

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИМО, Београд 2026

Други дан

4. ПРВО РЕШЕЊЕ: Дефинишимо тачку  $H'$  као пресек тангенте у  $G$  на  $\Omega$  и  $BC$ . На основу Паскалове теореме за тачке  $A, G, G, D, C, B$  имамо да су  $F = AG \cap DC$ ,  $H' = GG \cap CB$  и  $I = GD \cap BA$  колинеарне.

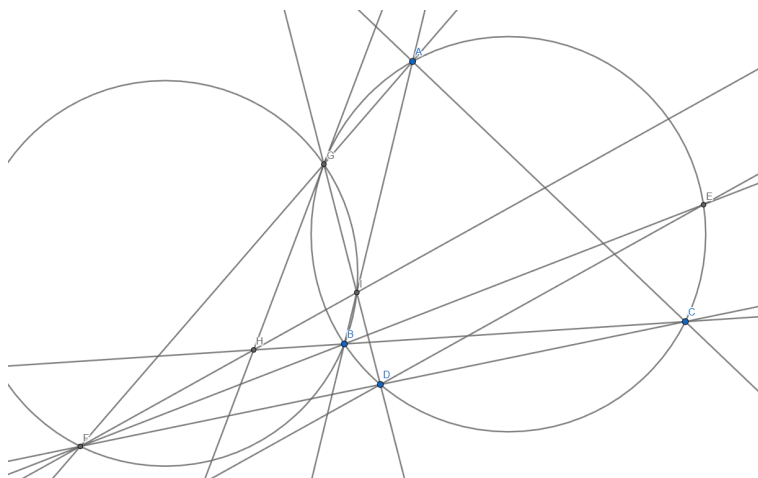
Приметимо сада да је  $\angle FBI = 180^\circ - \angle IBE = 180^\circ - \angle ABE$ . Са друге стране  $\angle FGI = \angle FGD = \angle AED$ . Како имамо и  $AE = AD$ , то важи  $\angle ABE = \angle AED$ , дакле и  $\angle FBI + \angle FGI = 180^\circ$  па је четвороугао  $FBIG$  тетиван.

Даље је  $\angle BFH' = \angle BFI = \angle BGI = \angle BGD = \angle BED$ . Одавде видимо да је  $FH' \parallel ED$ , па је  $H \equiv H'$ .

ДРУГО РЕШЕЊЕ: Дефинишимо тачку  $L$  као пресек  $AH$  и  $\Omega$ . Приметимо да је  $\angle GFH = \angle GFC + \angle CFH = 180^\circ - \angle CGF - \angle GCF + \angle CDE = 180^\circ - \angle ADC - \angle DAG + \angle EDC = 180^\circ - \angle DAG - \angle ADE = 180^\circ - \angle DAG - \angle DGA$ , јер је  $AE = AD$ . Даље из троугла  $ADG$  следи да је  $\angle ADG = 180^\circ - \angle DAG - \angle DGA$ , односно  $\angle ADG = \angle GFH$ . Онда је и  $\angle ALG = \angle GFH$ , па је четвороугао  $GLHF$  тетиван.

Такође важи  $\angle HBF = \angle CBE = \angle CDE = \angle CFH$  па су троуглови  $HBF$  и  $HFC$  слични, односно  $HF^2 = HC \cdot HB = HL \cdot HA$ . Одатле су и  $HLF$  и  $HFA$  слични, па је  $\angle HFA = \angle HLF = \angle HGF$ . Дакле  $HF = HG$ , па је  $HG$  тангента на  $\Omega$ .

ТРЕЋЕ РЕШЕЊЕ: За почетак из тога што се тетиве  $AG, BE$  и  $CD$  секу у истој тачки  $F$ , знамо да је  $AE \cdot BD \cdot CG = AD \cdot BG \cdot CE$ . Како је  $AD = AE$ , добијамо  $\frac{BD}{CE} = \frac{BG}{CG}$ . Из сличности  $FEC$  и  $FDB$  имамо  $\frac{BD}{CE} = \frac{BF}{CF}$ . Такође  $\angle HBF = \angle CBE = \angle CDE = \angle CFH$  па су троуглови  $HBF$  и  $HFC$  слични, односно  $\frac{BF}{CF} = \frac{HF}{HC}$ . Даље како знамо да је  $\frac{BG}{CG} = \frac{BF}{CF}$  то се симетрале  $\angle BGC$  и  $\angle BFC$  секу на  $BC$  у некој тачки  $L$  и важи  $\frac{BG}{CG} = \frac{BF}{CF} = \frac{BL}{CL}$ . Како је и  $\angle HLF = \angle LBE + \angle BFL = \angle EDC + \angle LFC = \angle CFH + \angle LFC = \angle LFH$ , то је  $HF = HL$ . Дакле  $\frac{BL}{CL} = \frac{HL}{HC}$ , односно  $HL \cdot CL = BL \cdot HC$ , па кад додамо на обе стране  $HL \cdot HC$  добијамо  $HL^2 = HB \cdot HC$  па можемо закључити да је  $HG$  тангента на  $\Omega$ .



5. Маја побеђује ако је  $n$  облика  $4k + 1$  или  $4k + 2$ , а Коста иначе. Докажимо прво да ако први играч губи за неку вредност броја  $n$ , онда први играч побеђује за вредност

$n+2$ . Заиста, у игри са  $2(n+2)$  рупа Маја може у свом првом потезу да помери лешник из прве у последњу рупу. Тада се игра своди на игру са  $2n$  рупа, од рупе број 3 до рупе број  $2n+2$ . Пошто је сада Коста на потезу, а први играч у тој мањој игри губи, Маја побеђује.

Пошто Маја очигледно побеђује за  $n=1$  и  $n=2$ , остаје да покажемо да Коста побеђује када је  $n$  облика  $4k$  или  $4k+3$ .

Костина стратегија је следећа. Уколико Маја премести лешник из рупе  $i$  у рупу  $j$  за неке  $i$  и  $j$  такве да је  $i+j \neq 2n+1$ , Коста ће преместити лешник из рупе  $2n+1-j$  у рупу  $2n+1-i$ . У супротном, ако је  $i+j = 2n+1$ , Коста ће преместити лешник из рупе  $k$  у рупу  $2n+1-k$ , за неко погодно  $k$ .

Докажимо да Коста може да поштује овакву стратегију и да је она за њега победничка. За почетну конфигурацију важи да се лешник налази у рупи  $i$  ако и само ако се лешник не налази у рупи  $2n+1-i$ . Овакве конфигурације зваћемо симетричним.

Претпоставимо да је пре Мајиног потеза конфигурација била симетрична. Ако је Маја преместила лешник из рупе  $i$  у рупу  $j$ , где је  $j > i$  и  $i+j \neq 2n+1$ , онда због симетричности знамо да је рупа  $2n+1-i$  празна, да се у рупи  $2n+1-j$  налази лешник и да је  $2n+1-j < 2n+1-i$ . Дакле, Коста може да премести лешник из рупе  $2n+1-j$  у рупу  $2n+1-i$  и тиме поново добије симетричну конфигурацију.

Остаје случај када је  $i+j = 2n+1$ . Тада Мајин потез сам по себи очувава симетричност конфигурације. Да би Коста могао да одигра свој предвиђени потез, потребно је само доказати да се у првих  $n$  рупа тада налази бар један лешник, како би Коста могао њега да помери са позиције  $k$  на позицију  $2n+1-k$  и притом очува симетричност.

То можемо тврдити због тога што се за  $n$  облика  $4k$  или  $4k+3$  на почетку у првих  $n$  рупа налази паран број лешника, редом  $2k$  и  $2k+2$ . Због Костине описане стратегије, пре сваког Мајиног потеза овај број је увек паран, јер током једног пара потеза, Мајиног и Костиног, број лешника у првих  $n$  рупа или остаје исти или се смањује за 2. Ако Маја одигра потез за који је  $i+j = 2n+1$ , онда се после њеног потеза број лешника у првих  $n$  рупа смањи за 1, па је тај број непаран. Зато је сигурно већи од нуле, па у првих  $n$  рупа постоји бар један лешник.

Сада једноставном индукцијом закључујемо да је конфигурација симетрична пре сваког Мајиног потеза и да Коста може да поштује своју стратегију. Пошто смо доказали да Коста има одговор на сваки Мајин потез, а игра је коначна, Коста има победничку стратегију. Овим је доказ завршен.

6. Из очигледне дељивости  $rad(ab) \mid rad(a)rad(b)$ , скуп моничних полинома који задовољавају наведену дељивост је затворен у односу на множење. Полиноми  $P(x) = x$  и  $P(x) = x-1$  очигледно испуњавају ово тврђење, па га, по претходној констатацији, испуњава и полином  $P(x) = (x-1)^2$ . За наведен полиноме је  $P(0) = 0, -1, 1$ , редом. Докажимо да других решења нема.

Анализирајмо задати услов, који можемо записати у облику  $p \in \mathbb{P}, p \mid P(n) \implies p \mid P(n^n)$ . Како  $p \mid P(n) \implies p \mid P(n+kp) (\forall k \in \mathbb{N}) \implies p \mid P((n+kp)^{n+kp}) \equiv P(n^{n+kp}) \equiv P(n^{n+k}) \pmod{p}$ , то на основу Мале Фермаове теореме закључујемо да  $p \mid P(n^{n+k}) \forall k \in \mathbb{N}_*$ . Како  $n+k$  даје све могуће остатке при дељењу са  $p-1$ , док  $k$  пролази скупом природних бројева, поновном употребом Мале Фермаове теореме закључујемо да  $p \mid P(n^l)$ , за свако  $l \in \mathbb{N}$  (за фиксирано  $l > 0$  можемо узети  $k \in \mathbb{N}$  такав да  $l \equiv n+k \pmod{p-1}$ ). Дакле, важи  $p \mid P(n) \implies p \mid P(n^l)$ , за свако  $l \in \mathbb{N}$ .

Довољно је доказати да су све (комплексне) нуле полинома  $P$  модула 0 или 1, што завршава задатак, с обзиром на то да је  $|P(0)| \in \mathbb{N}_0$  и да је  $|P(0)|$  једнак производу модула свих нула полинома  $P$ , јер је он моничан.

Нека је  $w \in \mathbb{C}$  такав да је  $P(w) = 0$  и  $R(x)$  минимални полином нуле  $w$  (над  $\mathbb{Q}$ ). Он дели  $P$  у  $\mathbb{Q}[x]$  и моничан је, а како је  $P$  целобројан моничан полином, једноставно

закључујемо да је  $R(x) \in \mathbb{Z}[x]$  и да је количник  $\frac{P}{R}$  целобројан полином. Фиксирајмо природан број  $l$  и целобројан полином  $Q(x) = P(x^l)$ . Уколико  $R \nmid Q$  (у  $\mathbb{Z}[x]$ ),  $Q$  и  $R$  су узајамно прости у  $\mathbb{Z}[x]$  с обзиром на то да је  $R$  минимални полином од  $w$ , па је притом нерастављив.

Претпоставимо да је ово случај. Тада, на основу Безуовог става, постоје целобројни полиноми  $A$  и  $B$  и цео број  $c \neq 0$  за које важи  $A(x)Q(x) + B(x)R(x) = c$ , а негирањем  $A$  и  $B$  по потреби можемо претпоставити без умањења општости да је  $c > 0$ . По Шуровој теореме постоји бесконачно простих бројева  $p$  за које важи  $p \mid R(n)$  за неки природан број  $n$ . Узимањем произвољног таквог пара  $(p, n)$  за који је  $p > c$ , по претходном закључујемо  $p \mid P(n)$ , одакле  $p \mid P(n^l) = Q(n)$ , па из дефиниције полинома  $A$  и  $B$ , убацивањем вредности  $x = n$ , закључујемо да  $p \mid c$ , што је немогуће због  $p > c > 0$ .

Дакле, мора важити  $R \mid Q$  у  $\mathbb{Z}[x]$ , одакле наведена дељивост важи и у  $\mathbb{R}[x]$ , па из  $P(w) = R(w) = 0$  следи  $0 = Q(w) = P(w^l)$ . С обзиром на то да ово важи за свако  $l \in \mathbb{N}$ , као и да су бројеви  $a_l = w^l$  нуле неконстантног полинома, низ  $a_l$  може имати коначно много различитих чланова. Следи да је, за неке различите природне бројеве  $u$  и  $v$ ,  $w^u = w^v$ . Изједначавањем модула закључујемо да је  $w = 0$  или  $|w| = 1$ , чиме је доказ завршен.