# Министарство просвете Републике Србије
# Друштво математичара Србије

## 19. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

### Београд, 23. мај 2026.

**1.** Нека су $x, y, z$ позитивни реални бројеви. Доказати да важи неједнакост

$$\frac{x}{x^2y+z}+\frac{y}{y^2z+x}+\frac{z}{z^2x+y}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Када важи једнакост?

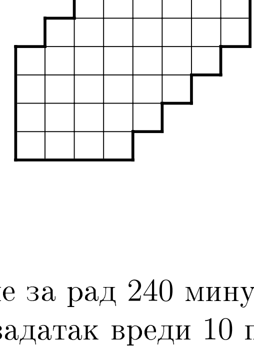
**2.** Нека је $ABCD$ паралелограм са оштрим угловима у теменима $A$ и $C$. Означимо са $E$ и $F$ редом подножја висина из темена $B$ и $D$ у троуглу $BCD$. Доказати да је права одређена центрима описаних кружница троуглова $ABD$ и $CEF$ паралелна правој $AC$.

**3.** Одредити најмањи природан број $s$ за који постоје природни бројеви $a$, $b$ и $c$ такви да је $ab+s$ степен броја $c$, $bc+s$ степен броја $a$, $ca+s$ степен броја $b$.
*Напомена:* Степен броја $a$ је произвољан број облика $a^m$, где је $m \in \mathbb{N}$.

**4.** Нека је $n$ природан број. Посматрајмо таблу димензија $2^n \times 2^n$ састављену од јединичних квадратића, при чему су редови и колоне нумерисани од 1 до $2^n$ (одозго надоле и слева надесно). Посматрајмо таблу $B$ која се састоји од свих поља у $i$-том реду и $j$-тој колони таквих да важи $2^{n-1}+2 \leqslant i+j \leqslant 3\cdot 2^{n-1}$. На слици испод дат је пример табле $B$ за $n=3$. Колики је минималан број:

(а) квадрата; (б) правоугаоника;

потребан да се табла $B$ потпуно поплоча (без преклапања)?



Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.