Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - 19. СМО, Београд 2026.

Први дан

1. ПРВО РЕШЕЊЕ: За свако $r \in \mathbb{F}_{1013}$ нека су o_r и e_r, редом, једини непаран и једини паран број из скупа $\{1, 2, \ldots, 2026\}$ који су конгруентни са $r \pmod{1013}$. Тада, за свака два $r, s \in \mathbb{F}_{1013}$ важи:

$$o_r o_s \equiv o_{rs}, \qquad o_r e_s \equiv e_{rs}, \qquad e_r e_s \equiv e_{rs} \pmod{2026}.$$

Конструисаћемо пермутацију π скупа $\{1, 2, \ldots, 2026\}$ на следећи начин:

$$\pi(o_0) = e_1, \qquad \pi(o_x) = o_{-1-x^{-1}}, \text{ за } x \neq 0,$$

$$\pi(e_0) = e_0, \qquad \pi(e_1) = o_{-1}, \qquad \pi(e_x) = e_{1-x^{-1}}, \text{ за } x \neq 0, 1.$$

Сада рачунамо остатке производа $k\pi(k)$:

$$o_0\pi(o_0) = 1013 \cdot 1014 \equiv 0 \equiv e_0 \pmod{2026},$$

а за $x \neq 0$,

$$o_x\pi(o_x) \equiv o_x\, o_{-1-x^{-1}} \equiv o_{x(-1-x^{-1})} = o_{-x-1} \pmod{2026}.$$

Даље је

$$e_0\pi(e_0) = 2026 \cdot 2026 \equiv 0 \equiv e_0 \pmod{2026},$$

$$e_1\pi(e_1) = 1014 \cdot 2025 \equiv 1012 \equiv e_{-1} \pmod{2026},$$

док за $x \neq 0, 1$,

$$e_x\pi(e_x) \equiv e_x\, e_{1-x^{-1}} \equiv e_{x(1-x^{-1})} = e_{x-1} \pmod{2026}.$$

Према томе, међу остацима бројева $k\pi(k)$ добијамо:

- све парне остатке e_r, за $r \in \mathbb{F}_{1013}$,
- све непарне остатке o_r, осим остатка $o_{-1} \equiv 2025 \pmod{2026}$.

Дакле, добијамо тачно 2025 различитих остатака при дељењу са 2026.

Још треба показати да није могуће добити свих 2026 остатака при дељењу са 2026. Претпоставимо супротно, тј. да су бројеви $\pi(1)$, $2\pi(2)$, $\ldots$, $2026\pi(2026)$ међусобно неконгруентни по модулу 2026. Тада, међу њима има тачно 1013 непарних остатака. Како је производ $k\pi(k)$ непаран ако и само ако су и k и $\pi(k)$ непарни, следи да се свих 1013 непарних бројева мора пресликавати у непарне бројеве. Мора бити $\pi(1013) = 1013$, јер бисмо у супротном добили два различита непарна броја дељива са 1013, што је немогуће. Према томе, за сваки непаран $k \neq 1013$ бројеви k и $\pi(k)$ су непарни и различити од 1013, те производи

$$k\pi(k), \qquad k \text{ непаран},\ k \neq 1013,$$

дају тачно све непарне остатке различите од 1013. Међутим, ово није могуће. Заиста, ако означимо са

$$P = \prod_{\substack{k \text{ непаран} \\ k \neq 1013}} k,$$

отуда, с обзиром да π пермутује непарне бројеве различите од 1013, добијамо

$$\prod_{\substack{k \text{ непаран} \\ k \neq 1013}} k\pi(k) \equiv P^2 \pmod{1013}.$$

Са друге стране, бројеви $k\pi(k)$ дају тачно све непарне остатке различите од 1013, те је њихов производ конгруентан са P по модулу 1013. Дакле, $P^2 \equiv P \pmod{1013}$, па, како је $P \not\equiv 0 \pmod{1013}$, следи $P \equiv 1 \pmod{1013}$. Али, $P \equiv 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 1012 = (1012)! \equiv -1 \pmod{1013}$ по Вилсоновој теореми, што је контрадикција. Према томе, број различитих остатака је највише 2025.

ДРУГО РЕШЕЊЕ: Доказаћемо да за $n = 2p$, где је p непаран прост број постоји пермутација τ скупа $\{1, \ldots, 2p\}$ тако да бројеви $i\tau(i) \pmod{2p}$ дају тачно $2p - 1$ различитих вредности. За сваки $r \in \mathbb{F}_p$ нека су o_r и e_r једини непаран, односно паран број из $\{1, \ldots, 2p\}$ конгруентан са $r \pmod{p}$. Тада важи

$$o_r o_s \equiv o_{rs}, \qquad o_r e_s \equiv e_{rs}, \qquad e_r e_s \equiv e_{rs} \pmod{2p}.$$

Нека је g примитиван корен по модулу p и $k = \frac{p-1}{2}$. Дефинишимо пермутацију $\sigma : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ са

$$\sigma(0) = 0, \qquad \sigma(g^i) = g^{i+1} \ (0 \leq i \leq k-1), \qquad \sigma(g^k) = 1, \qquad \sigma(g^i) = g^i \ (k+1 \leq i \leq 2k-1).$$

Тада мултискуп $\{r\sigma(r) : r \in \mathbb{F}_p\}$ садржи све елементе скупа $\mathbb{F}_p$, осим 1, при чему се -1 јавља два пута. Зато постоји јединствен $a \neq -1$ такав да $a\sigma(a) = -1$. Нека је $u = \sigma(a)$. Сада дефинишемо τ са

$$\tau(o_r) = \begin{cases} e_u, & r = a, \\ o_{\sigma(r)}, & r \neq a, \end{cases} \qquad \tau(e_r) = \begin{cases} o_u, & -\sigma(r) = u, \\ e_{-\sigma(r)}, & -\sigma(r) \neq u. \end{cases}$$

Ово је пермутација, јер слике непарних дају све o_t, осим што је o_u замењен са e_u, а слике парних дају све e_t, осим што је e_u замењен са o_u. За $r \neq a$ имамо

$$o_r \tau(o_r) \equiv o_{r\sigma(r)},$$

док за $r = a$ важи

$$o_a \tau(o_a) \equiv e_{au} = e_{-1}.$$

Дакле из непарних остатака добијамо све непарне остатке осим 1 и још e_{-1}. Даље, за свако $r \in \mathbb{F}_p$ важи

$$e_r \tau(e_r) \equiv e_{-r\sigma(r)} \pmod{2p},$$

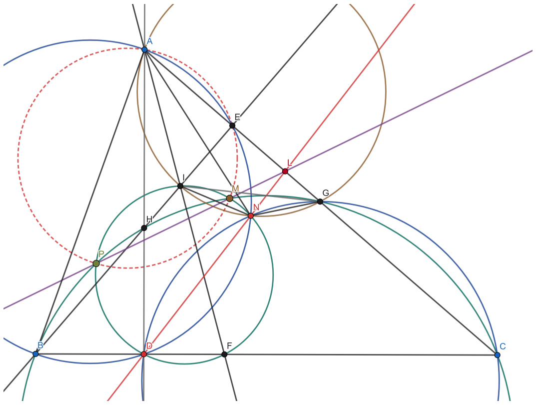
одакле закључујемо да из парних остатака добијамо све парне остатке, осим e_{-1}. Зато, укупно добијамо све парне остатке и све непарне остатке осим 1, тј. тачно $2p - 1$ различитих остатака модуло $2p$. Доказ да није могуће постићи свих $2p$ остатака је исти као и у првом решењу.

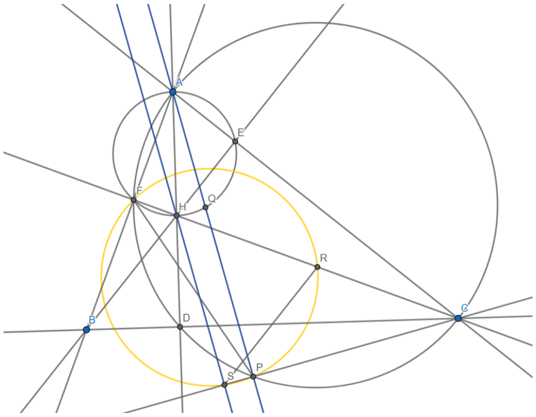
2. ПРВО РЕШЕЊЕ: Означимо са G други пресек кружнице описане око троугла BHC са правом AC и нека је тачка N други пресек кружница описаних око троуглова CGD и DFI. Такође, нека је тачка L пресек праве MP са правом AC. Унутрашње углове троугла ABC код темена A, B и C означимо са α, β и γ, редом. Тада, из тетивности четвороугла $CGND$ имамо да је $\angle GND = 180^\circ - \gamma$, док из тетивности четвороугла $DFNI$ имамо да је $\angle DNI = \angle DFI = 90^\circ - \angle DAF = 90^\circ - (\frac{\alpha}{2} - (90^\circ - \beta)) = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \beta = \frac{\alpha}{2} + \gamma$.

Сада имамо да је $\angle ING = 360^\circ - \angle DNI - \angle GND = 360^\circ - (\frac{\alpha}{2} + \gamma) - (180^\circ - \gamma) = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - \angle GAI$, одакле следи да је четвороугао $AING$ тетиван.

Стога, добијамо да је $\angle INA = \angle IGA = \frac{\alpha}{2}$, јер је тачка G симетрична слика тачке A при централној симетрији преко тачке E. Ово знамо зато што је тачка E подножје висине из темена B на праву AC, а из тетивности четвороугла $BHGC$ имамо да је $\angle BGC = \angle BHC = 180^\circ - \alpha$, па је $\angle BGA = \angle BAG$, што доказује претходно тврђење. Сада имамо да је $\angle DNA = \angle DNI + \angle INA = \frac{\alpha}{2} + \gamma + \frac{\alpha}{2} = \alpha + \gamma = 180^\circ - \beta = 180^\circ - \angle ABD$, па је четвороугао $ABDN$ тетиван. Како знамо да је четвороугао $ABDE$ тетиван, то је и четоворугао $ADNE$ тетиван. Отуда, како је тачка L пресек правих MP и CG, L је радикални центар кружница описаних око троуглова BHC, CGD и DFI, то су тачке D, N и L колинеарне.

Сада, посмтрајући потенцију тачке L у односу на кружницу описану око четвороугла $ADNE$, имамо да је $LN \cdot LD = LE \cdot LA$, док посматрајући потенцију тачке L у односу на кружницу описану око четвороугла $DFNI$, добијамо да важи $LN \cdot LD = LM \cdot LP$. Коначно, имамо $LM \cdot LP = LE \cdot LA$, одакле следи да је четовороугао $AEMP$ тетиван, што је и требало доказати.





ДРУГО РЕШЕЊЕ: Применимо инверзију у A са полупречником $(AH \cdot AD)^{\frac{1}{2}}$. Тада проблем постаје следећи: Нека је ABC троугао. Означимо са D, E и F подножја висина из темена A, B и C, тим редом. Нека је H ортоцентар полазног троугла. Претпоставимо да симетрала унутрашњег угла у темену A сече кружнице описане око троугла AFE и четвороугла $AFDC$, други пут, у тачкама Q и P, редом. Доказати да се тачка C налази на радикалној оси кружница PQH и DEF.

Стога, нека је R средиште дужи CH и S подножје нормале из тачке H на CP. Како је $\angle HSP = 90^\circ = \angle HQP$, следи да је S на кружиници описаној око троугла HQP. Због потенције, довољно је показати да је $RPSF$ цикличан. Имамо да је $\angle RFP = \angle RCS = \angle RSP$, при чему прва једнакост следи, јер је P средиште лука FDC, али и друга, јер је HSC правоугли троугао и R је средиште његове хипотенузе. Тиме је доказ завршен.

3. Тврдимо да је тражени минимум једнак $m = \binom{n-1}{2}$. Доказаћемо, најпре, горњу границу. Заправо, доказаћемо нешто јаче: Сваки централно симетричан конвексан $2n$-тоугао, $n \geq 3$, чије су наспрамне странице обојене истом бојом може се поделити на конвексне четвороуглове тражене врсте уз тачно $\binom{n-1}{2}$ унутрашњих тачака.

Доказ иде индукцијом по n. База индукције је случај $n = 3$. Тада је дати многоугао централно симетричан конвексан шестоугао $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, при чему су наспрамне странице исте боје. Нека је O његов центар симетрије. Тада су дужи OA_1, OA_3 и OA_5 међусобно непресецајуће у унутрашњости многоугла и деле шестоугао на три конвексна четвороугла: $A_1A_2A_3O$, $A_3A_4A_5O$ и $A_5A_6A_1O$. Обојимо дуж OA_3 бојом странице A_1A_2, дуж OA_5 бојом странице A_3A_4, а дуж OA_1 бојом странице A_5A_6. Тада у четвороуглу $A_1A_2A_3O$ наспрамне странице A_1A_2 и OA_3 имају исту боју, а наспрамне странице A_2A_3 и OA_1 такође имају исту боју, јер су странице A_2A_3 и A_5A_6 наспрамне у почетном шестоуглу. Аналогно важи и за преостала два четвороугла. Дакле, тврдња важи за $n = 3$. При томе је употребљена тачно једна унутрашња тачка, тј. у овом случају је $m = \binom{3-1}{2} = 1$.

Претпоставимо сада да је $n \geq 4$ и да тврђење важи за $2n-2$. Нека је дат централно симетричан конвексан $2n$-тоугао $P = A_1A_2 \dots A_{2n}$, при чему су наспрамне странице исте боје. Индексе посматрамо по модулу $2n$, па је $A_{2n+1} = A_1$. Означимо са $e_i = \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ вектор i-те странице. По централној симетрији важи $e_{i+n} = -e_i$ за свако i, па посебно важи $e_{2n} = -e_n$. Нека је $v = e_{2n} = \overrightarrow{A_{2n}A_1}$. За $i = n+2, n+3, \dots, 2n-1$ дефинишимо тачку $B_{i-(n+1)}$ са особином $\overrightarrow{A_iB_{i-(n+1)}} = v$, а још ставимо да је $C_0 = A_n$ и $C_{n-1} = A_1$. Тада за свако $i = n+1, n+2, \dots, 2n-1$ четвороугао Q_i дефинисан са $Q_{n+1} = A_{n+1}A_{n+2}B_1C_0$, $Q_i = A_iA_{i+1}B_{i-n}B_{i-n-1}$, за $i = n+2, \dots, 2n-2$, $Q_{2n-1} = A_{2n-1}A_{2n}C_{n-1}B_{n-2}$, јесте паралелограм, јер важи $\overrightarrow{A_iB_{i-(n+1)}} = \overrightarrow{A_{i+1}B_{i+1-(n+1)}} = v$ и $\overrightarrow{B_{i-(n+1)}B_{i+1-(n+1)}} = \overrightarrow{A_iA_{i+1}} = e_i$ у свим случајевима у којима обе тачке постоје, док се гранични случајеви $i = n+1$ и $i = 2n-1$ тумаче преко $C_0 = A_n$ и $C_{n-1} = A_1$. Дакле, сваки Q_i је конвексан четвороугао.

Посматрајмо сада многоугао $P' = A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_{n-2}$. Његове узастопне странице имају векторе $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}, e_{n+2}, \dots, e_{2n-1}$: заиста, странице A_iA_{i+1} за $1 \leq i \leq n-1$ имају векторе e_i, затим је $\overrightarrow{A_nB_1} = \overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}} = e_{n+1}$, даље је $\overrightarrow{B_{i-(n+1)}B_{i+1-(n+1)}} = e_i$ за $i = n+2, \dots, 2n-2$, а најзад је $\overrightarrow{B_{n-2}A_1} = \overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}} = e_{2n-1}$. Према томе, низ смерова страница многоугла P' добија се из низа смерова страница многоугла P избацивањем пара наспрамних страница са векторима e_n и $e_{2n} = -e_n$. Како су смерови страница конвексног многоугла уређени строго монотоно око границе, следи да је и P' конвексан. С обзиром да се преостали вектори и даље јављају у наспрамним паровима $e_{i+n} = -e_i$, следи да је и P' централно симетричан. Дакле, P' је централно симетричан конвексан $(2n-2)$-тоугао. Поред тога, наспрамне странице многоугла P' имају исте боје. Заиста, свака страница многоугла P' или је нека од оригиналних страница A_iA_{i+1}, или је њена транслирана копија, па боју може да наследи од одговарајуће странице многоугла P. Како су у P наспрамне странице исте боје, исто важи и у P'.

Сада, обојимо сваки четвороугао Q_i на следећи начин: странице A_iA_{i+1} и одговарајућа супротна страница у Q_i обојимо истом бојом, а преостале две странице обојимо бојом странице $A_{2n}A_1$. Тада, у сваком Q_i наспрамне странице имају исту боју. По конструкцији, многоугао P' и четвороуглови $Q_{n+1}, Q_{n+2}, \dots, Q_{2n-1}$ имају дисјунктне унутрашњости, а њихова унија има исту границу као многоугао P. Стога је њихова унија управо цео многоугао P. Дакле, на тај начин добијамо поделу многоугла P на многоугао P' и $n-1$ конвексних четвороуглова $Q_{n+1}, \dots, Q_{2n-1}$. По индуктивној претпоставци, многоугао P' може се даље поделити на тражене конвексне четвороуглове уз тачно $\binom{n-2}{2}$ унутрашњих тачака. У нашој конструкцији нове унутрашње тачке су управо $B_1, B_2, \dots, B_{n-2}$, којих има $n-2$. Зато за многоугао P добијамо да је укупан број унутрашњих тачака једнак $\binom{n-2}{2} + (n-2) = \binom{n-1}{2}$. Тиме је доказана горња граница $m \leq \binom{n-1}{2}$.

Сада доказујемо доњу границу. Посматрајмо произвољну допуштену поделу почетног правилног $2n$-тоугла на конвексне четвороуглове тражене врсте. Нека је b број добијених четвороуглова, а m број унутрашњих тачака.

У сваком добијеном четвороуглу појављују се највише две боје, јер су му наспрамне странице исте боје. За сваку боју која се појављује у том четвороуглу спојимо средине одговарајућег пара наспрамних страница. Тако у сваком четвороуглу добијамо највише две помоћне дужи, па се у њему може појавити највише једно пресецање помоћних дужи различитих боја.

Фиксирајмо сада једну боју c. Посматрајмо све помоћне дужи које одговарају боји c. Оне образују планарни граф G_c: његови врхови су средине свих страница боје c које се јављају у подели, а његове гране су управо поменуте помоћне дужи. Свака средина унутрашње странице боје c има степен 2, јер та страница припада тачно двама четвороугловима и у оба се појављује помоћна дуж боје c. Са друге стране, средина граничне странице почетног многоугла боје c има степен 1, јер та страница припада само једном четвороуглу. По услову задатка, на граници почетног многоугла постоје тачно две странице боје c и то наспрамне. Дакле, граф G_c има тачно два врха непарног степена, оба степена 1. Отуда следи да у G_c постоји јединствена повезана компонента која није циклус; она је проста полигонална линија која спаја средине управо тих двеју наспрамних граничних страница. Означимо ту линију са Γ_c.

Сада узмимо две различите боје c и d. Крајеви линије Γ_c леже на срединама двеју наспрамних страница боје c, а крајеви линије Γ_d на срединама двеју наспрамних страница боје d. На граници правилног $2n$-тоугла ове четири тачке се јављају наизменично: између две наспрамне странице боје c налази се тачно по једна од две странице боје d са сваке стране, јер су и странице боје d међусобно наспрамне. Стога, проста полигонална линија Γ_c дели многоугао на две области, а због наизменичног распореда крајева тачке на којима се завршава Γ_d леже у различитим областима. Зато линија Γ_d мора пресећи линију Γ_c. Дакле, за сваки пар различитих боја одговарајуће две линије секу се барем једном. Са друге стране, свако пресецање две такве линије може се догодити само унутар неког од четвороуглова из поделе, док се у сваком четвороуглу може појавити највише једно такво пресецање. Дакле, укупан број четвороуглова b није мањи од броја парова боја, те важи $b \geq \binom{n}{2}$.

Коначно, посматрајмо планарни граф добијен од свих страница четвороуглова у подели. Нека је V број његових врхова, а E број његових грана. Тада је $V = 2n + m$, јер су врхови управо темена почетног многоугла и унутрашње тачке поделе. Даље, како је свака од b унутрашњих области четвороугао, укупан број ивица које се појављују на границама свих тих области, рачунајући и мултиплицитет, једнак је $4b$. При томе се свака унутрашња грана броји двапут, а свака гранична страница почетног многоугла једном. Како граничних страница има $2n$, а укупан број грана је E, добијамо

$$4b = 2(E - 2n) + 2n = 2E - 2n,$$

односно $E = 2b + n$. Отуда је, користећи Ојлерову формулу, број области једнак је $b+1$, док из $V - E + (b+1) = 2$ добијамо $(2n+m) - (2b+n) + (b+1) = 2$, односно $b = m + n - 1$. Комбинујући ово са неједнакости $b \geq \binom{n}{2}$, добијамо $m = b - (n-1) \geq \binom{n}{2} - (n-1) = \binom{n-1}{2}$.

Дакле, анализирајући претходно, $m = \binom{n-1}{2}$, чиме је доказ завршен.