Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

19. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

7. и 8. април 2026. године

- МАРКИНГ ШЕМЕ -

П1: МАРКИНГ ШЕМА

1. Доказ непостојања пермутације са 2026 различитих остатака 2

2. Конструкција пермутације π скупа $\{0, 1, 2, ..., 1012\}$ такве да $i\pi(i)$ даје 1012 различитих остатака при дељењу са 1013 2

3. Идеја о упаривању парних остатака са парним, и непарних са непарним, до на један непаран остатак. 1

4. Крај доказа - Конструкција пермутације тако да $i\pi(i)$ даје 2025 различитих остатака 2

П2: МАРКИНГ ШЕМА

1. Тврђење инверзије у A пречника $\sqrt{AH \cdot AD}$ 1

2. Тврђење задатка након инверзије 2

3. Увођење тачке S 2

4. Свођење потенцијом на цикличност $RPSF$ 1

5. Доказ цикличности $RPSF$ 1

Тврђење леме о коаксиалности у овој конкретној ситуацији . . . 1 (неадитиван поен)

П3: МАРКИНГ ШЕМА

1. Горња граница: Конструкција примера 1

2. Доказ примера 1

3. Дефиниција путева 1

4. Доказ постојања путева 2

5. Доња граница: пресеци линија и процена $b \geq \binom{n}{2}$ 1

6. Ојлерова формула и завршни закључак 1

П4: МАРКИНГ ШЕМА

1. Пример графа у ком Маја испуњава свој циљ 1
Даје се за формално описан пример графа из решења, заједно са доказом да у њему Маја може да испуни свој циљ.

2. Тврдња да су сви графови у којима Маја испуњава свој циљ "изоморфни" 1

Даје се за формално наведену тврдњу да су сви графови који Маји омогућавају да испуни свој циљ "изоморфни" са горе наведеним, односно да постоји ренумерација чворова која један претвара у други.

3. Дефиниција функције f + добра дефинисаност 1
Даје се за формално наведену дефиницију функције f (која враћа Мајин одговор на Костине потезе), као и доказ да ово даје добро дефинисану функцију.

4. Бијективност функције f 1
Даје се за потпуни доказ да је функција f бијективна (инјективна и сурјективна).

5. Регуларност графа 1
Даје се за доказ да граф у ком Маја може испунити свој циљ мора бити регуларан (сваки чвор има исти број грана које улазе у њега и излазе из њега).

6. Однос $f^k(1)$ и 1 у зависности од парности броја k 1
Даје се за доказ да $f^k(1)$ побеђује чвор 1 ако и само ако је k парно (и мање од најмањег $m \in \mathbb{N}$ за које је $f^m(1) = 1$).

7. Постоји само један циклус у f 1
Даје се за доказ да пермутација f има само један циклус.

8. Рачунање броја тражених графова . . . . −1
Одузима се уколико је број тражених графова погрешно израчунат.

П5: МАРКИНГ ШЕМА

1. Инјективни случај: прелаз на мултипликативност до константе 1
Добија се поен за правилно добијање релације $f(y)f(z) = f(\sqrt{yz})^2$ или $f(1)f(xy) = f(x)f(y)$ или неке друге еквивалентне једначине, за све $x, y > 0$.

2. Инјективни случај: релација за збир 1
Добија се 1 поена за правилно добијање релације $f(1)f(u+v) = f(u) + f(v)$, за све $u, v > 0$.

3. Инјективни случај 1
Доказ да је f адитивна и $f(1) = 1$.

4. Инјективни случај: Крај доказа 1

5. Неинјективни случај: добијање релације $f(kx) = f(x)$ 1
Добија се поен за правилно уочавање да из постојања различитих $a, b > 0$ са $f(a) = f(b)$ следи постојање броја $k > 1$ таквог да је $f(kx) = f(x)$, за све $x > 0$.

6. Неинјективни случај: доказ константности функције 1
Добија се поен за коректно извођење да из релације $f(kx) = f(x)$ следи да постоји цео интервал фактора $\lambda > 1$ за које је $f(\lambda x) = f(x)$.

7. Завршетак неинјективног случаја 1
Добија се поен за доказ да је f константна и правилно уврштавање константне функције у задати услов и добијање јединог могућег решења $f(x) = 2$.

Напомена. Ако је кандидат добио тачан коначан одговор, али доказ није у потпуности затворен, тај одговор сам за себе не носи посебан поен, већ се бодује само кроз одговарајуће делове решења. Тачка 1 се бодује само ако се ученик експлицитно налази у неињективном случају.

Укупно: 7 поена.

П6: МАРКИНГ ШЕМА

1. Експлицитно посматрање $a^2+b^2+la+kb+1-Mab=0$ или посматрање еквивалентне једначине 1
За овај поен није довољно посматрати дељивост $ab \mid a^2+b^2+la+kb+1$

2. Доказ да $d \mid r^2+s^2+lr+ks+1-Mrs$ уз доказ да постоји коначно много оваквих M 2

3. Конструисање бесконачног низа различитих решења 2

4. Завршетак доказа уз аргумент типа Дирихлеовог принципа и транслирање низа уназад 2

Напомена. Поени се не додељују за специјалне случајеве вредности k, l, r, s.