

број: 123/3 година: 2025/26.

# Тангента

ЧАСОПИС ЗА МАТЕМАТИКУ И РАЧУНАРСТВО ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Београд, 2026.

**ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ**  
**„ТАНГЕНТА”- часопис за математику и рачунарство**  
**за ученике средњих школа.**

Излази у четири броја током школске године.  
Адреса: „Тангента”, Друштво математичара Србије,  
Поштански фах 355, 11000 Београд  
Телефон: (011)3036-818

Уплате на жиро рачун:  
*Друштво математичара Србије* – број 340-13536-62.  
На уплатници као врху уплате назначити „За Тангенту”.

---

**Главни и одговорни уредник:** Војислав Петровић, Нови Сад  
*e-mail: vojpet@gmail.com*

**Технички уредник:** Ненад Вуловић, Крагујевац  
*e-mail: vlnenad@gmail.com*

---

**Чланови редакције:**

Александар Миленковић, Крагујевац	Ненад Стојановић, Крагујевац
Александар Купусинац, Нови Сад	Мирјана Катић, Београд

---

Сва права умножавања, прештампавања и превођења задржава Друштво математичара Србије

Штампа: **Донат Граф** д.о.о, Београд

На основу члана 23. став 2, тачка 9. Закона о порезу на додатну вредност („Регистар прописа”, број 11 – новембар 2004.) часопис се сматра серијском публикацијом од посебног интереса за науку и опорезије се по стопи од 8%. Корице freerik.

CIP – Каталогизација у публикацији  
Народна библиотека Србије, Београд

51

**ТАНГЕНТА** : часопис за математику и рачунарство за ученике средњих школа : часопис за математику и рачунарство Друштва математичара Србије / главни и одговорни уредник Војислав Петровић. - 1995/1996, бр. 1- . - Београд : Друштво математичара Србије, 1995- (Београд : Донат граф). - 24 cm

Тромесечно.  
ISSN 0354-656X = Тангента  
COBISS.SR-ID 103642375

## 200 ГОДИНА ГЕОМЕТРИЈЕ ЛОБАЧЕВСКОГ

*Павле Млагеновић, Војислав Пејровић*

Ове 2026. године навршавају се два века од открића неевклидске геометрије. Революционарно откриће Лобачевског<sup>1</sup> и његовог савременика Бојаиа<sup>2</sup> једно је од најзначајнијих у историји математике.

Све је почело још у IV веку пре нове ере у античкој Грчкој.

### Пети постулат

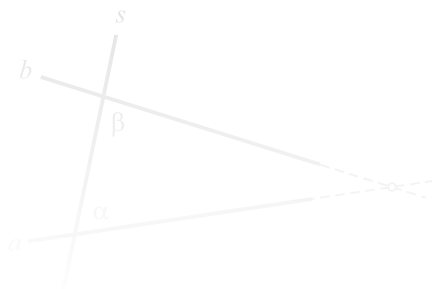
Еуклид<sup>3</sup> је у IV веку п.н.е. написао дело *Елементи* (грч. Στοιχία) у коме је први пут у историји нека математичка дисциплина заснована аксиоматски. Наиме, утемељена је на одређеном броју тврђења која се не доказују и која се унапред прихватају као тачна. Та тврђења је Еуклид звао аксиомама и постулатима. Сва остала тврђења су доказивана.

На истом основу је заснована и савремена математика, с тим што се не прави разлика између аксиома и постулата, све су аксиоме.

Додајмо да је књига Елементи доживела преко пет стотина издања на разним језицима.

Еуклидова аксиоматика геометрије имала је 14 тврђења која се нису доказивала, пет постулата и девет аксиома. Притом, *πεντη ἰοστυλαίη* је гласио овако:

**V постулат.** *Нека две њраве у равни ѡресечене ѡрећом, сечицом, образују ѡар унуѡрашњих уѡлова који су са исте сѡране сечице и чији је збир мањи од равнѡи уѡла. Тада се ѡве ѡраве секу и ѡресечна ѡачка је са оне сѡране сечице са које су уочени уѡлови.*



## НАГРАДНИ ЗАДАЦИ

*Александар Миленковић, Ненаг Ситојановић*

У рубрици „Наградни задаци” у сваком броју дајемо 20 задатака који су подељени у две групе. Задаци из прве групе су подељени по разредима и намењени су пре свега ученицима који се такмиче у Б категорији, док су задаци из друге групе намењени ученицима А категорије и нису подељени по разредима.

Позивамо све читаоце да шаљу предлоге задатака које сматрају посебно интересантним, као и сугестије које ће нам помоћи при састављању рубрике. Такође, позивамо све ученике да на адресу редакције шаљу откуцана или читко исписана решења постављених задатака; сваки задатак на засебном листу. Исто важи и за предлоге задатака. У наредним бројевима часописа публикују се комплетна решења раније постављених задатака, а на крају циклуса најуспешнији решавачи се награђују.

Предлоге и решења задатака слати на адресу:

**„Тангента” – за рубрику „Наградни задаци”**  
**Природно-математички факултет**  
**Радоја Домановића 12**  
**34000 Крагујевац**

или електронском поштом (искључиво pdf формат) на адресу  
[tg\\_nagradnizadaci@yahoo.com](mailto:tg_nagradnizadaci@yahoo.com)

најкасније до 15.04.2026.

Прва група

*Први разред*

M2174. Висине  $AD$  и  $BE$  троугла  $ABC$  имају дужине  $AD = 3$  *cm* и  $BE = 6$  *cm*. Доказати да је дужина треће висине  $CF$  већа од 2 *cm*.

M2175. Доказати да не постоје природни бројеви  $m$  и  $n$  такви да је

**Hello, World!**  
**Апроксимативни алгоритми за једнодимензионални**  
***bin-packing* проблем**

**Александар Кујусинац**  
**Факултет техничких наука, Нови Сад**

## 1. Увод

*Bin-packing* проблем представља један од најпознатијих проблема комбинаторне оптимизације, који има широку примену у инжењерству (сечење цеви, резање дрвене грађе, сечење каблова, пуњење теретних вагона, резање папира, распоређивање реклама у паузама између телевизијских или радио емисија, прављење финансијског плана и сл.). У пракси се разликују три врсте *bin-packing* проблема – једнодимензионални, дводимензионални и тродимензионални. У наставку овог текста биће разматран једнодимензионални *bin-packing* проблем.

Проблем се састоји у распоређивању скупа елемената (енг. *item*) задатих једнодимензионалних величина (нпр. дужина или тежина) у минималан број контејнера фиксног капацитета (енг. *bin*), при чему збир величина распоређених елемената у сваком контејнеру не сме прећи његов капацитет.

Овај проблем је *NP*-тежак и своди се на проналажење оптималне пермутације задатих елемената, јер различите пермутације елемената доводе до различитих начина паковања у контејнере. Алгоритам који би детаљно претражио све пермутације имао би сложеност  $O(n!)$ , с обзиром на то да се од  $n$  различитих елемената може добити  $n!$  различитих пермутација. Такав алгоритам не би могао пронаћи оптимално решење у разумном временском року, па се у пракси примењују различите хеуристике и апроксимативни алгоритми.

У пракси најчешће се разматра једнодимензионални *bin-packing* проблем који се бави распоређивањем елемената различите дужине у контејнере фиксне дужине  $L$ ,  $L > 0$ , којих на располагању имамо произвољан број, тј. онолико колико нам затреба.

Секвенца елемената које треба распоредити у контејнере се означава са  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , где важи  $a_i > 0$  и  $a_i \leq L$  за  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Елементе  $a_i$  распоређујемо у секвенцу контејнера коју означавамо са  $(B_1, B_2, \dots, B_m)$ , где

## ПРЕДЛОЗИ ЗА ТРЕЋИ ПИСМЕНИ ЗАДАТАК

*Мирјана Катић*

### ГИМНАЗИЈЕ, СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

#### I РАЗРЕД

*Круги; четвороугао; конструкције; рационални алгебарски изрази*

1. Конструисати троугао  $ABC$  такав да је страница  $AC$  подударна датој дужи  $b$ , страница  $AB$  подударна датој дужи  $c$ , и тежишна дуж из темена  $A$  подударна датој дужи  $t_a$ .

2. Ако су  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  такви да је  $abcd \neq 0$  и да је  $a = b - c$ ,  $b = c - d$ ,  $c = d - a$ , одредити вредност израза

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}.$$

3. Ако се дијагонале тангентног четвороугла секу у центру уписане кружнице, доказати да је тај четвороугао ромб.

4. Дужине кракова  $AD$  и  $BC$  трапеза  $ABCD$  редом су једнаке  $6 \text{ cm}$  и  $8 \text{ cm}$ . У трапез се може уписати кружница, а средња линија  $MN$  трапеза дели трапез на два дела  $ABMN$  и  $MNCD$ , чије се површине односе као  $4 : 3$ . Колике су дужине основица трапеза  $AB$  и  $CD$ ?

5. Ако је полином  $P(x) = x^5 - 5x^4 + ax^3 - x^2 + bx + c$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , дељив полиномом  $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ , колико је  $a^2 - b^2 + c^2$ ?

#### II РАЗРЕД

*Системи квадранних једначина; ирационалне једначине и неједначине; експоненцијална и логаритамска функција*

1. Колики је збир целобројних решења неједначине  $3x + 4\sqrt{5^4 - x^2} > 0$ ?

2. Колики је производ свих реалних решења једначине

## МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА

### 3. Међународни летњи камп из математике - IMSC 2025. Пекинг, Кина

*Теодор фон Бурі, Миљан Кнежевић, Вукашин Панџелић*

Трећи по реду Међународни летњи камп из математике (IMSC 2025) одржан је од 18. јуна до 12. јула 2025. године у Пекингу, у Народној Републици Кини. Ова престижна међународна манифестација окупила је велики број изузетно даровитих средњошколаца из различитих делова света (преко 250 ученика, сврстаних у 42 тима), њихових наставника - руководилаца, као и велики број истакнутих научника, са циљем интензивне припреме ученика за највиша математичка такмичења, пре свега за Међународну математичку олимпијаду (ММО), која је прошле године одржана у средином јула месеца у Аустралији.



Ученици и њихови лидери били су смештени у више него изванредном конференцијском центру Тангјун (Tangjun), који је обезбедио врхунске услове за рад, предавања, анализе задатака и свакодневне академске активности. Изузетна организација, пажљиво осмишљен распоред рада и инспиративно окружење допринели су томе да камп протекне у атмосфери озбиљног, али подстицајног и пријатељског академског рада.

Програм кампа био је изузетно интензиван и систематично осмишљен. Током прве и друге недеље ученици су имали свакодневне припреме, које су држали математичари из свих крајева света.

Осим тога, радили су, током обе припремне недеље, по два пробна теста (MOCK-TESTS) из сваке од четири основне области олимпијске математике – алгебре, геометрије, комбинаторике и теорије бројева. Сваки тест садржао је по три задатка, у потпуности у стилу ММО, са јасно дефинисаним критеријумима бодовања и нагласком на прецизност и строгост доказа.

ПИТАГОРИНА ТЕОРЕМА И СЛИЧНОСТ

*Борђе Дујишија, Београд*

Познато је да постоје више од 350 доказа чувене Питагорине теореме који се заснивају на различитим идејама. Почев од Еуклидових геометријских, па до алгебарских, аналитичких, тригонометријских, чак и оних који користе апарат диференцијалног рачуна.

У овом чланку, представићемо везу између сличности троуглова и Питагорине теореме. Штавише, показаћемо да су основна теорема о сличности троуглова и Питагорина теорема еквивалентна тврђења. То значи да из једног тврђења следи друго и обратно.

Постоји више дефиниција сличности троуглова. Једна од најчешће коришћених је следећа.

**Дефиниција.** Два троугла су слична ако и само ако имају једнаке одговарајуће углове, тј.  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  ако и само ако је

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A', \sphericalangle B = \sphericalangle B', \sphericalangle C = \sphericalangle C'.$$

Из дефиниције следи тврђење чији доказ остављамо читаоцима.

**Теорема 1.** (основна теорема о сличности троуглова) *Два троугла су слична ако и само ако су им одговарајуће стране пропорционалне, тј.  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  ако и само ако је*

$$AB : A'B' = BC : B'C' = AC : A'C'.$$

□

**Теорема 2.** *Из основне теореме о сличности троуглова следи Питагорина теорема.*

*Доказ.* Нека је  $ABC$  правоугли троугао у којем је  $\sphericalangle C = 90^\circ$ ,  $AB = c$ ,  $BC = a$  и  $AC = b$  (сл. 1).



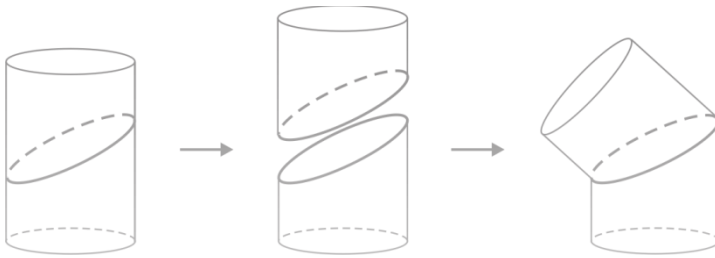
## МАЈСТОР И МАТЕМАТИЧАР

*Алија Муминаџић, Фредериксберџ (Данска)*

Један дан наиђе ми мајстор који се бави сечењем и заваривањем цеви и затражи помоћ.

– 'Ајде профо, не знам како с овим да изађем на крај. Шаблони (модели) које имам нису за овај случај.

Радило се о томе да једну кружну цилиндричну цев треба згодно пресећи, тако да добијени делови, након варења, образују жељени угао као на сл. 1.



Сл. 1.

Под углом између делова цеви заварених „на лакат“ подразумева се угао између оса делова и то онај већи, уколико оба нису права. Лако се види да је то допуна угла између нормалних пресека делова до равног угла (сл. 2(a)).



Сл. 2.

## НАШ ГОСТ

### ПРОСВЕТИТЕЉ

Наш садашњи гост, целог свог радног века, као да је следио проглас Доситеја Обрадовића: „Књиге, браћо моја, књиге, а не звона и прапорци!“<sup>1</sup>. Овај пут ради се о образовању и просвећивању у математици.

Далеке 1973. године основао је чувени Архимедес – Клуб младих математичара који и дан данас ради „пуном паром“ као Математичко друштво Архимедес). Кроз Архимедесове школе (сталну током шк. године, зимске и летње) прошло је небројено много основаца и средњошколаца од којих је не мали број касније стекао светску славу и углед.

Осим семинара, предавања, такмичења и других манифестација, Архимедес је брижљиво неговао и издавачку делатност, у оквиру које је објављено близу 500 наслова из најразличитијих области математике. Уз то, створена је и јединствена (специјализована) библиотека са готово тридесет хиљада књига и преко пет хиљада часописа (све то углавном на страним језицима, највише на руском).



Погађате, у питању је професор Богољуб Боги Маринковић – наш математички Доситеј.

По дипломирању на Природно-математичком факултету у Београду, једно време сте радили као наставник математике и физике у неколико средњих школа на територији тадашње Југославије.

Да ли сте још тада приметили да је неопходно да се тадашњи систем образовања у математици унапреди, поготово кад су у питању напреднији ученици?

У уводу сте укратко навели углавном оно чиме се бавио и чиме се бави „Архимедес“, што је, како се то каже, само једна страна медаље. Осим тога, било је пуно других активности и додатног ангажовања.

Што се тиче биографије и школовања, почећу од најранијих дана.

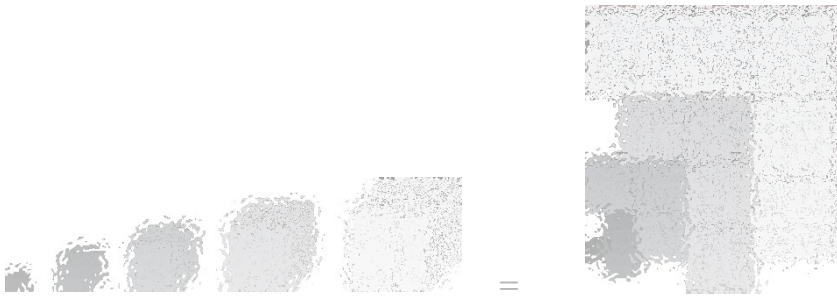
Рођен сам 1935. године у селу Бзовику, тада Општина Рудино, срез

## ДОКАЗ БЕЗ РЕЧИ

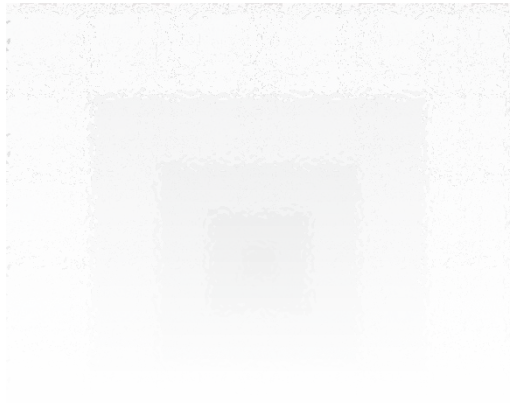
### *Ненад Стојановић*

Доказ без речи, назив је за методу визуелног „доказивања“ математичких тврђења. Појавио се у прошлом веку и брзо стекао широку популарност. Представља спој уметности и математике. Бројне речи и ознаке замењује слика која својим садржајем све објашњава.

### Збир кубова у три корака



$$S = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$$





## ШАХОВСКА СТРАНА

### СЛАВНИ ВРШЧАНИН

Борислав (Бора) Костић рођен је у Вршцу 1887. године који је тада био у склопу Аустроугарске. У родном граду завршио је основну школу и гимназију и већ у том узрасту показао огроман талент за шах.

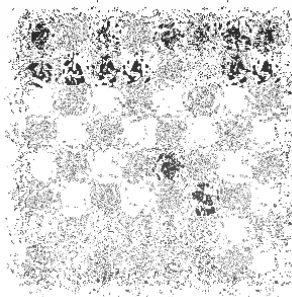
Шаховску каријеру је започео током студија у Будимпешти, а наставио у Бечу и Карловим Варима и касније у Северној и Јужној Америци. Након блиставог другог места на турниру у Њујорку, одмах иза Капабланке, постао је кандидат за првака света. Дошло је до меча с феноменалним Капом у којем није имао шанси и био убедљиво поражен.

Чика Бора, како су га пријатељи звали, обишао је, као шахиста, читав свет. Играо је шах на свим континентима, на самом екватору у Индији и Кенији, с индијским махараџом на врховима Хималаја, против локалног поглавице на Суматри итд. Оправдано су га назвали амбасадором шаха.

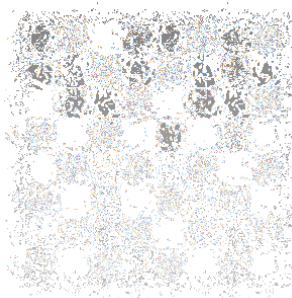
Због својих бројних успеха, Бора Костић је стекао титулу првог југословенског велемајстора.

У сусретима са слабијим играчима, чика Бора је користио свој ефикасни „лек“. У партији с извесним Милоком (бели) из 1912, после 1. e4 e5 2. Sf3 Sc6 3. Le4 „забањује удичу“ са 3. ... Sd4.

и сурова казна. 4. ... Dg5! 5. Sf7 Dg2 6. Tf1 De4+ 7. Le2 Sf3 мат.



Штајнер (црни) се „увезао“ и по d-линији и по дијагонали h4-d8.

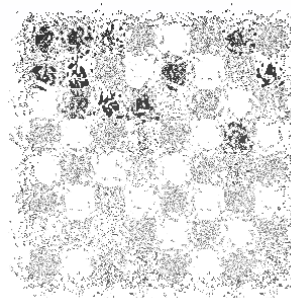


Бора је неумољив 1. Lf6 Lf6 2. Lh3 Te7 3. Td6 Dc7 4. Tad1 Td8 5. Dd2 Le8 6. Tf6 и црни предаје јер остаје без фигуре.

Бора Костић је био један од врхунских тактичара. Ево неколико његових остварења.



6. ... Td1+ 7. Tb1 Tbb1 мат. 2. ... Tab8 3. Df3 Tb1+! 4. Tb1 Df3 и бели предаје.



Бели (Бора Костић) је на потезу, а претходно је жртвовао ловца за напад у партији с Доналдсоном из 1915. године на турниру у Колорадо Спрингсу (САД).

Изгледа као да се црни одбранио, с обзиром да белом „висе“ две фигуре, дама на g4 и ловац на d5.

Тако изгледа, али чика Бора има „кеца у рукаву“. 1. Se4!! Tg4 2. Sf6+! Df6 3. e7+ Le6 (не спасава 3. ... cd5 (De6) 4. e8D+ с матом) 4. e8D+ Df8 5. Df8 мат.

### НАГРАДНИ ЗАДАТАК



- 1 *Павле Младеновић, Војислав Пејровић*,  
200 година геометрије Лобачевског
- 13 *Александар Миленковић, Ненад Стојановић*, Наградни задаци
- 34 *Александар Кујусинац*, Hello World!  
Апроксимативни алгоритми за једнодимензионални *bin-packing* проблем
- 40 *Мирјана Кајић*, Предлози за трећи писмени задатак
- 47 *Теодор фон Бурџ, Миљан Кнежевић, Вукашин Павићелић*,  
3. Међународни летњи камп из математике - IMSC 2025.
- 52 *Ђорђе Дујошија*, Математичке цртице - Питагорина теорема и сличност
- 56 *Алија Муминаџић*, Математичке цртице - Мајстор и математичар
- 59 *Војислав Пејровић*, Наш гост - Просветитељ
- 71 *Ненад Стојановић*, Доказ без речи
- 72 Наградни шаховски задатак
- 73 *Војислав Пејровић*, Шаховска страна, Славни вршчаници