Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

19. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

8. април 2026. године

Други дан

4. У равни је дато $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, тачака од којих никоје три нису колинеарне. Маја и Коста играју следећу игру: на почетку Маја спаја сваке две од ових n тачака дужима и сваку од дужи усмерава ка једном од њена два темена, на који год она начин жели. Након тога, њих двоје играју игру која се састоји од k узастопних рунди. У свакој од рунди прво Коста бира једну од тачака коју нико није одабрао у ранијем току игре, након чега исто ради и Маја и тада рунду губи онај играч ка чијој тачки је усмерена дуж између две тачке изабране у тој рунди. Мајин циљ је да дужи на почетку усмери тако да, уколико она у наставку игре игра оптимално, независно од тога како Коста бира тачке, он не може победити ниједну од k рунди игре. На колико различитих начина Маја може испунити свој циљ?

5. Одредити све функције $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ такве да важи $f(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}) = \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}$, за све $x, y \in (0, +\infty)$.

6. Нека су k и l ненегативни цели бројеви и нека су r и s природни бројеви. Означимо са S скуп свих парова природних бројева (a, b) за које важи

$$a \mid b^2 + kb + 1, \qquad b \mid a^2 + al + 1.$$

Доказати да пар (r, s) припада скупу S ако и само ако је скуп

$$G = \{\text{НЗД}(a - r, b - s) \mid (a, b) \in S\}$$

бесконачан.

Предвиђено време за израду задатака је 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 бодова.
Решења задатака детаљно образложити.