Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Државно такмичење из математике ученика основних школа
9. 5. 2026.

VI разред

1. Одреди све природне бројеве облика $\overline{6ababab}$ који су дељиви са 18, док се брисањем прве и последње цифре овог броја добија петоцифрени број дељив са 6.

2. Петорица другова су делили кликере, тако што су редом узимали одређен број кликера из кутије. Први је узео трећину свих кликера, а други четвртину остатка. Затим је први друг схватио да је узео више него што је требало, па је вратио у кутију петину кликера које је узео. Након тога, трећи друг је погледао колико тренутно код себе имају прва двојица, па узео из кутије половину тог броја кликера. Четврти је узео три кликера више него што ће оставити петом, а петом је преостало три двадесетине укупног броја кликера. Колико кликера је узео свако од њих?

3. У троуглу ABC мера унутрашњег угла код темена A је 6 пута већа од мере угла код темена B. Симетрала странице AC сече страницу BC у тачки M, при чему је троугао ABM једнакокрак. Одреди мере унутрашњих углова троугла ABC. Одреди сва решења.

4. Нека је дат квадрат $ABCD$. Тачке M, N и Q су редом средишта дужи AB, BC и DM, а тачка P је пресек дужи CM и DN. Докажи да је
$$CM = 2 \cdot PQ.$$

5. Дато је 5 сложених бројева не већих од 120. Докажи да међу њима постоје два броја која нису узајамно проста.

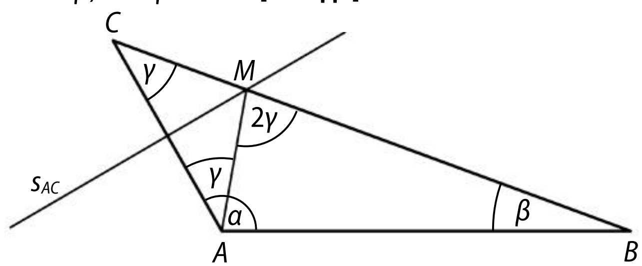
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI разред

1. Број $\overline{6ababab}$ је дељив са 18 уколико је паран и дељив са 9 [**1 бод**]. Из услова парности закључујемо да је цифра b парна [**1 бод**], док из услова дељивости са 9 закључујемо да је збир цифара датог броја дељив са 9, одакле добијамо $9 \mid (6 + 3a + 3b)$ [**1 бод**], односно $3 \mid (2 + a + b)$ [**3 бода**]. Број $\overline{ababa}$ је дељив са 6 уколико је паран и дељив са 3 [**1 бод**]. Из услова парности закључујемо да је цифра a парна [**1 бод**], док из услова дељивости са 3 закључујемо $3 \mid (3a + 2b)$ [**1 бод**]. Како свакако важи $3 \mid 3a$, добијамо да важи $3 \mid 2b$, тј. $3 \mid b$ [**3 бода**]. Према томе, број b је парна цифра и дељив је са 3, па је b дељив са 6, те су једине могућности $b = 0$ и $b = 6$ [**4 бода**]. Замењујући сада ове једнакости у претходно добијене релације, добијамо у оба случаја исти услов: $3 \mid (2 + a)$ [**2 бода**]. Како је цифра a још и парна, једина могућност је $a = 4$, па су тражени бројеви
6404040 и 6464646 [**2 бода**].

2. Означимо са x број кликера у кутији на почетку. Први друг је узео $\frac{x}{3}$ кликера, а други $\frac{1}{4}\cdot\frac{2x}{3}=\frac{x}{6}$ кликера [**2 бода**]. Заједно су до сада узели $\frac{x}{3}+\frac{x}{6}=\frac{x}{2}$ кликера [**2 бода**], па је у кутији такође тренутно $\frac{x}{2}$ кликера. Први друг је у кутију вратио $\frac{1}{5}\cdot\frac{x}{3}=\frac{x}{15}$ кликера, па му је остало $\frac{4x}{15}$ кликера [**2 бода**]. У кутији је након тога остало $\frac{x}{2}+\frac{x}{15}=\frac{17x}{30}$ кликера, док прва два друга након тога имају заједно $\frac{x}{2}-\frac{x}{15}=\frac{13x}{30}$ кликера [**2 бода**]. То значи да је трећи друг узео $\frac{1}{2}\cdot\frac{13x}{30}=\frac{13x}{60}$ кликера [**1 бод**], па је у кутији након тога остало $\frac{17x}{30}-\frac{13x}{60}=\frac{7x}{20}$ кликера [**2 бода**]. Овај број кликера су расподелили четврти и пети друг, и то пети друг $\frac{3x}{20}$, а четврти друг $\frac{3x}{20}+3$. Одавде добијамо једначину $\frac{3x}{20}+\frac{3x}{20}+3=\frac{7x}{20}$ [**5 бодова**], чијим решавањем добијамо коначно решење $x = 60$ кликера [**2 бода**]. Према томе, другови су редом узели 16, 10, 13, 12, 9 кликера [**2 бода**].

3. Нека су мере одговарајућих унутрашњих углова датог троугла α, β, γ. Из услова задатка $\alpha = 6\beta$, добијамо $\gamma = 180° - 7\beta$ [**1 бод**]. Како тачка M припада симетрали странице AC, то је $AM = CM$ и троугао ACM је једнакокрак [**2 бода**], одакле је $\measuredangle MAC = \measuredangle ACM = \gamma$ [**1 бод**] и $\measuredangle AMB = 2\gamma = 2 \cdot (180° - 7\beta) = 360° - 14\beta$ [**2 бода**], па је $\measuredangle BAM = \alpha - \gamma = 6\beta - (180° - 7\beta) = 13\beta - 180°$ [**2 бода**].



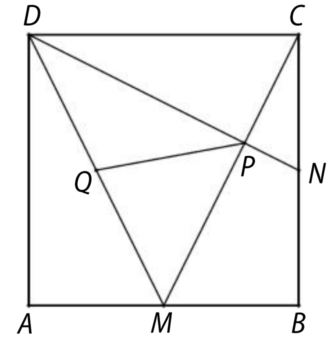
Према томе, сви унутрашњи углови троугла ABM изражени су преко мере угла β: $\measuredangle ABM = \beta$, $\measuredangle BAM = 13\beta - 180°$, $\measuredangle AMB = 360° - 14\beta$. Како је троугао ABM једнакокрак, разликујемо следеће случајеве:

1°) $AM = BM$, односно $\measuredangle BAM = \measuredangle ABM$. Тада је $13\beta - 180° = \beta$, одакле је $12\beta = 180°$, односно $\beta = 15°$. Мере унутрашњих углова троугла ABC су $\alpha = 90°$, $\beta = 15°$, $\gamma = 75°$ [**4 бода**].

2°) $AB = BM$, односно $\measuredangle AMB = \measuredangle BAM$. Тада је $360° - 14\beta = 13\beta - 180°$, одакле је $27\beta = 540°$, односно $\beta = 20°$. Мере унутрашњих углова троугла ABC су $\alpha = 120°$, $\beta = 20°$, $\gamma = 40°$ [**4 бода**].

3°) $AB = AM$, односно $\measuredangle AMB = \measuredangle ABM$. Тада је $360° - 14\beta = \beta$, одакле је $15\beta = 360°$, односно $\beta = 24°$. Мере унутрашњих углова троугла ABC су $\alpha = 144°$, $\beta = 24°$, $\gamma = 12°$ [**4 бода**].

4. Правоугли троуглови AMD и BMC су подударни на основу става СУС [**2 бода**], одакле је $CM = DM$ [**1 бод**]. Такође, правоугли троуглови BCM и CDN су подударни на основу става СУС [**2 бода**], одакле је $\measuredangle BCM = \measuredangle CDN$ [**2 бода**]. Означимо меру тог угла са x. Тада је $\measuredangle MCD = 90° - x$, па из троугла CDP добијамо $\measuredangle CPD = 180° - \measuredangle PCD - \measuredangle CDP = 180° - (90° - x) - x = 90°$, односно важи $CM \perp DN$ [**6 бодова**]. Тачка Q је средиште хипотенузе DM правоуглог троугла DMP, па је уједно и центар описане кружнице тог троугла. Самим тим је $PQ = DQ = MQ$, односно $DM = 2 \cdot PQ$ [**7 бодова**]. С обзиром на претходно доказану једнакост $CM = DM$, добијамо $CM = 2 \cdot PQ$, чиме је доказ завршен.



5. Посматрајмо најмањи (прост) делилац у сваком од тих 5 сложених бројева. Ако су међу тих 5 простих бројева нека два једнака, тада нека два од одабраних 5 сложених бројева имају заједнички прост фактор, па самим тим нису узајамно прости [**7 бодова**]. У супротном, свих 5 разматраних простих фактора су различити међусобно. Приметимо да сложен број чији је најмањи прост фактор једнак p износи бар $p \cdot p = p^2$ [**6 бодова**]. Најмањих 5 простих бројева су 2, 3, 5, 7 и 11 [**2 бода**], па на основу претходних разматрања следи да међу одабраним сложеним бројевима постоји број један који износи бар $11^2 = 121 > 120$ [**5 бодова**]. Контрадикција!

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
Државно такмичење из математике ученика основних школа
9. 5. 2026 – VII разред

1. Дат је седмоугао у коме су сви унутрашњи углови различити и тупи. Ако су мере свих тих углова природни бројеви дељиви са 9, одреди све могућности за највећи унутрашњи угао тог седмоугла.

2. Нека је $N=\dfrac{2^{2025}+3^{2026}}{2^{2026}+3^{2025}}$. Одреди природан број n такав да је
$$n < N < n+1.$$

3. Нека су ABC и DEC подударни троуглови, при чему је $AB = DE$, $AC = DC$, $BC = EC$ и важи $\measuredangle CAB = 60°$, $\measuredangle ABC = 45°$, $\measuredangle ACD = 30°$. Дуж DE сече дужи AB и BC редом у тачкама F и G, а тачка M је средиште дужи FG. Уколико важи $CM=\sqrt{6}\text{ cm}$, израчунај обим и површину троугла ABC.

4. Дешифруј следећи ребус (истим словима одговарају исте цифре, а различитим словима различите цифре):
$$\mathrm{LAK}^2 = \mathrm{PRELAK}.$$

5. Дата је шаховска табла 8×8 подељена на 64 поља. За 4 поља те табле кажемо да чине центрирани квадрат уколико центри тих поља чине темена квадрата чији је центар уједно и центар целе табле.
а) Докажи да се међу произвољних 17 поља табле увек могу одабрати два поља чији су центри темена неког центрираног квадрата.
б) Одреди на колико начина се може одабрати 16 поља табле тако да никоја два међу њима нису темена неког центрираног квадрата.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

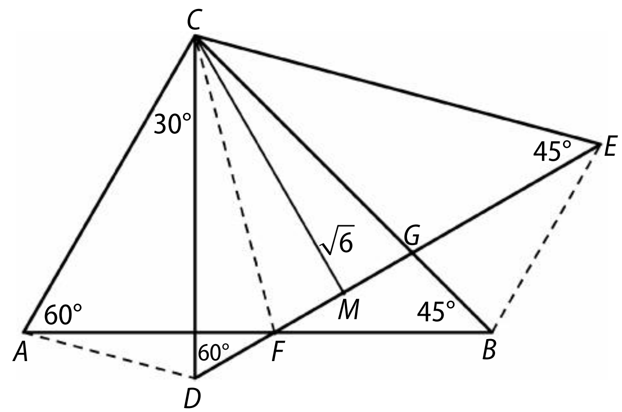
VII разред

1. Нека су $90° < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < \alpha_5 < \alpha_6 < \alpha_7 < 180°$ унутрашњи углови седмоугла. Тада је њихов збир једнак $(7 - 2) \cdot 180° = 900°$ [**2 бода**]. Како је мера сваког угла природан број дељив са 9, запишимо да је $\alpha_1 = 9 \cdot \beta_1$, $\alpha_2 = 9 \cdot \beta_2$, ..., $\alpha_7 = 9 \cdot \beta_7$. Тада за природне бројеве β_1, β_2, ..., β_7 важи $10° < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \beta_4 < \beta_5 < \beta_6 < \beta_7 < 20°$ и $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 = 100°$ [**2 бода**]. Но, тада је најмањи могући збир на левој страни једнак $11° + 12° + 13° + 14° + 15° + 16° + 17° = 98°$ [**6 бодова**]. Преосталу меру угла од $100° - 98° = 2°$ можемо додати левој страни на два начина: тако што оба степена додамо на највећи угао и добијемо $11° + 12° + 13° + 14° + 15° + 16° + 19° = 100°$ [**4 бода**] или тако што по један степен додамо на два највећа и добијемо $11° + 12° + 13° + 14° + 15° + 17° + 18° = 100°$ [**4 бода**]. На тај начин добијамо да је највећи угао $\alpha_7 = 9 \cdot 19° = 171°$ [**1 бод**] или $\alpha_7 = 9 \cdot 18° = 162°$ [**1 бод**].

2. Доказаћемо да је $n = 2$. Једноставно се доказује да је $N < 3$. Наиме, унакрсним множењем добијамо да је то еквивалентно са $2^{2025} + 3^{2026} < 3 \cdot 2^{2026} + 3^{2026}$, што је очигледно тачно јер се своди на $2^{2025} < 3 \cdot 2^{2026}$ [**6 бодова**]. Са друге стране, чињеница да је $N > 2$ је еквивалентна са $2^{2027} + 2 \cdot 3^{2025} < 2^{2025} + 3^{2026}$, што је даље еквивалентно са $3 \cdot 2^{2025} < 3^{2025}$, тј. са $2^{2025} < 3^{2024}$, а то је тачно множењем неједнакости $3^2 > 2^3$ и $3^{2022} > 2^{2022}$ [**14 бодова**].

3. Како су троуглови ABC и DEC подударни, из услова задатка важи $\measuredangle CAB = \measuredangle CDE = 60°$, $\measuredangle ABC = \measuredangle DEC = 45°$, па је $\measuredangle ACB = \measuredangle DCE = 75°$. Такође, према услову задатка важи $\measuredangle ACD = 30°$ и $CA = CD$, тј. троугао ACD је једнакокрак, па је $\measuredangle CAD = \measuredangle CDA = 75°$, одакле се лако добија $CD \perp AB$ и $\measuredangle AFD = 30°$ [**1 бод**]. Даље следи $\measuredangle DCB = 75° - 30° = 45°$, па је $\measuredangle BCE = 30°$ [**1 бод**]. Слично претходном разматрању, због услова задатка $BC = EC$ је троугао BCE једнакокрак, па имамо $\measuredangle CBE = \measuredangle CEB = 75°$ [**1 бод**]. Сада се директно добија $\measuredangle BEF = 75° - 45° = 30°$ [**1 бод**], па је троугао BEF једнакокрак и важи $BE = BF$ [**2 бода**]. Такође, због $\measuredangle EGB = \measuredangle EBG = 75°$ је троугао BEG једнакокрак и важи $BE = GE$ [**2 бода**]. Троуглови CFB и CGE су подударни на основу става СУС: $CB = CE$, $BF = BE = GE$, $\measuredangle CBF = \measuredangle CEG = 45°$ [**4 бода**]. Из ове подударности следи да је $CF = CG$, тј. троугао CFG је такође једнакокрак, па је тачка M уједно и подножје висине тог троугла, односно важи $CM \perp DE$ [**2 бода**]. Троугао CME је једнакокрако-правоугли, са катетом $CM = \sqrt{6}$ cm, па је $ME = \sqrt{6}$ cm и $CE = \sqrt{6}\text{ cm} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$ cm [**1 бод**]. Троугао CMD је половина једнакостраничног троугла, са дужом катетом $CM = \sqrt{6}$ cm, па је $DM = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ cm $= \sqrt{2}$ cm и $CD = 2\sqrt{2}$ cm [**1 бод**]. Самим тим је $DE = DM + ME = (\sqrt{2} + \sqrt{6})$ cm [**1 бод**], па је обим троугла CDE, а самим тим и њему подударног троугла ABC једнак $DE + CE + CD = (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6})$ cm [**1 бод**]. Површина троугла CDE, а самим тим и њему подударног троугла ABC једнака је

$$\frac{DE \cdot CM}{2} = (3 + \sqrt{3})\text{ cm}^2 \text{ [**2 бода**].}$$



4. *Прво решење*. Запишимо једнакост у облику

$$1000 \cdot \text{PRE} + \text{LAK} = \text{LAK}^2$$ [**2 бода**].

Уз ознаке x = PRE и y = LAK, једнакост постаје $1000 \cdot x + y = y^2$, односно $1000 \cdot x = y \cdot (y - 1)$, па $1000 \mid y \cdot (y - 1)$ [**2 бода**]. Како је $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ и како су y и $y - 1$ узајамно прости, то 8 дели тачно један од бројева y и $y - 1$ [**2 бода**] и 125 дели тачно један од бројева у и $y - 1$ [**2 бода**]. Стога, поделићемо разматрање на четири случаја:

1°) $8 \mid y$ и $125 \mid y$, но тада је $y = 000$ што није могуће јер различитим словима одговарају различите цифре [**2 бода**].

2°) $8 \mid y - 1$ и $125 \mid y - 1$, тада је $y = 001$ што опет није могуће као у претходном случају [**2 бода**].

3°) $8 \mid y$ и $125 \mid y - 1$, тада је $y - 1$ непаран, па су могућности за $y - 1$ следеће: 125, 375, 625 и 875. Како ниједан од бројева 126, 376, 626 и 876 није дељив са 8, ни у овом случају немамо решење [**3 бода**].
4°) $8 \mid y - 1$ и $125 \mid y$, тада је y непаран, па су могућности за y следеће: 125, 375, 625 и 875. Од бројева 124, 374, 624 и 874 је само 624 дељив са 8, па је једина опција $y = 625$ [**3 бода**].
На крају, директном провером, из $625^2 = 390625$ добијамо да је P = 3, R = 9, E = 0, L = 5, A = 2, K = 5 [**2 бода**].

Друго решење. Како је последња цифра обе стране једнака K, то K може бити нека од цифара 0, 1, 5 или 6 [**2 бода**].
1°) Ако је K = 0, онда $100 \mid LAK^2$, док 100 не дели PRELAK јер је A различито од K, па у овом случају нема решења [**2 бода**].
2°) Ако је K = 1, тада су последње две цифре броја LAK^2 заправо последње две цифре $(10A + 1)^2 = 100A^2 + 20A + 1$. Но, последње две цифре морају бити A1 (због PRELAK), а то је могуће само у случају A = 0. Коначно, онда је $LAK^2 = (100L + 1)^2 = 10000L^2 + 200L + 1$, па су његове последње три цифре задње три цифре броја $200L + 1$, а оне су једнаке L01 (због PRELAK). То је могуће само у случају да је L = 0, што је у супротности са чињеницом да је L различито од A, па ни у овом случају нема решења [**4 бода**].
3°) Ако је K = 5, тада је двоцифрени завршетак LAK^2 заправо двоцифрени завршетак $(10A + 5)^2 = 100A^2 + 100A + 25$, а то је 25. Одатле је A = 2. Коначно, онда је $LAK^2 = (100L + 25)^2 = 10000L^2 + 5000L + 625$, а његов троцифрени завршетак је 625, па је L = 5. Провером утврђујемо да је $625^2 = 390625$, па је P = 3, R = 9, E = 0, L = 5, A = 2, K = 5 једно решење задатка [**5 бодова**].
4°) Ако је K = 6, тада је двоцифрени завршетак LAK^2 заправо двоцифрени завршетак $(10A + 6)^2 = 100A^2 + 120A + 36$, што треба да износи A6. Директном провером по свим A, видимо да је ово једино могуће у случају A=7. Коначно, онда је $LAK^2 = (100L + 76)^2 = 10000L^2 + 15200L + 5776$, а његов троцифрени завршетак мора бити L76. Поново провером по свим L, закључујемо да је то једино могуће за L = 3. Но, $376^2 = 141376$, па је P = E = 1, што је у супротности са условима задатка [**7 бодова**].
Дакле, једино решење је $625^2 = 390625$, тј. P = 3, R = 9, E = 0, L = 5, A = 2, K = 5.

5. Постоји тачно 16 дисјунктних четворки поља шаховске табле чији центри чине темена једног центрираног квадрата. Заиста, узимајући било које од 16 поља у доњој левој подтабли 4×4 и ротирајући га за 90° око центра целе табле три пута узастопно, добијамо четири поља која чине центрирани квадрат [**6 бодова**]. На основу Дирихлеовог принципа, ако посматрамо 17 (или више) поља табле, нека два поља припадају истој четворки јер тих 16 дисјунктних четворки темена у унији чине свих 64 поља табле, па су самим тим њихови центри темена неког центрираног квадрата [**6 бодова**]. С друге стране, ако желимо да одаберемо 16 поља табле тако да центри ниједна два међу њима нису темена неког центрираног квадрата, они морају бити одабрани сваки из тачно једног од могућих 16 дисјунктних центрираних квадрата. Зато за свако од 16 поља имамо 4 могућности, па је решење у делу б) 4^{16} [**8 бодова**].

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Државно такмичење из математике ученика основних школа
9. 5. 2026.

VIII разред

1. а) Ако су a, b, c три реална броја таква да важи $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$, докажи да је $a=b=c$.

б) Одреди реалне бројеве x, y за које важи

$$\frac{x}{3y}=\frac{y}{2x-5y}=\frac{6x-15y}{x}$$

и израз $-4x^2+36y-8$ има максималну вредност.

2. Одреди број различитих уређених тројки (a, b, c) природних бројева таквих да a, b, c припадају скупу $\{1, 2, 3, ..., 2025, 2026\}$ и важи

$$7 \mid a^2+b^2+c^2.$$

3. Нека је O центар описане кружнице оштроуглог троугла ABC у коме важи $AB < AC$. Означимо са E и F редом пресечне тачке праве AO и нормала из B и C на симетралу AD ($D \in BC$) унутрашњег угла код темена A. Докажи да су троуглови DEF и ABC међусобно слични.

4. Правоугаоник димензија 5×6 подељен је на 8 правоугаоника чије су странице паралелне страницама почетног правоугаоника, а дужине страница су природни бројеви. Одреди:

а) најмањи; б) највећи

број међусобно подударних правоугаоника који могу учествовати у тој подели.

5. Одреди све просте бројеве p и природне бројеве m и n такве да је

$$p^n+3600=m^2.$$

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VIII разред

1. а) Приметимо да ниједан од бројева a, b, c није нула. Унакрсним множењем добијамо $a^2 = bc$, $b^2 = ca$, $c^2 = ab$. Из прве две једнакости имамо $a^2 \cdot ca = bc \cdot b^2$, односно $a^3 = b^3$, па и $a = b$. Аналогно, из друге и треће једнакости, добијамо и $b = c$, па следи да је $a = b = c$ [**6 бодова**].

б) Из поставке важи $\frac{x}{3y} = \frac{3y}{6x-15y} = \frac{6x-15y}{x}$, па примењујући део а) закључујемо $x = 3y = 6x - 15y$, што се своди на $x = 3y$ [**6 бодова**]. У том случају израз

$$-4x^2 + 36y - 8 = -(4x^2 - 12x + 8) = -(2x-3)^2 + 1 \text{ [6 бодова]}$$

има максималну вредност 1 када је $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ [**2 бода**].

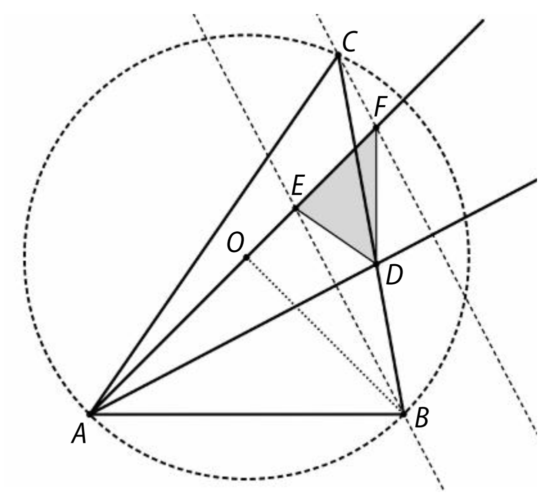
2. У следећој табели дати су остаци природног броја n и његовог квадрата n^2 при дељењу са 7 [**3 бода**].

n	0	1	2	3	4	5	6
n^2	0	1	4	2	2	4	1

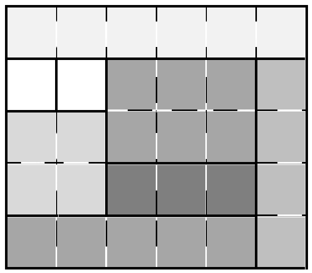
Да бисмо добили три потпуна квадрата чији је збир дељив са 7, они морају давати остатке 0, 0, 0 или 1, 2, 4 [**4 бода**]. У првом случају то значи да је сваки од бројева a, b, c дељив са 7 [**1 бод**]. Таквих бројева мањих или једнаких 2026 има 289 [**1 бод**], па је број тражених уређених тројки 289^3 [**2 бода**]. У другом случају ћемо пребројати колико има бројева мањих или једнаких 2026 чији квадрат даје остатке 1, 2 и 4. Ако n^2 даје остатак 1, то значи да n даје остатак 1 или 6 [**1 бод**], а таквих бројева има 579 [**1 бод**]. Ако n^2 даје остатак 2, то значи да n даје остатак 3 или 4 [**1 бод**], а таквих бројева има 579 [**1 бод**]. Ако n^2 даје остатак 4, то значи да n даје остатак 2 или 5 [**1 бод**], а таквих бројева има 579 [**1 бод**]. Коначно, морамо урачунати све пермутације остатака 1, 2 и 4 на местима за a, b, c, тако да је број уређених тројки у овом случају $6 \cdot 579^3$ [**2 бода**]. Коначно решење је

$$289^3 + 6 \cdot 579^3 = 1\,188\,764\,803 \text{ [1 бод]}.$$

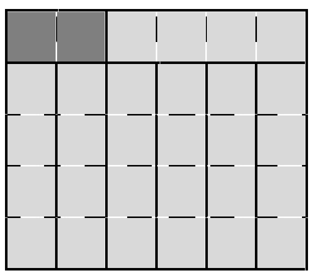
3. Нека су мере одговарајућих унутрашњих углова датог троугла α, β, γ. Како је $BE \perp AD$, то је $\measuredangle ABE = 180° - 90° - \frac{\alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$ [**1 бод**]. Угао $\measuredangle AOB$ је централни угао за тетиву AB описане кружнице троугла ABC, па је једнак двоструком периферијском углу над том тетивом, тј. важи $\measuredangle AOB = 2\measuredangle ACB = 2\gamma$ [**2 бода**]. Троугао AOB је једнакокрак ($AO = BO$ као полупречници описане кружнице), па је $\measuredangle OAB = \measuredangle OBA = \frac{180^\circ - \measuredangle AOB}{2} = \frac{180^\circ - 2\gamma}{2} = 90^\circ - \gamma$ [**2 бода**]. Одавде сада рачунамо $\measuredangle AEB = 180° - \measuredangle ABE - \measuredangle BAE = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(90^\circ - \gamma\right) = \frac{\alpha}{2} + \gamma$ [**2 бода**]. Такође, важи $\measuredangle ADB = 180° - \measuredangle ABD - \measuredangle BAD = 180° - \beta - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} + \gamma$ [**2 бода**]. Како смо добили $\measuredangle ADB = \measuredangle AEB = \frac{\alpha}{2} + \gamma$, четвороугао $AEDB$ је тетиван [**5 бодова**]. Из ове тетивности је $\measuredangle AED = 180° - \measuredangle ABD = 180° - \beta$ [**2 бода**], па је $\measuredangle DEF = 180° - \measuredangle AED = \beta$ [**2 бода**]. На потпуно исти начин се доказује да је $\measuredangle DFE = \gamma$ (тетивност четвороугла $ACFD$), па је $\measuredangle EDF = \alpha$, што значи да троуглови ABC и DEF имају једнаке све одговарајуће парове углова и самим тим су слични [**2 бода**].



4. а) Претпоставимо да не постоје два подударна правоугаоника који се користе у подели. Тада је 8 правоугаоника са минималном површином димензија 1×1, 1×2, 1×3, 1×4, 2×2, 1×5, 1×6, 2×3 [**5 бодова**]. Укупна површина ових правоугаоника је $1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 = 31$, што је више од површине почетног правоугаоника. Одатле закључујемо да у подели морају постојати бар 2 подударна правоугаоника [**3 бода**]. Пример поделе са тачно 2 подударна правоугаоника дат је испод [**4 бода**].



б) Претпоставимо да су свих 8 правоугаоника међусобно подударни. То би значило да је укупна њихова површина дељива са 8. Међутим, правоугаоник који делимо је површине 30, што није дељиво са 8 [**4 бода**]. Пример поделе са 7 подударних правоугаоника дат је испод [**4 бода**].



5. Почетну једначину можемо трансформисати на следећи начин $p^n = m^2 - 60^2 = (m - 60)(m + 60)$ [**2 бода**]. Како је p прост број, сваки од чинилаца на десној страни мора бити степен од p: $m - 60 = p^a$, $m + 60 = p^b$, где су a, b ненегативни цели бројеви за које важи $b > a$, $a + b = n$ [**3 бода**]. Одузимањем ових једначина закључујемо

$$120 = (m + 60) - (m - 60) = p^b - p^a = p^a(p^{b-a} - 1) \text{ [3 бода]}.$$

Ако је $a = 0$, закључујемо да је $m = 61$, $p^b = 121$, односно $p = 11$, $b = 2$ и $n = 2$ [**3 бода**].

Ако $a \neq 0$, онда p мора бити прост фактор од 120, тј. $p \in \{2, 3, 5\}$ [**1 бод**].

Ако је $p = 2$, тада је $2^a = 8$ и $2^{b-a} - 1 = 15$. Одавде закључујемо да је $a = 3$, $b = 7$ и онда $n = 10$, $m = 68$ [**3 бода**].

Ако је $p = 3$, тада је $3^a = 3$ и $3^{b-a} - 1 = 40$. Из друге једначине закључујемо да у овом случају нема решења [**2 бода**].

Ако је $p = 5$, тада је $5^a = 5$ и $5^{b-a} - 1 = 24$. Одавде закључујемо да је $a = 1$, $b = 3$ и онда $n = 4$, $m = 65$ [**3 бода**].

Дакле, сва решења су $(p, m, n) \in \{(2, 68, 10), (5, 65, 4), (11, 61, 2)\}$.