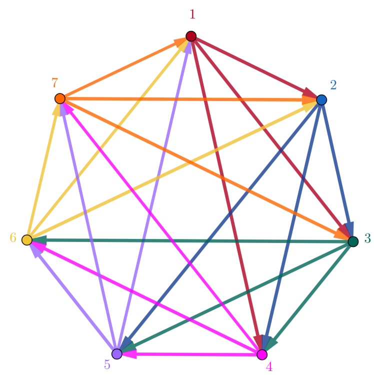
Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - 19. СМО, Београд 2026.

Други дан

4. Тражени број је $(n-1)!$. Током решења, посматраћемо тачке заједно са усмереним дужима између њих као усмерен граф са n чворова. Рећи ћемо да чвор u побеђује чвор v уколико у графу постоји грана усмерена од u ка v. Током игре, Коста и Маја ефективно склањају чворове из графа, јер се једном изабрани чворови касније не могу бирати.



Прво покажимо пример графа који Маја може нацртати како би испунила свој циљ. Уколико чворове обележимо бројевима од 1 до $n = 2k+1$, посматрајмо граф у ком сваки чвор побеђује наредних k чворова, а губи од претходних k (циклично, по модулу n). Пример овог графа за $n = 7$, односно $k = 3$, дат је на слици изнад. Индукцијом ћемо доказати да уколико нацрта овај граф, Маја може испунити свој циљ у наставку игре. У случају $n = 3$, имамо троугао у ком су гране усмерене циклично, те Маја свакако може победити једину рунду која се одиграва. У случају генералног $n = 2k+1$, можемо без умањења општости, због симетрије овог графа, претпоставити да је Коста у првој рунди одабрао чвор број 1. У том случају, Маја може одабрати чвор $k+2$. Како је чвор $k+2$ тачно k чворова "пре" чвора 1, он га побеђује. Такође, сви преостали чворови у графу или губе од чвора 1 и побеђују чвор $k+2$ (то су $2, \dots, k+1$), или побеђују чвор 1 и губе од $k+2$ (то су $k+3, \dots, 2k+1$), па након брисања 1 и $k+2$ и ренумерације преосталих чворова добијамо исти граф за $k-1$, на коме Маја побеђује по индуктивној претпоставци.

Очигледно, уколико се чворови оригиналног графа који Маја нацрта могу ренумерисати тако да новодобијени граф буде управо горе описани граф, она може испунити свој циљ. Доказаћемо сада да су то једини графови који јој ово омогућавају.

Приметимо прво да је потребан услов да би граф који Маја нацрта испуњавао њен циљ да буде регуларан (сваки чвор има једнак број чворова које побеђује и чворова од којих губи), те да остаје регуларан након сваког њеног потеза. Уколико граф у неком тренутку више није регуларан, како је укупан број грана које излазе из свих чворова $\frac{n(n-1)}{2} = nk$, постојаће чвор v који губи од мање од k чворова. Тада Коста има следећу победничку стратегију: док је год то могуће, бира чвор који побеђује v (након чега Маја не сме да бира сам v јер би изгубила), док кад то више није могуће, бира v, а Маји остају само чворови који губе од v. Он ово може да учини, јер је пре тога морао највише $k-1$ пут да бира чвор који побеђује v, па је остала бар једна рунда.

Претпоставимо сада да је Маја нацртала граф такав да она може испунити свој циљ. По претходном, за сваки (Костин) чвор v у том графу, постоји (Мајин) чвор $f(v)$, тако да граф без $v, f(v)$ остаје регуларан. Конкретно, за свако v постоји $f(v)$ такав да сваки од преосталих $2k-1$ чворова или губи од v и побеђује $f(v)$, или побеђује v и губи од $f(v)$ (*). У наставку доказујемо нека кључна запажања о пресликавању f. Означимо произвољан чвор са 1 (остале ћемо означити у наставку).

<u>$f(v)$ је јединствено одређено, односно f је добро дефинисано пресликавање:</u> У супротном, нека и u и w задовољавају дати услов за неко v. Тада по (*), како u побеђује v, мора губити од w. Али по симетрији и w мора губити од u, контрадикција.

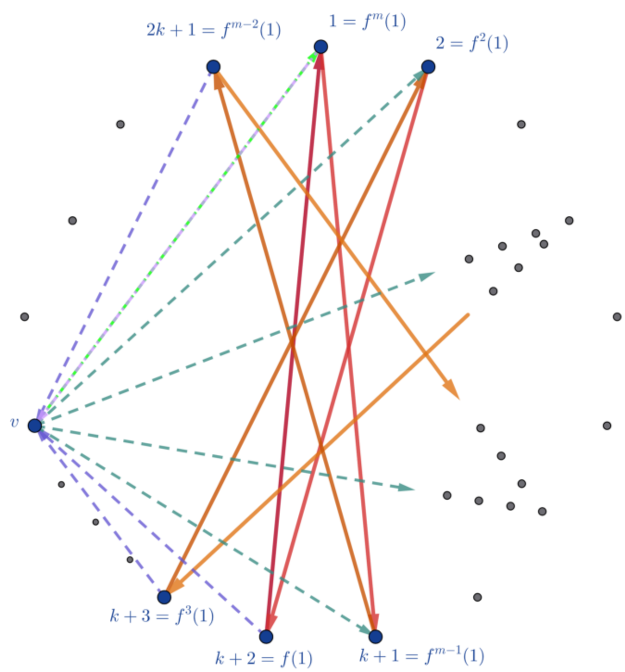
<u>f је инјективно:</u> У супротном, $f(u) = f(w)$ за неке $u \neq w$. Али тада w губи од $f(u) = f(w)$, па по (*) мора да побеђује u. Симетрично и u побеђује w, што води до контрадикције.

<u>f је бијективно:</u> Ово је сада директно из ињективности и тога да f пресликава коначан скуп чворова у самог себе. Конкретно, постоји (најмање) позитивно m тако да је $f^m(1) := f(f^{m-1}(1)) = 1$.

<u>За све $0 < t < m$, $f^t(1)$ побеђује 1 ако и само ако је t непарно:</u> По индукцији, где за $t = 1$ следи из дефиниције, а даље из индуктивне претпоставке и (*) примењено на $v = f^{t-1}(1)$, $f(v) = f^t(1)$ и 1. Конкретно, $f^{m-1}(1)$ губи од $f^m(1) = 1$, па m мора бити непарно.

<u>f је циклус, односно $m = n$:</u> У супротном, постоји v које није $f^t(1)$ ни за једно t. Уколико v побеђује $1 = f(f^{m-1}(1))$, из (*) следи да губи од $f^{m-2}(1)$, односно побеђује $f^{m-3}(1)$, ... Како је m непарно, v побеђује и $f(1)$ уз 1, што је у контрадикцији са (*). Аналогно се показује и ако v губи од 1.

Коначно можемо да означимо преостале чворове. Нека је $f^{2i}(1)$ означено са $1+i$ за $i = 0, 1, \ldots, k$ и $f^{2i+1}(1)$ означено са $k+2+i$ за $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Остаје да покажемо да је овако нумерисан граф заиста граф с почетка, за шта је због цикличности f довољно да покажемо да 1 побеђује $2, 3, \ldots, k+1$ и губи од $k+2, k+3, \ldots, 2k+1$, што следи директно из дефиниције означавања и претпоследњег својства f.



Приметимо да је за фиксиран чвор 1 одговарајуће означавање преосталих чворова јединствено одређено, јер је пресликавање f јединствено одређено. Притом је чвор 1 одабран произвољно међу свих n чворова у графу, па се међу свих $n!$ означавања чворова бројевима од 1 до n сваки граф нацрта тачно n пута, што значи да је укупан број графова које Маја може нацртати на почетку како би испунила свој циљ $\frac{n!}{n}=(n-1)!$.

5. Показаћемо да су једина решења функције $f(x)=x$ и $f(x)=2$, $x>0$. Посматрајмо два случаја.

1° Нека је f инјективна функција.
Нека су $x>0$ и $k>1$. Применом услова задатка на парове (x,xk) и $(x,x/k)$ добијамо да је $f\big(k+\frac{1}{k}\big)=\frac{f(x)}{f(xk)}+\frac{f(xk)}{f(x)}=\frac{f(x)}{f(x/k)}+\frac{f(x/k)}{f(x)}$. Дефинишимо $u=\frac{f(xk)}{f(x)}$ и $v=\frac{f(x/k)}{f(x)}$. Тада је $u+\frac{1}{u}=v+\frac{1}{v}$, те је $(u-v)\big(1-\frac{1}{uv}\big)=0$. Дакле, или је $u=v$, или је $uv=1$. Прва могућност је немогућа, јер би из $u=v$ следило $f(xk)=f(x/k)$, одакле, због инјективности, важи $xk=x/k$, што није могуће за $k>1$. Зато мора важити $uv=1$, тј. $f(xk)f(x/k)=f(x)^2$, за свако $x>0$ и свако $k>1$.

Сада, нека су $y,z>0$. Ако је $y\neq z$, узмимо $x=\sqrt{yz}$ и $k=\sqrt{y/z}$ или $k=\sqrt{z/y}$, тако да је $k>1$. Тада, из претходне релације, добијамо да је $f(y)f(z)=f(\sqrt{yz})^2$. Ова једнакост је очигледно тачна и када је $y=z$. Дакле, за све $y,z>0$ важи $f(y)f(z)=f(\sqrt{yz})^2$. Посебно, за $z=1$ добијамо $f(y)f(1)=f(\sqrt{y})^2$, за свако $y>0$. Стављајући овде $y=x^2$, добијамо $f(x)^2=f(1)f(x^2)$, за свако $x>0$. Такође, применом релације $f(y)f(z)=f(\sqrt{yz})^2$ на бројеве $y=x^2$ и $z=y^2$ добијамо да је $f(x^2)f(y^2)=f(xy)^2$. Комбиновањем ових једнакости следи $f(1)^2f(xy)^2=f(x)^2f(y)^2$, те због позитивности функције добијамо $f(1)f(xy)=f(x)f(y)$, за све $x,y>0$.

Даље, из датог услова следи $f\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)=\frac{f(x)^2+f(y)^2}{f(x)f(y)}$. Како је $f(x)^2=f(1)f(x^2)$ и $f(x)f(y)=f(1)f(xy)$, то је $f\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)=\frac{f(x^2)+f(y^2)}{f(xy)}$. Множењем са $f(xy)$, те коришћењем релације $f(1)f(uv) = f(u)f(v)$, за $u = xy$ и $v = \frac{x^2+y^2}{xy}$, добијамо $f(1)f(x^2+y^2) = f(x^2) + f(y^2)$. Како се сваки позитиван број може записати као квадрат неког позитивног броја, закључујемо да је за све $u, v > 0$ испуњено $f(1)f(u+v) = f(u) + f(v)$.

Сада за произвољне бројеве $x, y, z > 0$ рачунамо $f(1)^2 f(x+y+z)$ на два начина. Са једне стране, из претходне релације, добијамо $f(1)^2 f(x+y+z) = f(1)\big(f(x+y) + f(z)\big) = f(x) + f(y) + f(1)f(z)$. Са друге стране, исто тако добијамо $f(1)^2 f(x+y+z) = f(1)\big(f(x) + f(y+z)\big) = f(1)f(x) + f(y) + f(z)$. Поређењем, налазимо да је $(f(1)-1)f(x) = (f(1)-1)f(z)$, за све $x, z > 0$. Ако би било $f(1) \neq 1$, следило би $f(x) = f(z)$, за све $x, z > 0$, тј. функција f била би константна, што је немогуће јер је f ињективна. Дакле, мора бити $f(1) = 1$. Према томе, претходне релације се своде на $f(xy) = f(x)f(y)$ и $f(u+v) = f(u) + f(v)$, за све $x, y, u, v > 0$. Дакле, функција f је и мултипликативна и адитивна на $(0, \infty)$. Из адитивности и позитивности следи да је f строго растућа (ако је $y > x > 0$, тада је $f(y) - f(x) = f(y-x) > 0$). За сваки позитиван цео број n из адитивности следи $f(n) = nf(1) = n$, а затим, за сваки позитиван рационалан број $q = \frac{m}{n}$, добијамо $nf(q) = f(nq) = f(m) = m$, те је $f(q) = q$.

Нека је сада $x > 0$ произвољно. Ако су (q_n) и (r_n) низови позитивних рационалних бројева такви да $q_n \uparrow x$ и $r_n \downarrow x$, $n \to +\infty$, тада због монотоности важи $q_n = f(q_n) \leq f(x) \leq f(r_n) = r_n$, за свако n, одакле, преласком на граничну вредност кад $n \to +\infty$ добијамо да је $f(x) = x$, $x > 0$. Дакле, у инјективном случају једино решење јесте $f(x) = x$, за свако $x > 0$.

2° Нека f није инјективна.

Тада постоје бројеви $a, b > 0$, $a \neq b$, такви да је $f(a) = f(b)$. Без умањења општости можемо претпоставити да је $b > a$. Ставимо да је $k = \frac{b}{a} > 1$. Применом услова задатка на пар (b, a) добијамо $f\big(k + \frac{1}{k}\big) = \frac{f(b)}{f(a)} + \frac{f(a)}{f(b)} = 2$. Сада, за произвољно $x > 0$, применом услова на пар (kx, x) добијамо $f\big(k + \frac{1}{k}\big) = \frac{f(kx)}{f(x)} + \frac{f(x)}{f(kx)}$. Лева страна је једнака 2, одакле налазимо да је $\frac{f(kx)}{f(x)} + \frac{f(x)}{f(kx)} = 2$. Како за сваки позитиван број t важи $t + \frac{1}{t} \geq 2$, са једнакошћу акко је $t = 1$, следи $\frac{f(kx)}{f(x)} = 1$, тј. $f(kx) = f(x)$, за свако $x > 0$.

Упоредимо сада услов задатка за парове (x, y) и (kx, y). Десне стране су једнаке, јер је $f(kx) = f(x)$, па је $f\Big(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\Big) = f\Big(\frac{kx}{y} + \frac{y}{kx}\Big)$, за све $x, y > 0$. Ако ставимо $t = \frac{x}{y}$, последње постаје $f\big(t + \frac{1}{t}\big) = f\big(kt + \frac{1}{kt}\big)$, за све $t > 0$. Нека је сада $t > \frac{1}{\sqrt{k}}$. Тада су бројеви $u = t + \frac{1}{t}$ и $v = kt + \frac{1}{kt}$ различити и задовољавају $f(u) = f(v)$. Притом је $v > u$, јер је $v - u = (k-1)\big(t - \frac{1}{kt}\big) > 0$. Примена претходног аргумента на пар (v, u) показује да за број $\lambda = \frac{v}{u} > 1$ важи $f(\lambda x) = f(x)$, за свако $x > 0$. Даље, имамо да је $\lambda = \frac{kt + \frac{1}{kt}}{t + \frac{1}{t}} = \frac{k^2t^2+1}{k(t^2+1)}$. Функција $\phi(t) = \frac{k^2t^2+1}{k(t^2+1)}$ је непрекидна и строго растућа на интервалу $\Big(\frac{1}{\sqrt{k}}, \infty\Big)$, јер је $\phi'(t) = \frac{2t(k^2-1)}{k(t^2+1)^2} > 0$, а притом важи $\phi\Big(\frac{1}{\sqrt{k}}\Big) = 1$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} \phi(t) = k$. Дакле, када t пролази кроз интервал $\Big(\frac{1}{\sqrt{k}}, \infty\Big)$, број $\lambda = \phi(t)$ пролази кроз цео интервал $(1, k)$. Према томе, за свако $\lambda \in (1, k)$ и свако $x > 0$ важи $f(\lambda x) = f(x)$.

Сада нека је $r > 1$ произвољно. Изаберимо толико велики природан број n са особином $r^{1/n} < k$. Тада је $r^{1/n} \in (1, k)$, одакле, за свако $x > 0$, налазимо $f(r^{1/n}x) = f(x)$. Применом ове једнакости n пута добијамо $f(rx) = f(x)$. Дакле, за свако $r > 1$ и свако $x > 0$ важи $f(rx) = f(x)$. Заменом r са $\frac{1}{r}$ добијамо исто и за свако $0 < r < 1$. Зато, за произвољне реалне бројеве $x, y > 0$, узимајући $r = \frac{y}{x}$, добијамо $f(y) = f(x)$, те је f константна на $(0, \infty)$.

Стога, нека је $f(x) = c$, за све $x > 0$, где је $c > 0$. Уврштавањем у задати услов добијамо $c = \frac{c}{c} + \frac{c}{c} = 2$. Дакле, у неинјективном случају једино решење јесте $f(x) = 2$, за свако $x > 0$.

6. Приметимо да НЗД$(a,b) \mid a \mid b^2+kb+1$, одакле следи да НЗД$(a,b)=1$. Такође, приметимо да $a \mid a^2+la+b^2+kb+1$ и $b \mid b^2+kb+a^2+la+1$, одакле следи да $ab \mid a^2+b^2+la+kb+1$, односно постоји природан број M такав да је

$$a^2+b^2+la+kb+1-Mab=0. \qquad (1)$$

Ако $d=$ НЗД$(a-r,b-s)$, следи да $a\equiv r, b\equiv s \pmod{d}$, односно $r^2+s^2+lr+ks+1-Mrs\equiv 0 \pmod{d}$.

Докажимо да ако важи $(r,s)\notin S$, онда је G коначан. Како $(r,s)\notin G$, знамо да за свако $M\in\mathbb{N}$ важи $r^2+s^2+lr+ks+1-Mrs\neq 0$ и да за одређено M постоји само коначно много d таквих да $d \mid r^2+s^2+lr+ks+1-Mrs$. Уколико докажемо да за одређено k,l постоји и коначно много вредности M које задовољавају овај услов, доказаћемо целокупно тврђење. Заиста, узмимо решење (x,y) са минималним $x+y$. Без умањења општости, претпоставимо да је $x\geq y$.

Посматрајући (1) као квадратну једначину по x, видимо да је за $x'=My-l-x=\frac{y^2+ky+1}{x}$, (x',y) поново решење исте једначине, јер $x'\in\mathbb{N}$. Из минималности следи $x'\geq x$. Знамо да важи $x'=\frac{y^2+ky+1}{x}\leq\frac{y^2+ky+1}{y}\leq y+k+1$, из чега произилази да $My-l=x+x'\leq 2x'\leq 2y+2k+2$, те је $M\leq\frac{2y+2k+l+2}{y}\leq 4+2k+l$, одакле следи да их заиста има коначно много.

Докажимо да ако $(r,s)\in S$, онда за свако $N\in\mathbb{N}$ постоји пар природних бројева $(a,b)\in S$ тако да $N\mid$ НЗД$(a-r,b-s)$, одакле се може закључити да ће важити да је скуп G бесконачан. Стога, без умањења општости, претпоставимо да је $r\leq s$. Дефинишимо низ парова (a_n,b_n) почетним условом $(a_0,b_0)=(r,s)$ и рекурентном релацијом

$$a_{n+1}=Mb_n-l-a_n=\frac{b_n^2+kb_n+1}{a_n}, \quad b_{n+1}=Ma_{n+1}-k-b_n=\frac{a_{n+1}^2+la_{n+1}+1}{b_n}.$$

По Вијетовим формулама, ако (a_n,b_n) задовољава једначину (1), њу ће задовољавати и пар (a_{n+1},b_n), па самим тим и (a_{n+1},b_{n+1}), одакле следи да сваки пар (a_n,b_n) припада скупу S. Користећи услов $a_n\leq b_n$ добијамо $a_{n+1}=\frac{b_n^2+kb_n+1}{a_n}\geq\frac{b_n^2+kb_n+1}{b_n}>b_n$. Затим, како је $a_{n+1}>b_n$, следи $b_{n+1}=\frac{a_{n+1}^2+la_{n+1}+1}{b_n}>\frac{a_{n+1}^2}{b_n}>a_{n+1}$, тј. $a_n<b_n<a_{n+1}<b_{n+1}$, за свако $n\geq 1$, што финално показује да је ово бесконачни низ међусобно различитих парова скупа S.

Фиксирајмо произвољан позитиван цео број N. Како остатака парова (a_n,b_n) при дељењу са N има највише N^2, по Дирихлеовом принципу међу првих N^2+1 парова морају постојати индекси $i<j$ такви да

$$(a_j,b_j)\equiv(a_i,b_i) \pmod{N}.$$

Примећујемо да из рекурентних релација можемо директно изразити претходне чланове низа:

$$b_{n-1}=Ma_n-k-b_n, \quad a_{n-1}=Mb_{n-1}-l-a_n=M(Ma_n-k-b_n)-l-a_n.$$

Дакле, ако за било која два индекса важи конгруенција модуло N, иста конгруенција мора важити и за њихове претходнике. Понављајући ово тврђење i пута, добијамо

$$(r,s)=(a_0,b_0)\equiv(a_{j-i},b_{j-i}) \pmod{N},$$

односно $N\mid a_{j-i}-r, N\mid b_{j-i}-s$, одакле произилази $N\mid$ НЗД$(a_{j-i}-r,b_{j-i}-s)$.