Јуниорска српска математичка олимпијада 2026

Задатак 1. Нека су x, y, z позитивни реални бројеви. Доказати да важи неједнакост

$$\frac{x}{x^2y+z}+\frac{y}{y^2z+x}+\frac{z}{z^2x+y}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Када важи једнакост?

Решење 1: Најпре применимо неједнакост између аритметичке и геометријске средине на именилац првог разломка

$$x^2y+z\geqslant 2\sqrt{x^2yz}=2x\sqrt{yz}.$$

Одатле је

$$\frac{x}{x^2y+z}\leqslant\frac{x}{2x\sqrt{yz}}=\frac{1}{2\sqrt{yz}}.$$

Аналогним поступком добијамо да је

$$\frac{y}{y^2z+x}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{zx}}\quad\text{и}\quad\frac{z}{z^2x+y}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{xy}},$$

па сабирањем закључујемо да је

$$\frac{x}{x^2y+z}+\frac{y}{y^2z+x}+\frac{z}{z^2x+y}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}+\frac{1}{\sqrt{xy}}\right).$$

Поново из неједнакости између аритметичке и геометријске средине добијамо

$$\frac{1}{\sqrt{yz}}=\sqrt{\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

и аналогно

$$\frac{1}{\sqrt{zx}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)\quad\text{и}\quad\frac{1}{\sqrt{xy}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$$

Одатле је

$$\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}+\frac{1}{\sqrt{xy}}\leqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z},$$

па коначно добијамо

$$\frac{x}{x^2y+z}+\frac{y}{y^2z+x}+\frac{z}{z^2x+y}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Једнакост важи ако и само ако је $x^2y=z$, $y^2z=x$, $z^2x=y$, $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$, односно $x=y=z=1$.

Решење 2: Из неједнакости аритметичке и геометријске средине примењене на бројеве x^2y^2, x^2yz, yz и z^2 следи да је

$$\frac{x^2y^2+x^2yz+yz+z^2}{4}\geqslant\sqrt[4]{x^2y^2\cdot x^2yz\cdot yz\cdot z^2}=\sqrt[4]{x^4y^4z^4}=xyz.$$

Растављајући леву страну на чиниоце одатле следи $(y+z)(x^2y+z)\geqslant 4xyz$, а затим и

$$\frac{x}{x^2y+z}\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Сабирајући аналогне неједнакости

$$\frac{y}{y^2z+x}\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)\quad\text{и}\quad\frac{z}{z^2x+y}\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

добијамо тражену.
Једнакост важи ако и само ако је $x^2y^2 = x^2yz = yz = z^2$, $y^2z^2 = y^2zx = zx = x^2$, $z^2x^2 = z^2xy = xy = y^2$, односно $x = y = z = 1$.

Решење 3: Из неједнакости Коши–Шварца важи

$$(x^2y + z)\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geqslant (x+1)^2.$$

Даље је из неједнакости између аритметичке и геометријске средине $x+1 \geqslant 2\sqrt{x}$, па то заједно са претходним даје

$$(x^2y + z)\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geqslant (x+1)^2 \geqslant 4x,$$

односно

$$\frac{x}{x^2y+z} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right).$$

Сабирајући аналогне неједнакости

$$\frac{y}{y^2z+x} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) \quad \text{и} \quad \frac{z}{z^2x+y} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

добијамо тражену.
Једнакост важи ако и само ако је $x^2yz = z^2$, $y^2zx = x^2$, $z^2xy = y^2$, $x = y = z = 1$, што се своди на $x = y = z = 1$.

МАРКИНГ ШЕМА

(0) Навођење да једнакост важи само у случају $x = y = z = 1$ без извођења низа неједнакости .... **0 поена**

Решење 1:

(1) Успешна примена АГ неједнакости на именилац .... **4 поена**

(2) Оцена леве стране изразом $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} + \frac{1}{\sqrt{xy}}\right)$ .... **1 поен**

(3) Примена АГ неједнакости на израз $\frac{1}{\sqrt{yz}}$ (или неке њој еквивалентне) .... **3 поена**

(4) Завршетак доказа неједнакости .... **1 поен**

(5) Доказ када важи једнакост .... **1 поен**

Решење 2:

(1) Примена АГ неједнакости на наведене изразе .... **4 поена**

(2) Растав леве стране и оцена једног сабирка .... **4 поена**

(3) Завршетак доказа неједнакости .... **1 поен**

(4) Доказ када важи једнакост .... **1 поен**

Решење 3:

(1) Успешна примена Коши-Шварцове неједнакости .... **4 поена**

(2) Оцена помоћу АГ неједнакости .... **4 поена**

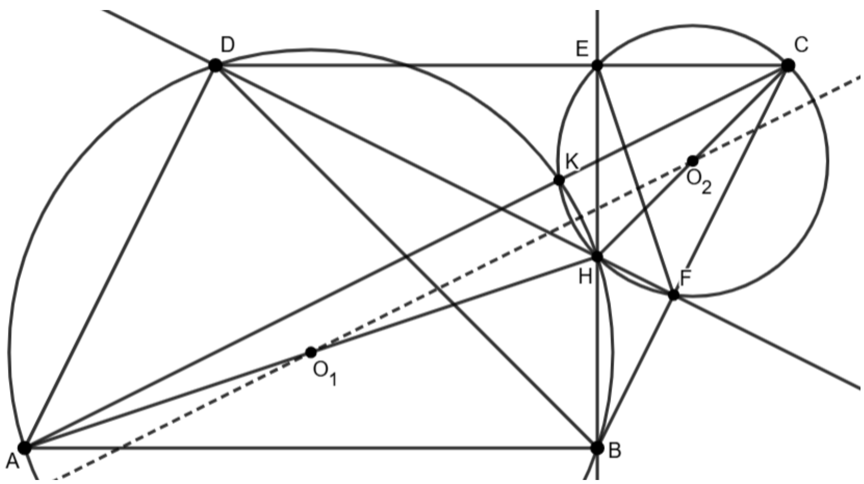
(3) Завршетак доказа неједнакости .... **1 поен**

(4) Доказ када важи једнакост .... **1 поен**

Задатак 2. Нека је $ABCD$ паралелограм са оштрим углом у теменима A и C. Означимо са E и F редом подножја висина из темена B и D у троуглу BCD. Доказати да је права одређена центрима описаних кружница троуглова ABD и CEF паралелна правој AC.

Решење 1: Нека је $\{H\} = BE \cap DF$ ортоцентар троугла BCD, а K подножје нормале из H на AC. Како је $\measuredangle CEH = \measuredangle CFH = 90^\circ$, кружница описана око троугла CEF садржи тачку H и дуж CH је један њен пречник. Слично, како је $\measuredangle ABH = \measuredangle ADH = 90^\circ$, кружница описана око троугла ABD садржи тачку H и дуж AH је један њен пречник. Према томе, једна пресечна тачка поменутих кружница је тачка H.
Нека су O_1 и O_2 редом центри описаних кружница троуглова ABD и CEF. Пошто је AH пречник прве кружнице, њен центар је средиште дужи AH, тј. O_1 је средиште дужи AH. Слично, пошто је CH пречник друге кружнице, њен центар је средиште дужи CH, тј. O_2 је средиште дужи CH.
Према томе, у троуглу ACH тачке O_1 и O_2 су средишта страница AH и CH. Зато је права O_1O_2 средња линија троугла ACH, па важи $O_1O_2 \parallel AC$.

Решење 2: На исти начин као у првом решењу доказујемо да се кружнице секу у тачки H. Докажимо да је друга пресечна тачка ових кружница тачка K. Очигледно је $\measuredangle CKH = 90^\circ$, па тачка K припада кружници над пречником CH, што је управо кружница описана око троугла CEF. Слично, како је $\measuredangle AKH = 90^\circ$, па тачка K припада кружници над пречником AH, тј. кружници описаној око троугла ABD. Према томе, заједничка тетива ових кружница HK је нормална на AC. Како је права одређена центрима два круга која се секу увек нормална на заједничку тетиву тих кругова, та права је нормална на HK, а самим тим паралелна са AC. Овим је доказ завршен.



МАРКИНГ ШЕМА

(1) Доказ да је $CEHF$ тетиван .... **3 поена**

(2) Констатација да је CH пречник описаног круга око $CEHF$ .... **1 поен**

(3) Доказ да је $ABHD$ тетиван .... **3 поена**

(4) Констатација да је AH пречник описаног круга око $ABHD$ .... **1 поен**

(5) Крај доказа .... **2 поена**

Задатак 3. Одредити најмањи природан број s за који постоје природни бројеви a, b и c такви да је $ab+s$ степен броја c, $bc+s$ степен броја a, $ca+s$ степен броја b.
Напомена: Степен броја a је произвољан број облика a^m, где је $m \in \mathbb{N}$.

Решење : Запишимо услове задатка у облику система

$$\begin{aligned} ab+s &= c^m \\ bc+s &= a^n \\ ca+s &= b^k, \end{aligned} \tag{1}$$

за неке $m, n, k \in \mathbb{N}$. Најпре, приметимо да за $s=4$ постоји решење овог система $a=b=c=2$ и $m=n=k=3$. Доказаћемо да систем нема решење за $s \leqslant 3$, тј. за $s \in \{1,2,3\}$.
Најпре, приметимо да је $a, b, c \geqslant 2$. Заиста, ако је неки од њих, нпр. $a=1$, тада је $bc+s=1$, што је немогуће јер је лева страна бар 2. Множењем све три једначине система, добијамо

$$a^2b^2c^2+s^2(ab+bc+ca)+sabc(a+b+c)+s^3=a^nb^kc^m,$$

па закључујемо да

$$abc \mid s^2(ab+bc+ca+s). \tag{2}$$

Докажимо да је s узајамно прост са свим a, b, c. Претпоставимо супротно, да постоји прост број p такав да нпр. $p \mid a$ и $p \mid s$. Тада из прве једначине система закључујемо да $p \mid c$, док из треће закључујемо да $p \mid b$. Није могуће да је $m=n=k=1$, јер би онда $ab+bc+ca+3s > a+b+c$, па бар један од m, n и k (нпр. k) мора бити већи или једнак 2. Но, тада из треће једначине добијамо да $p^2 \mid ca$ и $p^2 \mid b^k$, па $p^2 \mid s$ што је немогуће јер је $s \in \{1,2,3\}$. Одатле и из једначине (2) добијамо да је

$$abc \mid ab+bc+ca+s,$$

па постоји $k \in \mathbb{N}$ такав да је

$$ab+bc+ca+s=k \cdot abc. \tag{3}$$

Дељењем обе стране са abc у једначини (3), добијамо да је

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{s}{abc}=k.$$

Но, знајући да су $a, b, c \geqslant 2$, добијамо да је

$$k \leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}=\frac{15}{8}<2$$

па је $k=1$, тј важи

$$ab+bc+ca+s=abc. \tag{4}$$

Како је цео систем симетричан по a, b и c, можемо претпоставити да је $a \geqslant b \geqslant c$. Из једначине (4) закључујемо да

$$ab \mid bc+ca+s,$$

па постоји $t \in \mathbb{N}$ такав да је

$$bc+ca+s=t \cdot ab.$$

Дељењем обе стране са ab, добијамо да је

$$t=\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{s}{ab} \leqslant 1+1+\frac{3}{4}<3,$$

па $t \in \{1,2\}$. Ако је $t=2$, посматрамо једначину

$$bc+ca+s=2ab. \tag{5}$$

Ако је $a = b$, онда $a \mid s$, што је немогуће из већ доказане чињенице да су a и s узајамно прости. Дакле важи $a > b$. Ако је $b > c$, тада је $a - c > 2$, па из $s = a(b - c) + b(a - c)$ је $s \geqslant 4$, контрадикција. Дакле $b = c$, па се једначина (5) своди на $b^2 + s = ab$. Но, онда $b \mid s$, што је немогуће.
Остаје опција $t = 1$, па је $bc + ca + s = ab$, односно једначина (4) се своди на $2ab = abc$, па је $c = 2$, па добијамо да је $2a + 2b + s = ab$. Сада ову Диофантову једначину записујемо у еквивалентном облику

$$(a-2)(b-2) = s + 4. \tag{6}$$

Ако је $s = 1$, тада је једина могућност да је $a = 7$ и $b = 3$, па се прва једначина почетног система своди на $7 \cdot 3 + 1 = 22 = 2^m$, што нема решење у скупу $\mathbb{N}$.
Случај $s = 2$ је немогућ јер је $c = 2$ и s и c су узајамно прости.
Коначно, у случају $s = 3$, једначина (6) има само једно решење $a = 9$ и $b = 3$, но поново посматрајући прву једначину почетног система добијамо $9 \cdot 3 + 3 = 30 = 2^m$, што нема решење у скупу природних бројева.
Овим смо доказали да је најмање тражено $s = 4$.

МАРКИНГ ШЕМА

(1) Конкретан пример за $s = 4$ . . . . **1 поен**

(2) Закључак да важи $abc \mid s^2(ab + bc + ca + s)$ . . . . **1 поен**

(3) Разматрање узајамне простости s са неким од a, b, c . . . . **1 поен**

(4) Закључак да важи $abc \mid ab + bc + ca + s$ . . . . **1 поен**

(5) Закључак да важи $abc = ab + bc + ca + s$ . . . . **1 поен**

(6) Закључак да важи $bc + ca + s = t \cdot ab$, за $t \in \{1, 2\}$ . . . . **1 поен**

(7) Решавање случаја $t = 2$ . . . . **1 поен**

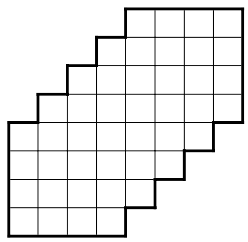
(8) Закључак да у случају $t = 1$ важи $c = 2$ и $(a-2)(b-2) = s + 4$ . . . . **1 поен**

(9) Доказ да за $s \leqslant 3$ нема решења . . . . **2 поена**

Задатак 4. Нека је n природан број. Посматрајмо таблу димензија $2^n \times 2^n$ састављену од јединичних квадратића, при чему су редови и колоне нумерисани од 1 до 2^n (одозго надоле и слева надесно). Посматрајмо таблу B која се састоји од свих поља у i-том реду и j-тој колони таквих да важи $2^{n-1} + 2 \leqslant i + j \leqslant 3 \cdot 2^{n-1}$. На слици испод дат је пример табле B за $n = 3$. Колики је минималан број

(а) квадрата; (б) правоугаоника;

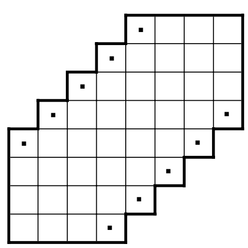
потребан да се табла B потпуно поплоча (без преклапања)?



Решење: Одговор је 2^n у оба случаја. Означимо са $m(n)$ тражени минималан број правоугаоника. У случају $n = 1$, табла B се састоји од два неповезана поља и зато је $m(1) = 2$. Сада нека је $n \geqslant 2$. Означимо са L скуп поља (i, j) табле B таквих да је $i + j = 2^{n-1} + 2$, и означимо са U скуп поља (i, j) табле B таквих да је $i + j = 3 \cdot 2^{n-1}$. Скупови L и U означени су тачкама на слици испод. Сваки правоугаоник који поплочава B може покрити највише једно поље из скупа L. Слично, сваки правоугаоник који поплочава B може покрити највише једно поље из скупа U. Како је $n \geqslant 2$, скупови L и U су дисјунктни и њихов унија се састоји од

$$|L \cup U| = |L| \cdot 2 = (2^{n-1} + 1) \cdot 2 = 2^n + 2$$

поља. Сада желимо да проверимо колико има правоугаоника који у поплочавању табле B могу истовремено покрити по једно поље из скупова L и U.



Један такав правоугаоник $\mathcal{P}$ има горње-лево теме у пољу $(i, 2^{n-1}+2-i)$, за неко $1 \leqslant i \leqslant 2^{n-1}+1$, и доње-десно теме у пољу $(j, 3 \cdot 2^{n-1} - j)$, за неко $2^{n-1} \leqslant j \leqslant 2^n$. Доказаћемо да $\mathcal{P}$ покрива једно од два централна поља: $(2^{n-1}, 2^{n-1} + 1)$ или $(2^{n-1} + 1, 2^{n-1})$. Одавде ће следити да постоје највише два оваква правоугаоника.
Услов $(2^{n-1}, 2^{n-1} + 1) \in \mathcal{P}$ значи да важи

$$i \leqslant 2^{n-1} \leqslant j \quad \text{и} \quad 2^{n-1} + 2 - i \leqslant 2^{n-1} + 1 \leqslant 3 \cdot 2^{n-1} - j,$$

односно

$$1 \leqslant i \leqslant 2^{n-1} \quad \text{и} \quad 2^{n-1} \leqslant j \leqslant 2^n - 1.$$

Ово важи у свим случајевима осим ако је $i = 2^{n-1} + 1$ или је $j = 2^n$.
Услов $(2^{n-1} + 1, 2^{n-1}) \in \mathcal{P}$ значи да важи

$$i \leqslant 2^{n-1} + 1 \leqslant j \quad \text{и} \quad 2^{n-1} + 2 - i \leqslant 2^{n-1} \leqslant 3 \cdot 2^{n-1} - j,$$

односно
$$2 \leqslant i \leqslant 2^{n-1} \quad \text{и} \quad 2^{n-1}+1 \leqslant j \leqslant 2^n.$$
Ово важи у свим случајевима осим ако је $i=1$ или је $j=2^{n-1}$.
Једине могућности за правоугаоник $\mathcal{P}$ који не би обухватио ниједно од поља $(2^{n-1}, 2^{n-1}+1)$ или $(2^{n-1}+1, 2^{n-1})$ је да важи $(i,j)=(2^{n-1}+1, 2^{n-1})$ или $(i,j)=(1,2^n)$. Односно $\mathcal{P}$ има дијагонална поља са координатама $(2^{n-1}+1, 1)$ и $(2^{n-1}, 2^n)$, или дијагонална поља са координатама $(1, 2^{n-1}+1)$ и $(2^n, 2^{n-1})$. Видимо да ниједан од ова два случаја није геометријски могућ.
Следи да је $m(n) \geqslant |L \cup U| - 2 = 2^n$. Дакле, минималан број правоугаоника (а самим тим и квадрата) којима је могуће поплочати таблу је бар 2^n.
Сада ћемо конструисати пример са тачно 2^n квадрата који поплочавају B. Самим тим, ово ће бити пример и за поплочавање уз помоћ 2^n правоугаоника. Из првог дела решења закључујемо да два квадрата димензије $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ морају бити постављена у горње-десном и доње-левом квадранту табле B. Остају нам два дисјунктна дела табле B (који изгледају као степенице) који су исти до на ротацију за $180°$. Један од њих означимо са S_n (оријентисан као горње-леви). Желимо да покажемо да се S_n може поплочати са тачно $2^{n-1}-1$ квадрата. Поступамо индукцијом по $n \geqslant 2$. За $n=2$, S_n је само једно поље па је потребно $1 = 2^{2-1}-1$ квадрата да га поплочамо. Претпоставимо да је потребно $2^{n-1}-1$ квадрата да се поплоча S_{n-1}. На табли S_n узмимо највећи могући квадрат који може да стане: то је квадрат димензије $2^{n-2} \times 2^{n-2}$ и може стати на тачно једном месту. Он се простире од доњег-десног угла S_n до средине степеница. Када уклонимо тај велики квадрат, остају нам две мање дисјунктне степенице, обе једнаке S_{n-1}. По индуктивној претпоставци свако S_{n-1} може да се поплоча са $2^{(n-1)-1}-1 = 2^{n-2}-1$ квадрата, па је поплочавање S_n могуће са тачно $2 \cdot (2^{n-2}-1)+1 = 2^{n-1}-1$ квадрата, што је и требало доказати.

Напомена: Следи (једноставнији) доказ да у случају поплочавања квадратима постоје највише два квадрата која имају два поља из скупа $L \cup U$. Један такав квадрат има горње-лево теме у тачки $(i, 2^{n-1}+2-i)$, за неко $1 \leqslant i \leqslant 2^{n-1}+1$. Једини део тог квадрата који може пресеци скуп U је његово доње-десно теме и оно ће бити у пољу $(i+2^{n-1}-1, 2^n+1-i)$, и то је квадрат димензије $2^{n-1} \times 2^{n-1}$. Сваки такав квадрат покрива тачно 2^{n-1} поља на анти-дијагонали табле B (поља (i,j) таква да је $i+j=2^n+1$). Анти-дијагонала табле B је дужине 2^n и зато могу постојати највише два квадрата који покривају тачно две тачке из скупа $L \cup U$.

МАРКИНГ ШЕМА

(1) Уочавање поља из скупова L или U .... **1 поен**

(2) Констатација да један правоугаоник/квадрат не може покрити два поља из L или U .... **1 поен**

(3) Доказ да могу постојати највише два правоугаоника који покривају поље из L и из U (ова ставка није адитивна са ставкама (4) и (5)) .... **4 поена**

(4) Констатација да сваки правоугаоник који захвата две тачке из скупа $L \cup U$ мора захватити једно од два централна поља (ова ставка није адитивна са ставкама (3) и (5)) .... **2 поена**

(5) Доказ да могу постојати највише два квадрата који покривају поље из L и из U (ова ставка није адитивна са ставкама (3) и (4)) .... **2 поена**

(6) Закључак да је $m(n) \geqslant 2^n$ за квадрате/правоугаонике .... **1 поен**

(7) Конструкција примера за квадрате (ова ставка није адитивна са ставкама (8) и (9)) .... **3 поена**

(8) Конструкција примера за правоугаонике који нису квадрати (ова ставка није адитивна са ставкама (7) и (9)) .... **1 поен**

(9) Описна конструкција примера за квадрате (ова ставка није адитивна са ставкама (7) и (8)) . **2 поена**

Напомена: У случају да је потпуно урађен само део (а) или само део (б), ученик ће по овој маркинг шеми имати 7 поена.