

Министарство просвете Републике Србије  
Друштво математичара Србије

19. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

7. април 2026. године

Први дан

1. Колико највише различитих остатака при дељењу са 2026 могу давати елементи скупа

$$\{\pi(1), 2\pi(2), 3\pi(3), \dots, 2026\pi(2026)\},$$

при чему је  $\pi$  произвољна пермутација скупа  $\{1, 2, \dots, 2026\}$ .

2. Дат је оштроугли троугао  $ABC$ , с тим да је  $AB < AC$ . Нека су  $D$  и  $E$  подножја висина из темена  $A$  и  $B$ , редом,  $H$  ортоцентар троугла  $ABC$  и нека је  $F$  пресечна тачка симетрале унутрашњег угла у темену  $A$  тог троугла са правом  $BC$ . Пресек правих  $AF$  и  $BE$  је тачка  $I$ . Ако се кружнице описане око троуглова  $BHC$  и  $DFI$  секу у тачкама  $M$  и  $P$ , доказати да је четвороугао  $AEMP$  тетиван.

3. Дат је правилан  $2n$ -тоугао  $A_1A_2 \dots A_{2n}$ ,  $n \geq 3$ , чије су странице обојене са  $n$  боја тако да су сваке две наспрамне странице обојене истом бојом. Одредити најмањи природан број  $m$  за који је могуће у унутрашњости овог многоугла изабрати тачке  $B_1, B_2, \dots, B_m$ , затим повући извесне међусобно непресецајуће дужи, чији су крајеви тачке из скупа

$$\{A_1, A_2, \dots, A_{2n}\} \cup \{B_1, B_2, \dots, B_m\},$$

те сваку од тих дужи обојити једном од датих  $n$  боја, тако да се на тај начин почетни многоугао подели на конвексне четвороуглове са особином да су у сваком од њих наспрамне странице обојене истом бојом.

Предвиђено време за израду задатака је 270 минута.

Сваки задатак вреди 7 бодова.

Решења задатака детаљно образложити.