму. **1. Sf3+! ef3**. На 1. ... Kh1 2. Df1 мат, а после 1. ... Kg2 нова бриљанција 2. Df1+!! Kf1 3. Lh3 мат. **2. Df1+!! Kf1 3. Lh3+ Kg1 4. Te1** мат.



1. Le5 Tc5 2. Tf8!. Неочекивана жртва. **2. … Kf8 3. gh7**. Сада почиње фино надмудривање: бели краљ против црног топа и два ловца. **3. ... Lf3+ 4. Le2 Le2+ 5. Ke1 Ld2+ 6. Kf2!** (6. Kd2? Td5+ 6. Kc3 (6. Kc1 Td1+) Td3+ и црни се спасава) **Le3+! 7. Kg2!** (7. Ke2? Tc2+ 8. Ke3 Th2 9. Lh2 Kg7 или 7. Kg3? Lf4+! 8. Kf4 Tc4+ 9. Kg5 Tg4+ са ремијем) **Lf1+! 8. Kg3!** (8. Kh1? Lg2+! 9. Kg2 Tc2+ 10. Kh3 Th2+! 11. Kh2 Lf4+! 12. Lf4 Kh7 или 8. Kg3(h2)? Lf4+! 9. Lf4 Th5 или 8. Kf3 Le2+ 9. Ke2 Tc2+ итд.) **Lf2+! 9. Kf3!** и пешак h7 излази у даму што белом доноси победу.

.НАГРАДНИ ЗАДАТАК

Бели вуче и матира у 3 потеза

YU ISSN 0354-656X