Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИМО, Београд 2026.

Први дан

1. Нека су $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_u^{\alpha_u}$ и $m = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_v^{\beta_v}$ разлагања бројева n и m на просте чиниоце. Ако је $n = 1$, онда је $u = 0$, а ако је $m = 1$, онда је $v = 0$. При томе се не захтева да су прости бројеви из првог разлагања различити од простих бројева из другог разлагања.

Сваком пару делилаца $k \mid n$, $l \mid m$ одговара једна уређена $(u+v)$-торка

$$(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_u, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_v),$$

где је $k = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_u^{\gamma_u}$ и $l = q_1^{\delta_1} q_2^{\delta_2} \cdots q_v^{\delta_v}$, при чему важи $0 \le \gamma_i \le \alpha_i$ за $1 \le i \le u$ и $0 \le \delta_j \le \beta_j$ за $1 \le j \le v$. На тај начин парови делилаца (k,l) бројева n и m описани су тачно торкама које се координатно налазе између $(0,0,\dots,0)$ и $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_u, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_v)$.

Показаћемо да је $a_{n,m}$ једнак броју свих коначних низова таквих торки који почињу торком $(0,0,\dots,0)$, завршавају торком $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_u, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_v)$ и у којима је свака наредна торка координатно већа или једнака претходној, али није једнака претходној.

То тумачење доказујемо индукцијом по производу nm. За $(n,m) = (1,1)$ тврђење је тачно, јер постоји тачно један такав низ: он се састоји само од торке $(0,0,\dots,0)$, а по дефиницији је $a_{1,1} = 1$. Нека је сада $(n,m) \ne (1,1)$ и претпоставимо да тврђење важи за све парове (k,l) такве да је $k \mid n$, $l \mid m$ и $(k,l) \ne (n,m)$. Ако се посматрани низ завршава торком која одговара пару (n,m), онда његова претпоследња торка може бити било која торка која одговара неком пару (k,l), где је $k \mid n$, $l \mid m$ и $(k,l) \ne (n,m)$. Број низова који се завршавају том претпоследњом торком једнак је, по индукцијској претпоставци, броју $a_{k,l}$. Зато је укупан број таквих низова једнак $\sum_{\substack{k \mid n,\, l \mid m \\ (k,l) \ne (n,m)}} a_{k,l}$, а то је, по дефиницији, управо $a_{n,m}$. Дакле, описано комбинаторно тумачење је доказано.

Из овог тумачења следи да број $a_{n,m}$ не зависи од самих простих бројева

$$p_1, \dots, p_u, q_1, \dots, q_v,$$

већ само од експонената $\alpha_1, \dots, \alpha_u, \beta_1, \dots, \beta_v$.

Сада изаберимо међусобно различите просте бројеве $r_1, r_2, \dots, r_{u+v}$ и ставимо $t = r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \cdots r_u^{\alpha_u} r_{u+1}^{\beta_1} r_{u+2}^{\beta_2} \cdots r_{u+v}^{\beta_v}$. Ако је $u + v = 0$, онда је $t = 1$. Делиоци броја t описују се управо истим уређеним $(u+v)$-торкама као и парови делилаца (k,l) бројева n и m. Заиста, сваком делиоцу $d = r_1^{\varepsilon_1} r_2^{\varepsilon_2} \cdots r_{u+v}^{\varepsilon_{u+v}}$ броја t одговара торка $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{u+v})$, где су одговарајући експоненти у истим границама као и експоненти $\gamma_1, \dots, \gamma_u, \delta_1, \dots, \delta_v$.

Пошто је у пару $(1,t)$ прва компонента увек једнака 1, рекурзивна дефиниција броја $a_{1,t}$ даје исти број растућих ланаца као и рекурзивна дефиниција броја $a_{n,m}$. Зато је $a_{n,m} = a_{1,t}$. Тиме је доказ завршен.

2. ПРВО РЕШЕЊЕ: Докажимо индукцијом по k да за свако $l \ge 2^k$ важи да $2^k \mid a_l + a_{l+1} + \cdots + a_{l+2^k-1}$. База, $k = 0$, је тривијална. Претпоставимо да тврђење важи за неко k. Нека је $l \ge 2^{k+1}$ и посматрајмо чланове низа $a_l, a_{l+1}, \dots, a_{l+2^k-1}$. По индуктивној претпоставци знамо да $2^k \mid a_l + a_{l+1} + \cdots + a_{l+2^k-1}$ и да $2^k \mid a_{l-2^k} + a_{l-2^k+1} + \cdots + a_{l-1}$.

Ако би важило да $2^{k+1} \mid a_l + a_{l+1} + \cdots + a_{l+2^k-1}$, онда никако не би било могуће испунити услов из задатка за бројеве $n = 2^{k+1}$ и $m = l - 2^k$. Наиме, нека је

$$A = a_{l-2^k} + a_{l-2^k+1} + \cdots + a_{l-1}, \qquad B = a_l + a_{l+1} + \cdots + a_{l+2^k-1}.$$

По индуктивној претпоставци важи $2^k \mid A$ и $2^k \mid B$, па за $n = 2^k$ и $m = l - 2^k$ јединствени одговарајући индекс мора бити $2^k - 1$, а исто тако за $n = 2^k$ и $m = l$ јединствени одговарајући индекс мора бити $2^k - 1$. Зато, за $n = 2^{k+1}$ и $m = l - 2^k$, одговарајући индекс може бити само $2^k - 1$ или $2^{k+1} - 1$: први одговара збиру A, а други збиру $A + B$.

Ако је $\nu_2(A) = k$, онда ни A ни $A + B$ нису дељиви са 2^{k+1}, па не постоји ниједан одговарајући индекс. Ако је $\nu_2(A) \geq k + 1$, онда су и A и $A + B$ дељиви са 2^{k+1}, па постоје два одговарајућа индекса. У оба случаја добијамо контрадикцију са условом задатка. Закључујемо да мора да важи $\nu_2(a_l + a_{l+1} + \cdots + a_{l+2^k-1}) = k$. Како је ово доказано за произвољно $l \geq 2^{k+1}$, доказ индукцијом је завршен.

Специјално, закључујемо да је $a_m \equiv a_{m+2^k} \pmod{2^k}$ за $m \geq 2^k$, односно да је низ од неког тренутка периодичан по модулу 2^k за свако $k \in \mathbb{N}$. Како је низ ограничен, бирањем довољно великог k закључујемо да је низ периодичан. Из претходног закључка можемо претпоставити да је период дужине 2^k (то не мора бити основни период). Нека је збир једног периода једнак S. Из доказа индукцијом закључујемо да је $\nu_2(S) = k$, односно да је $S = 2^k(2l + 1)$, $l \geq 0$.

Ако је $l > 0$ онда добијамо контрадикцију када изаберемо $n = S$ и m довољно велико у услов задатка, јер се добијају $2l + 1 > 1$ одговарајућих индекса. Дакле, $S = 2^k$ и зато је $a_n = 1$ за све довољно велике n. Нека је l највећи индекс за који важи да је $a_l > 1$. Претпоставимо да је $l > 1$. Нека је $Z = a_1 + a_2 + \cdots + a_l$. Лако се види да за $n = Z - 1$ и $m = 1$ у услову задатка не постоји одговарајуће i, што је контрадикција. Зато је $a_n = 1$ за свако $n \geq 2$. Лако се проверава да такви низови задовољавају услове задатка, чиме је доказ завршен.

ДРУГО РЕШЕЊЕ: Доказаћемо да су сви такви низови они у којима је први члан произвољан природан број, а сви остали једнаки 1. Овакви низови очигледно задовољавају услове задатка. Јасно је да су сви чланови низа осим евентуално првог непарни. Наиме, ако претпоставимо да $2|a_i$ за неко $i \geq 2$ онда никако није могуће испунити услов из задатка за $n = 2$ и $m = i - 1$. Докажимо сада следеће тврђење:

Лема: Ако је $(x_n)_{n\geq 1}$ низ који испуњава услове задатка и има све чланове непарне онда и низ $(y_n := \frac{x_{2n-1}+x_{2n}}{2})_{n\geq 1}$ такође задовољава услове задатка.

Доказ: Нека су m и n произвољни природни бројеви. По услову задатка, постоји јединствен индекс $0 \leq i \leq 2n - 1$ такав да $2n|x_{2m-1} + x_{2m} + ... + x_{2m+i}$. Јасно је да је i непаран број зато што су сви чланови низа x непарни, па збир дељив са $2n$ мора имати паран број сабирака. Зато је претходна дељивост еквивалентна са $n|y_m + y_{m+1} + ... + y_{m+j}$ за неко $0 \leq j \leq n - 1$. Остаје да се провери јединственост: ако би постојала два различита броја $j_1, j_2 \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$ таква да

$$n \mid y_m + \cdots + y_{m+j_1} \qquad \text{и} \qquad n \mid y_m + \cdots + y_{m+j_2},$$

онда би важило и

$$2n \mid x_{2m-1} + \cdots + x_{2m+2j_1+1} \qquad \text{и} \qquad 2n \mid x_{2m-1} + \cdots + x_{2m+2j_2+1},$$

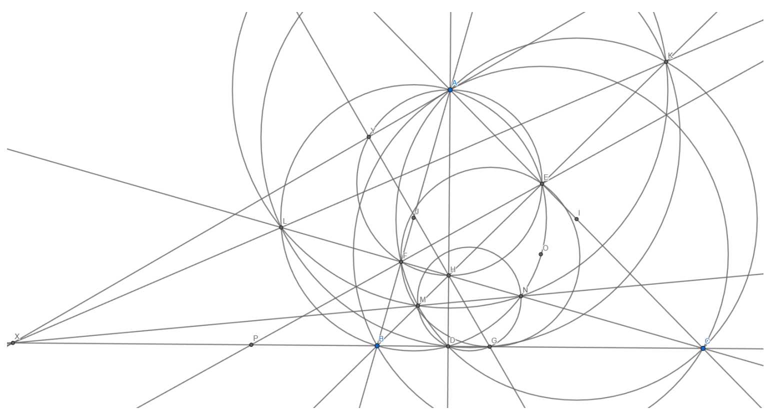
што је немогуће због јединствености за низ x. Јасно је да је низ $(y_n)_{n\geq 1}$ ограничен, па је доказ леме завршен.

Претпоставимо да постоји низ $(a_n)_{n\geq 1}$ који задовољава услове задатка такав да је $a_i \neq 1$ за неко $i \geq 2$. Изаберимо онај међу њима (назовимо га такође a) у којем је максималан члан подниза $(c_n := a_{n+1})_{n\geq 1}$ минималан. Овакав избор је могуће остварити јер су низови ограничени па је максимум добро дефинисан. Ако сада применимо лему на низ c_n добијамо низ $(d_n)_{n\geq 1}$ у коме је максимум строго мањи него максимум M низа c_n. Заиста, пошто је $M \geq 3$ није могуће да постоје две узастопне инстанце броја M у низу c: у супротном би за одговарајуће m и за $n = M$ и индекс $i = 0$ и индекс $i = 1$ задовољавали услов дељивости, што је немогуће. Због тога је свако d_n строго мање од M. Зато је, по избору низа a, $d_i = 1$ за свако $i \geq 2$. Последично је $a_j = 1$ за свако $j \geq 4$, јер из $d_i = \frac{a_{2i}+a_{2i+1}}{2} = 1$ следи $a_{2i} = a_{2i+1} = 1$. Сада се као у првом решењу закључује да је и $a_2 = a_3 = 1$ што је у контрадикцији са избором низа a. Дакле, такав низ a не постоји и доказ је завршен.

3. За почетак уочимо тачке $M = BE \cap (ADC)$ и $N \in CF \cap (ADB)$ у унутрашњости трогула ABC. Приметимо да су AC и AB симетрале дужи MK и NL, односно A је средиште лука $\overset{\frown}{MK}$, односно лука $\overset{\frown}{NL}$ одговарајућих кружница. Дакле DA је симетрала $\angle MDK$, односно $\angle NDL$. Како је још $AD \perp BC$, имамо $(B, H; K, M) = (C, H; L, N) = -1$. Одавде закључујемо да се праве BC, MN и KL секу у једној тачки, нпр. X.

Такође, H се налази на радикалној оси кругова (ADK) и (ADL), па имамо $HM \cdot HK = HA \cdot HD = HN \cdot HL$, однсоно $MNKL$ је тетиван. Приметимо још и да је A центар тог круга (пресек симетрала дужи MK и NL).

На основу теореме о радикалним осама имамо и да је $MDGN$ тетиван (KL, MN, DG се секу у X). Посматрајмо сада тетиван четвороугао $MNKL$. Нека је $G' = ML \cap NK$. Како је A центар круга, а H пресек дијагонала тетивног четвороугла $MNKL$, мора да важи да је $AH \perp XG'$, а пресек им је баш Микелова тачка четвороугла $MNKL$. Како је $XD \perp AH$ и $D \in AH$, закључујемо да је D Микелова тачка, а самим тим и $G \equiv G'$.



Сада на основу Брокардове теореме имамо да је G ортоцентар троугла XHA. Уочимо тачку $Y = AX \cap HG$. Имамо да је $Y \in (AEHF)$, а такође је и $AYDG$ тетиван (круг над пречником AG). Нека је P средиште хипотенузе XG правоуглог троугла XYG. Имамо да је $\angle PYH = \angle PYG = \angle PGY = \angle DGY = \angle DAY = \angle HAY$, односно PY је тангента на круг $AEHF$.

Остаје још да се покаже да су P, E, F колинеарне јер онда имамо $PE \cdot PF = PY^2 = PG^2$, те је PG тангента на круг (EFG).

Колинеарност тачака P, E, F следи из чињенице да су средишта дијагонала XG, MK, NL комплетног четвороугла $MNKLXG$ колинеарна.