Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

26. април 2026. године

Први разред - Б категорија

1. Нека је број централних тачака једнак n. Тада је укупан број свих тачака једнак $n+2$, јер поред тих n тачака постоје још две доње бочне тачке.

Број свих тројки тачака једнак је $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, од чега треба одузети недозвољене тројке тачака. Како свих n централних тачака припадају једној правој, број тројки састављених само од тих тачака једнак је $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. Поред тога, доње три тачке су колинеарне, те дају још једну недозвољену тројку.

Према томе, број свих троуглова једнак је $\frac{(n+2)(n+1)n}{6} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - 1$. По услову задатка, то је једнако 2024, па важи $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - 1 = 2024$. Сређивањем добијамо $\frac{n\big((n+2)(n+1)-(n-1)(n-2)\big)}{6} - 1 = 2024$. Даље је $(n+1)(n+2) = n^2+3n+2$, док је $(n-1)(n-2) = n^2-3n+2$, па је разлика ових израза једнака $6n$. Стога, важи $\frac{n \cdot 6n}{6} - 1 = 2024$, односно $n^2 - 1 = 2024$, одакле је $n^2 = 2025$, те је $n = 45$. Дакле, укупан број тачака је 47.

2. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Тражени збир можемо груписати на следећи начин:

$$A = (-S(0)+S(1)) + (-S(2)+S(3)) + \cdots + (-S(2024)+S(2025)) - S(2026).$$

Израчунајмо $S(2k+1) - S(2k)$. Број $2k$ је увек паран, што значи да му је последња цифра $c \in \{0,2,4,6,8\}$. При преласку са $2k$ на $2k+1$, последња цифра постаје $c+1$, а остале цифре остају непромењене (нема преноса). Зато је $S(2k+1) - S(2k) = 1$. Таквих парова је 1013, а пошто је $S(2026) = 10$, одговор је $A = 1013 - 10 = 1003$.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Групишимо чланове по паровима: $A = \sum_{k=1}^{1013}\big(S(2k-1) - S(2k)\big)$. Ако се при прелазу са $2k-1$ на $2k$ не јавља пренос, тада се збир цифара повећава за 1, па је $S(2k) = S(2k-1)+1$, односно $S(2k-1) - S(2k) = -1$.

Ако број $2k-1$ на крају има тачно t деветки, онда при додавању јединице тих t деветки прелази у нуле, па се збир цифара смањује за $9t$, а затим се претходна цифра повећава за 1. Зато важи $S(2k) = S(2k-1)+1-9t$, па је $S(2k-1)-S(2k) = 9t-1$. Стога, сваки пар даје основни допринос -1, а за сваку завршну деветку добијамо још 9. Како има укупно 1013 парова, добијамо $A = -1013 + 9(N_1+N_2+N_3)$, где је N_1 број непарних бројева до 2025 који се завршавају цифром 9, N_2 број непарних бројева до 2025 који се завршавају са 99, а N_3 број непарних бројева до 2025 који се завршавају са 999.

Сада бројимо: $N_1 = \#\{9, 19, 29, \ldots, 2019\} = 202$, јер је $\frac{2019-9}{10} + 1 = 202$. Даље, $N_2 = \#\{99, 199, 299, \ldots, 1999\} = 20$, јер је $\frac{1999-99}{100} + 1 = 20$. Најзад, $N_3 = \#\{999, 1999\} = 2$.

Према томе, $A = -1013 + 9(202+20+2) = -1013 + 9 \cdot 224 = -1013 + 2016 = 1003$. Дакле, $A = 1003$.

3. Доказаћемо да је победник Ненад, да су Милица и Ненад Истинозборићи, а Александар и Чеда Лажковићи.

Посматрајмо најпре Чедину изјаву: *Александар је победник и Ненад је Лажковић.*

Претпоставимо да Чеда говори истину. Тада су обе тврдње из његове изјаве тачне, па је Александар победник и Ненад је Лажковић.

Како је познато да је победник Истинозборић, следи да је Александар Истинозборић, па је његова изјава тачна. Како је, према Чединој изјави, Ненад Лажковић, услов у Александровој изјави је испуњен, те из истинитости Александрове изјаве следи да је Милица победила. То је у противречности са тим да је Александар победник. Дакле, Чеда не говори истину, па је Чеда Лажковић.

Како је Чеда Лажковић, он не може бити победник, јер је победник Истинозборић.

Сада посматрајмо Миличину изјаву: *Ни ја ни Чеда нисмо победили.* С обзиром да већ знамо да Чеда није победник, истинитост ове изјаве своди се на истинитост тврдње - Милица није победила. Ако би Милица била Лажковић, њена изјава би била неистинита. Како је део *,,Чеда није победио"* тачан, неистинитост целе Миличине изјаве могла би настати само тако што је неистинита тврдња - Милица није победила, односно тако што би тврдња Милица је победила била истинита. Међутим, тада би она не би била Лажковић, што је немогуће. Стога, Милица није Лажковић, већ је Истинозборић. Зато је њена изјава тачна, те важи: *Милица није победила.*

Посматрајмо сада Ненадову изјаву: *Ако је Милица Лажковић, онда је Чеда победник.* Како је Милица Истинозборић, претпоставка ове импликације је неистинита. Зато је цела Ненадова изјава истинита. Следи да је Ненад Истинозборић.

Вратимо се сада на Александрову изјаву: *Ако је бар један од Чеде и Ненада припадник племена Лажковић, онда је Милица победила.* С обзиром да је Чеда Лажковић, претпоставка ове импликације је истинита. Како смо већ утврдили да Милица није победила, следи да је Александрова изјава неистинита. Дакле, Александар је Лажковић.

Сада знамо:

Чеда није победник, Милица није победила, Александар није Истинозборић.

Преостаје још да искључимо могућност да је Александар победник. Али победник је Истинозборић, а Александар је Лажковић, одакле закључујемо да Александар не може бити победник. Дакле, нико од Милице, Александра и Чеде није победник, те једино преостаје да је победник Ненад.

Зато је коначан одговор:

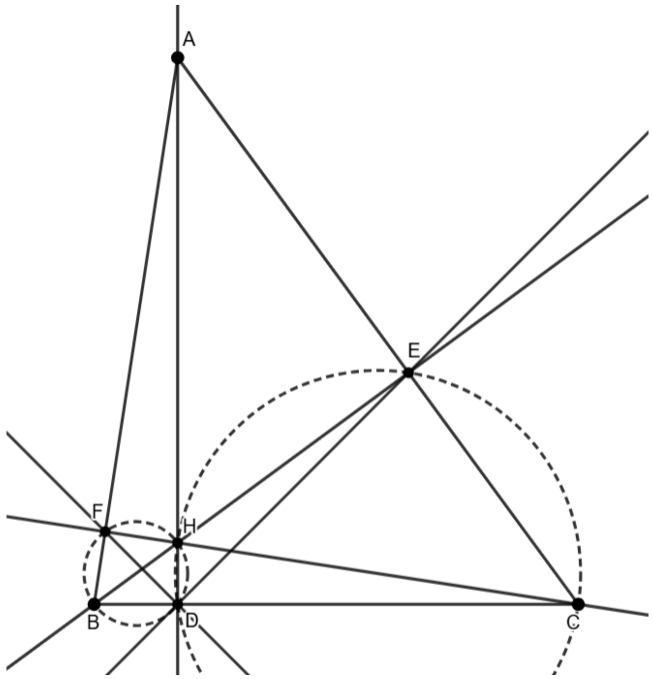
$$\boxed{\text{Победник је Ненад.}}$$

При томе,

$$\boxed{\text{Милица и Ненад су Истинозборићи, а Александар и Чеда су Лажковићи.}}$$

4. Нека је H ортоцентар троугла ABC и $\angle BAC = \alpha$. Тада су четвороуглови $FHBD$ и $HECD$ тетивни (имају по два права угла који су несуседни), па је $\angle HBF = \angle HDF$ и $\angle HCE = \angle HDE$. Како је троугао BEA правоугли, то је $\angle ABE = 90^\circ - \alpha$, а на основу претходног разматрања, $\angle FDH = 90^\circ - \alpha$. Доказ завршавају две еквиваленције:

$$AF = CF \iff \angle FCA = \angle FAC = \alpha \iff \angle FDE = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ.$$



5. Приметимо најпре да је $|49^1 - 6^2| = |49 - 36| = 13$. Дакле, вредност израза може бити једнака 13. Докажимо да не може бити мања од 13.

Претпоставимо супротно, тј. да постоје природни бројеви a и b такви да је $|49^a - 6^b| < 13$. С обзиром да је $49 \equiv 9 \pmod{10}$, важи $49^a \equiv 1$ или $49^a \equiv 9 \pmod{10}$, док је $6^b \equiv 6 \pmod{10}$. Зато је $49^a - 6^b \equiv 5$ или $49^a - 6^b \equiv 3 \pmod{10}$.

Како је $|49^a - 6^b| < 13$, број $49^a - 6^b$ је један од целих бројева између1 -12 до 12, укључујући исте. Међу тим целим бројевима само бројеви -7, -5, 3 и 5 јесу конгруентни са 3 или 5 по модулу 10. Зато мора важити $49^a - 6^b \in \{-7, -5, 3, 5\}$.

Са друге стране, $49^a \equiv 0 \pmod{7}$, а $6^b \equiv (-1)^b \pmod{7}$, па је $49^a - 6^b \equiv -(-1)^b \pmod{7}$. Дакле, број $49^a - 6^b$ је конгруентан са 1 или 6 по модулу 7.

Међутим, бројеви -7, -5, 3 и 5 конгруентни су редом са 0, 2, 3 и 5 по модулу 7, те ниједан од њих није конгруентан са 1 или 6 по модулу 7. Добијена контрадикција показује да не могу постојати природни бројеви a и b за које је $|49^a - 6^b| < 13$. Стога, најмања вредност израза $|49^a - 6^b|$ јесте 13.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

26. април 2026. године

Други разред - Б категорија

1. Најпре одредимо услове дефинисаности једначине. Да би логаритми били дефинисани, мора важити $x > 0$. Под овим условом је и $\sqrt{x+1}$ дефинисан, а такође је $\sqrt{x+1} - 1 \neq 0$, јер би из $\sqrt{x+1} - 1 = 0$ следило $x = 0$, што није дозвољено. Дакле, област дефинисаности је интервал $(0, +\infty)$.

Сада поједноставимо десну страну:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{(\sqrt{x+1}+1) - (\sqrt{x+1}-1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{2}{x}.$$

Зато је

$$\frac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}} = \frac{2}{2/x} = x.$$

Према томе, полазна једначина је еквивалентна једначини

$$x^{\log_{10}^2 x + \log_{10} x^3 + 3} = x, \qquad x > 0.$$

Како је

$$\log_{10} x^3 = 3\log_{10} x,$$

добијамо

$$x^{(\log_{10} x)^2 + 3\log_{10} x + 3} = x.$$

Сада разматрамо два случаја.
(1) Ако је $x = 1$, онда је једначина очигледно задовољена.
(2) Ако је $x \neq 1$, онда су обе стране облика x^α и x^1, са истом позитивном базом различитом од 1. Зато морају бити једнаки експоненти:

$$(\log_{10} x)^2 + 3\log_{10} x + 3 = 1.$$

Одатле следи

$$(\log_{10} x)^2 + 3\log_{10} x + 2 = 0.$$

Уведимо смену $t = \log_{10} x$. Тада добијамо квадратну једначину $t^2 + 3t + 2 = 0$, тј. $(t+1)(t+2) = 0$. Дакле,

$$t = -1 \qquad \text{или} \qquad t = -2.$$

Отуда је

$$\log_{10} x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{10},$$

или

$$\log_{10} x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{100},$$

односно сва решења полазне једначине су дата са

$$\boxed{x \in \left\{1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}\right\}.}$$

2. Један дијадски низ дужине 4 има облик $(a, b, 1-b, 1-a)$, где су a и b произвољно изабрани из скупа $\{0, 1\}$. Према томе, постоје тачно 4 дијадска низа дужине 4.

Низ дужине 16 који се састоји од 4 узастопна дијадска низа дужине 4 добија се тако што независно изаберемо сваки од та 4 блока. Према томе, укупан број таквих низова једнак је $4^4 = 256$.

Сада треба одузети оне међу њима који су и сами дијадски низови дужине 16. Нека су четири блока редом X_1, X_2, X_3, X_4. Ако цео низ дужине 16 треба да буде дијадски, онда први и последњи члан морају да дају збир 1, други и претпоследњи такође, и тако редом. Из тога следи да четврти блок мора бити једнак првом, а трећи блок мора бити једнак другом. Дакле, такав низ је у потпуности одређен избором прва два блока.

Пошто за сваки од блокова X_1 и X_2 постоје по 4 могућности, број дијадских низова дужине 16 који су састављени од четири дијадска блока дужине 4 једнак је $4 \cdot 4 = 16$. Дакле, тражени број једнак је $256 - 16 = 240$.

3. Нека је a_n n-ти члан датог низа. Тада број a_n има n цифара, при чему су цифре на непарним местима једнаке 7, а цифре на парним местима једнаке 3. Пошто је $99 = 9 \cdot 11$, а бројеви 9 и 11 су узајамно прости, број a_n је дељив са 99 ако и само ако је дељив и са 9 и са 11. Зато ћемо размотрити посебно случајеве када је n паран и када је n непаран.

(1) $n = 2k$, где је $k \in \mathbb{N}$: Тада број a_n има k непарних места и k парних места. На непарним местима стоји цифра 7, а на парним местима цифра 3. Зато је збир цифара броја a_n једнак $7k + 3k = 10k$. Да би a_n био дељив са 9, неопходно је и довољно да је

$$10k \equiv 0 \pmod{9}.$$

Како је $10 \equiv 1 \pmod{9}$, добијамо $k \equiv 0 \pmod{9}$. Са друге стране, да би a_n био дељив са 11, потребно је и довољно да разлика збира цифара на непарним и парним местима буде дељива са 11. Овде је та разлика $7k - 3k = 4k$. Дакле, мора важити

$$4k \equiv 0 \pmod{11}.$$

Пошто је 4 узајамно прост са 11, следи

$$k \equiv 0 \pmod{11}.$$

Стога, k мора бити дељив и са 9 и са 11, те је најмања могућа вредност

$$k = \text{НЗС}(9, 11) = 99.$$

Тада је $n = 2k = 198$.

(2) $n = 2k+1$, где је k ненегативан цео број: Тада број a_n има $k+1$ непарних места и k парних места. Зато је збир његових цифара $7(k+1) + 3k = 10k + 7$. Да би a_n био дељив са 9, мора важити

$$10k + 7 \equiv 0 \pmod{9}.$$

Како је $10 \equiv 1 \pmod{9}$, добијамо $k + 7 \equiv 0 \pmod{9}$, односно

$$k \equiv 2 \pmod{9}.$$

Даље, разлика збира цифара на непарним и парним местима износи $7(k+1) - 3k = 4k + 7$. Да би a_n био дељив са 11, потребно је и довољно да важи

$$4k + 7 \equiv 0 \pmod{11}.$$

С обзиром да је $7 \equiv -4 \pmod{11}$, ово је еквивалентно са

$$4k - 4 \equiv 0 \pmod{11},$$

те добијамо
$$4(k-1) \equiv 0 \pmod{11}.$$
Како је 4 узајамно прост са 11, следи
$$k \equiv 1 \pmod{11}.$$
Дакле, треба наћи најмањи ненегативан цео број k такав да важи систем конгруенција
$$k \equiv 2 \pmod{9}, \qquad k \equiv 1 \pmod{11}.$$
Бројеви облика $k = 9t + 2$ су
$$2, 11, 20, 29, 38, 47, 56, \ldots$$
а први међу њима који је конгруентан са 1 по модулу 11 јесте 56. Стога, најмање k је 56, па је $n = 2k + 1 = 113$.

Дакле, у првом случају добили смо $n = 198$, а у другом $n = 113$. Како је $113 < 198$, следи да се први члан низа дељив са 99 добија за $n = 113$.

Зато је тражени број
$$\underbrace{7373\ldots37}_{\text{113 цифара}},$$
тј. број који се налази на 113-том месту датог низа.

$$\boxed{\text{Први члан низа дељив са 99 јесте } \underbrace{7373\ldots37}_{\text{113 цифара}}.}$$

4. (а) Применимо неједнакост троугла на бројеве $y-a$ и $y-b$. Добијамо $|y-a|+|y-b| \geq |(y-a)-(y-b)|$. Како је $(y-a)-(y-b) = b-a$, следи
$$|(y-a)-(y-b)| = |b-a|.$$
Међутим, из услова $a < b$, имамо $b - a > 0$, па је $|b-a| = b-a$, тј.
$$|y-a| + |y-b| \geq b-a,$$
те је тврђење доказано.

Напомена. Једнакост важи ако и само ако је $y \in [a, b]$.
(б) Након ослобађања од апсолутних вредности, у зависности од x, у изразу $|x-1| + |x-2| + ... + |x-2023| + |x-2024|$, неки од сабирака остају исти, док неки мењају знак. Зато ће дати израз имати облик
$$S = z_1(x-1) + z_2(x-2) + ... + z_{2023}(x-2023) + z_{2024}(x-2024),$$
где су $z_1, z_2, ..., z_{2023}, z_{2024} \in \{-1, 1\}$. Сада је
$$S = (z_1 + z_2 + ... + z_{2023} + z_{2024})x - (z_1 \cdot 1 + z_2 \cdot 2 + ... + z_{2023} \cdot 2023 + z_{2024} \cdot 2024). \qquad (1)$$
Ако је збир $z_1 + z_2 + ... + z_{2023} + z_{2024} = 0$, онда је број S рационалан, јер је једнак са $z_1 \cdot 1 + z_2 \cdot 2 + ... + z_{2023} \cdot 2023 + z_{2024} \cdot 2024$. Ако је збир $z_1 + z_2 + ... + z_{2023} + z_{2024} \neq 0$, онда број S не може бити рационалан, зато што из једнакости (1) добијамо $x = \frac{S+(z_1 \cdot 1+z_2 \cdot 2+...+z_{2023} \cdot 2023+z_{2024} \cdot 2024)}{z_1+z_2+...+z_{2023}+z_{2024}}$, па уколико је S рационалан број, број x је такође рационалан, као количник два рационална броја, што није могуће. Дакле, број S је рационалан једино када је $z_1 + z_2 + ... + z_{2023} + z_{2024} = 0$.

Како су бројеви $z_1, z_2, ..., z_{2023}, z_{2024} \in \{-1, 1\}$ последња једнакост је задовољена ако и само ако је међу бројевима $z_1, z_2, ..., z_{2023}, z_{2024}$ број оних који су једнаки 1 једнак броју оних који су једнаки -1, односно ако их има по 1012. Према томе, број S је рационалан ако и само ако је број x већи од тачно 1012 бројева из скупа $\{1, 2, ..., 2023, 2024\}$, односно ако и само ако је $x \in (1012, 1013)$. Тада је $z_1 = z_2 = ... = z_{1012} = 1$ и $z_{1013} = ... = z_{2023} = z_{2024} = -1$, па је на основу (1)

$$S = (\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{1012} \underbrace{-1 - 1 - ... - 1}_{1012})x - (1 + 2 + ... + 1012 - 1013 - 1014 - ... - 2024) =$$

$$= (1013 - 1) + (1014 - 2) + ... + (2024 - 1012) = 1012 \cdot 1012 = 1012^2. \qquad (2)$$

Овим смо коначно дешифровали да задати услов у проблему заправо значи да је

$$|x - 1| + |x - 2| + ... + |x - 2023| + |x - 2024| = 1012^2.$$

Да би комплетирали доказ датог тврђења остаје нам да докажемо да за сваки реалан број y важи неједнакост

$$|y - 1| + |y - 2| + ... + |y - 2023| + |y - 2024| \geq 1012^2. \qquad (2)$$

У том циљу, користећи неједнакост из дела (а) добијамо:

$$|y - 1| + |y - 2| + ... + |y - 2023| + |y - 2024| =$$

$$= (|y - 1| + |y - 2024|) + (|y - 2| + |y - 2023|) + ... + (|y - 1012| + |y - 1013|) \geq$$

$$\geq (2024 - 1) + (2023 - 2) + ... + (1013 - 1012) = 2023 + 2021 + ... + 1 =$$

$$= (2023 + 1) + (2021 + 3) + ... + (1013 + 1011) = 2024 \cdot 506 = 1012^2.$$

Овим смо доказали неједнакост (2), чиме смо употпунили доказ тврђења.

5. Означимо $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle ACB$. Како су O_b и O_c центри описаних кружница троуглова AHC и ABH, обе тачке припадају симетрали дужи AH. Пошто је $AH \perp BC$, та симетрала је паралелна са BC, па је $O_bO_c \parallel BC$.

Докажимо да је и $O_bC \parallel O_cB$.

Пошто је O_b центар описане кружнице троугла AHC, у једнакокраком троуглу O_bAC важи

$$\angle O_bCA = 90^\circ - \frac{\angle CO_bA}{2}.$$

Означимо са H' произвољну тачку на описаној кружници троугла AHC која се налази на луку AC на ком се не налази тачка H. Тада је $\angle AH'C = 180^\circ - \angle AHC$, па пошто је $\angle CO_bA$ централни угао над CA, то је $\angle CO_bA = 2 \cdot \angle CH'A$ и $\angle O_bCA = 90^\circ - (180^\circ - \angle AHC) = \angle AHC - 90^\circ$.

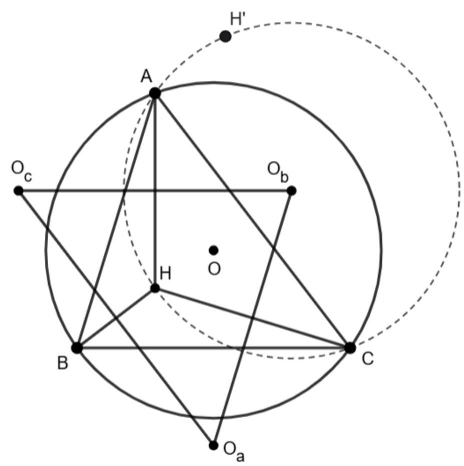
Јасно, $\angle HAC = 90^\circ - \gamma$ и $\angle HCA = 90^\circ - \alpha$, па је $\angle AHC = \alpha + \gamma = 180^\circ - \beta$. Отуда добијамо $\angle O_bCA = 90^\circ - \beta$.

Аналогно добијамо $\angle O_cBA = 90^\circ - \gamma$.

Сада је

$$\angle O_cBC + \angle O_bCB = 90^\circ - \gamma + \beta + 90^\circ - \beta + \gamma = 180^\circ,$$

одакле следи $O_bC \parallel O_cB$. Према томе, четвороугао O_cO_bCB је паралелограм, па је $O_bO_c = BC$. Аналогно се доказује $O_aO_b = AB$ и $O_aO_c = AC$, одакле следи подударност троуглова ABC и $O_aO_bO_c$.



H'
A
O_c
O_b
O
H
B
C
O_a

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

26. април 2026. године

Трећи разред - Б категорија

1. Нека је c хипотенуза датог правоуглог троугла. Пошто су a и b катете, важи

$$a > 0, \qquad b > 0.$$

Поред тога, из дефинисаности логаритма на левој страни следи

$$\frac{a-b}{2} > 0,$$

па је

$$a > b.$$

Нека су α и β оштри углови правоуглог троугла, при чему је α угао наспрам катете a, а β угао наспрам катете b. Пошто је у троуглу већа страница наспрам већег угла, из $a > b$ следи

$$\alpha > \beta.$$

Полазну једначину помножимо са 2:

$$2\log_8 \frac{a-b}{2} = \log_8 a + \log_8 b - \log_8 2.$$

Применом особина логаритама добијамо

$$\log_8 \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \log_8 \frac{ab}{2}.$$

Како је логаритамска функција са основом 8 инјективна на $(0,\infty)$, следи

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{ab}{2}.$$

Множењем са 4 добијамо

$$(a-b)^2 = 2ab,$$

односно

$$a^2 - 2ab + b^2 = 2ab.$$

Одатле следи

$$a^2 + b^2 - 4ab = 0.$$

Како је троугао правоугли, по Питагориној теореми важи

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

па претходна једнакост постаје

$$c^2 - 4ab = 0.$$

Пошто је $c > 0$, можемо поделити са c^2, па добијамо

$$1 - 4\frac{a}{c}\frac{b}{c} = 0.$$

Сада, како је α угао наспрам катете a, имамо $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ и $\cos\alpha = \frac{b}{c}$. Зато претходна једнакост постаје

$$1 - 4\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

односно

$$4\sin\alpha\cos\alpha = 1.$$

С обзиром да важи

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

следи $2\sin 2\alpha = 1$, тј. $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$.

Међутим, угао α је оштар, те је $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, тј. $0^\circ < 2\alpha < 180^\circ$. У том интервалу једначина

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$$

има решења

$$2\alpha = 30^\circ \qquad \text{или} \qquad 2\alpha = 150^\circ.$$

Дакле,

$$\alpha = 15^\circ \qquad \text{или} \qquad \alpha = 75^\circ.$$

Али већ знамо да је $\alpha > \beta$, те како је

$$\alpha + \beta = 90^\circ,$$

већи од ова два оштра угла мора бити 75°. Стога,

$$\alpha = 75^\circ, \qquad \beta = 15^\circ.$$

Из свега наведеног, углови полазног правоуглог троугла су дати са:

$$\boxed{15^\circ,\ 75^\circ,\ 90^\circ.}$$

2. Посматрајмо осни пресек купе. Добијамо једнакокраки троугао ABC, где је B врх купе, а AC пречник основе осног пресека. У тај троугао уписана је кружница, која је осни пресек уписане лопте. Нека је O центар те кружнице и нека је њен полупречник R. Нека је D средиште дужи AC. Тада је

$$BD = h$$

висина купе, а

$$DC = r$$

полупречник основе купе.

Нека је

$$\angle DBC = \alpha.$$

Пошто је BD оса симетрије осног пресека, угао при врху троугла ABC једнак је 2α, па важи

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Нека је E подножје нормале из тачке O на крак BC. Пошто је O центар уписане кружнице, важи

$$OD = R \qquad \text{и} \qquad OE = R.$$

Сада посматрајмо правоугли троугао BOE. Како је O на оси симетрије троугла ABC, тачке B, O и D су колинеарне. Зато је

$$\angle OBE = \angle DBC = \alpha.$$

Из правоуглог троугла BOE следи

$$\sin\alpha = \frac{OE}{OB} = \frac{R}{OB},$$

па је

$$OB = \frac{R}{\sin\alpha}.$$

Како су B, O и D колинеарне и тачка O лежи између B и D, добијамо

$$BD = BO + OD = \frac{R}{\sin\alpha} + R.$$

Дакле,

$$h = BD = \frac{R(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Даље, у правоуглом троуглу BDC важи

$$\tan\alpha = \frac{DC}{BD} = \frac{r}{h},$$

па следи

$$r = h\tan\alpha.$$

Убацивањем израза за h добијамо

$$r = \frac{R(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}\tan\alpha = \frac{R(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}.$$

Запремина купе једнака је

$$K = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Заменом израза за r и h добијамо

$$K = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}\right)^2\left(\frac{R(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}\right).$$

Пошто је

$$\cos^2\alpha = (1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha),$$

следи

$$K = \frac{\pi R^3(1+\sin\alpha)^2}{3\sin\alpha(1-\sin\alpha)}.$$

Са друге стране, ваљак описан око лопте има полупречник основе R и висину $2R$, па је његова запремина

$$V = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3.$$

Према томе,

$$\frac{K}{V} = \frac{(1+\sin\alpha)^2}{6\sin\alpha(1-\sin\alpha)}.$$

Означимо

$$s = \sin\alpha, \qquad 0 < s < 1.$$

Тада добијамо

$$\frac{K}{V} = \frac{(1+s)^2}{6s(1-s)}.$$

Упоредимо сада овај израз са $\frac{4}{3}$:

$$\frac{K}{V}-\frac{4}{3}=\frac{(1+s)^2}{6s(1-s)}-\frac{4}{3}=\frac{(1+s)^2-8s(1-s)}{6s(1-s)}.$$

Сређивањем бројиоца добијамо

$$(1+s)^2-8s(1-s)=1+2s+s^2-8s+8s^2=9s^2-6s+1=(3s-1)^2.$$

Зато је

$$\frac{K}{V}-\frac{4}{3}=\frac{(3s-1)^2}{6s(1-s)}\geq 0,$$

јер је $0<s<1$, па је именилац позитиван.

Отуд следи

$$\frac{K}{V}\geq\frac{4}{3},$$

односно

$$K\geq\frac{4}{3}V.$$

Дакле, за сваку такву купу важи $K\geq\dfrac{4}{3}V$, па је кандидат

$$m=\frac{4}{3}.$$

Са друге стране, једнакост

$$\frac{K}{V}=\frac{4}{3}$$

важи ако и само ако је

$$(3s-1)^2=0,$$

тј. ако и само ако је

$$s=\frac{1}{3}.$$

Пошто постоји угао $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ такав да је

$$\sin\alpha=\frac{1}{3},$$

следи да се вредност $\dfrac{4}{3}$ заиста достиже, тј. ниједан већи m не задовољава услове задатка. Према томе, $\boxed{m_{\max}=\dfrac{4}{3}.}$ Како из $K\geq\frac{4}{3}V$ и $\frac{4}{3}>1$ следи $K>V$, једнакост $K=V$ није могућа. Тиме је доказан и део (а). Стога,

$$\boxed{K\neq V}\qquad\text{и}\qquad\boxed{m_{\max}=\frac{4}{3}.}$$

3. Посматрајмо дату једначину по модулу 3. Тада важи $5^x\equiv 16\equiv 1 \pmod 3$, односно $(-1)^x\equiv 1 \pmod 3$, па закључујемо да је x паран број. Дакле, можемо писати $x=2x_1$ за $x_1\in\mathbb{N}$. Једначина постаје

$$5^{2x_1}-3^y=16\quad\Rightarrow\quad(5^{x_1}-4)(5^{x_1}+4)=3^y.$$

Како је десна страна степен броја 3, следи да су и бројеви $5^{x_1} - 4$ и $5^{x_1} + 4$ такође степени броја 3. Нека је зато

$$5^{x_1} - 4 = 3^a, \qquad 5^{x_1} + 4 = 3^b,$$

где је $a, b \in \mathbb{N}_0$ и $a < b$. Одузимањем ове две једначине добијамо $3^b - 3^a = 8$.

Пошто је лева страна дељива са 3^a, а број 8 није дељив са 3, мора бити $a = 0$. Тада добијамо $b = 2$ и $x_1 = 1$, па је $x = 2$ и $y = 2$.

Дакле, једино решење је $(x, y) = (2, 2)$.

4. Нека је у неком тренутку растојање између два жетона једнако d, где под растојањем подразумевамо број празних поља између њих. На почетку је $d = n - 2$.

(а) Нека је $n \equiv 2 \pmod 3$. Тада је

$$d = n - 2 \equiv 0 \pmod 3,$$

па је почетно растојање облика $3m$ за неки $m \in \mathbb{N}$.

Бојанова стратегија је следећа: ако Ана у свом потезу помери жетон за једно поље, Бојан у свом наредном потезу помера свој жетон за два поља; ако Ана помери жетон за два поља, Бојан помера свој жетон за једно поље.

На тај начин, после Аниног и Бојановог потеза заједно, растојање се смањи за 3. Дакле, ако је пре Аниног потеза растојање дељиво са 3, онда је и после Бојановог потеза опет дељиво са 3.

Према томе, Бојан може да одржава да после сваког његовог потеза растојање буде облика $3m$. То значи да, кад год Ана има могућност да одигра потез, има је и Бојан, јер он увек одговара комплементарним потезом.

Како се растојање при сваком потезу смањује, игра се мора завршити после коначно много корака. Пошто Бојан увек има одговор на Анин потез, следи да ће последњи потез одиграти Бојан, па Ана остаје без потеза.

(б) Нека је $n \equiv 0$ или $n \equiv 1 \pmod 3$.

Ако је $n \equiv 0 \pmod 3$, тада је

$$d = n - 2 \equiv 1 \pmod 3,$$

па је почетно растојање облика $3m+1$. Ана тада у првом потезу помери свој жетон за једно поље, па ново растојање постаје облика $3m$.

Ако је $n \equiv 1 \pmod 3$, тада је

$$d = n - 2 \equiv 2 \pmod 3,$$

па је почетно растојање облика $3m+2$. Ана тада у првом потезу помери свој жетон за два поља, па ново растојање постаје облика $3m$.

У оба случаја Ана својим првим потезом доводи игру у позицију из дела (а), само сада је на потезу Бојан. Зато је Бојан у губитничкој позицији.

Напомена. У суштини, у решењу смо издвојили победничке и губитничке позиције. Приметимо да свакој позицији у игри, одређеној растојањем d између жетона, можемо придружити атрибут *победничка* или *губитничка*. Кажемо да је позиција победничка ако играч који је на потезу из те позиције може да одигра тако да себи обезбеди победу уз оптималну игру, док је позиција губитничка ако, шта год да играч на потезу уради, противнику оставља победничку позицију.
Размотримо неколико вредности растојања d:

- $d = 1$ позиција је победничка, јер играч на потезу помери свој жетон за једно поље, жетони постају суседни и противник више нема дозвољен потез;
- $d = 2$ позиција је победничка, јер играч на потезу може да помери жетон за два поља и тиме завршава игру;
- $d = 3$ позиција је губитничка, јер играч на потезу може да пређе само у позиције за које је $d = 2$ или $d = 1$, чиме (у оба случаја) оставља противнику победничку позицију;
- $d = 4$ позиција је победничка, јер се једним потезом може прећи у позицију $d = 3$, чиме противник остаје у губитничкој позицији.

Оваквим разматрањем долазимо до следећих закључака (са П је означена победничка, а са Г губитничка позиција):

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
тип позиције	П	П	Г	П	П	Г	П	П	Г	П	$\cdots$

Докажимо да су губитничке позиције оне у којима је d дељиво са 3, док су све остале победничке. То доказујемо индукцијом по d. Већ смо проверили тврђење за $d = 1, 2, 3$. Претпоставимо сада да важи за сва растојања мања од неког d, и покажимо да тада важи и за d.

Из позиције са растојањем d, играч на потезу може да пређе само у позицију са растојањем $d-1$ или $d-2$, јер свој жетон може померити за једно или два поља ка противничком жетону.

- Ако је $d \equiv 0 \pmod 3$, онда $d-1$ и $d-2$ нису дељиви са 3, па су по индуктивној хипотези обе одговарајуће позиције победничке. Зато је позиција са растојањем d губитничка.
- Ако је $d \equiv 1 \pmod 3$, онда је $d-1 \equiv 0 \pmod 3$, па је по индуктивној хипотези позиција са растојањем $d-1$ губитничка. Дакле, позиција са растојањем d је победничка.
- Ако је $d \equiv 2 \pmod 3$, онда је $d-2 \equiv 0 \pmod 3$, па је по индуктивној хипотези позиција са растојањем $d-2$ губитничка. Дакле, позиција са растојањем d је победничка.

Тиме је индукција завршена, па смо доказали да су губитничке позиције управо оне за које је $d \equiv 0 \pmod 3$.

5. Након ослобађања од апсолутних вредности, у зависности од x, у изразу $|x-1| + |x-2| + ... + |x-2023| + |x-2024|$, неки од сабирака остају исти, док неки мењају знак. Зато ће дати израз имати облик

$$S = z_1(x-1) + z_2(x-2) + ... + z_{2023}(x-2023) + z_{2024}(x-2024),$$

где је $z_1, z_2, ..., z_{2023}, z_{2024} \in \{-1, 1\}$. Сада је

$$S = (z_1 + z_2 + ... + z_{2023} + z_{2024})x - (z_1 \cdot 1 + z_2 \cdot 2 + ... + z_{2023} \cdot 2023 + z_{2024} \cdot 2024). \qquad (1)$$

Ако је збир $z_1 + z_2 + ... + z_{2023} + z_{2024} = 0$, онда је број S рационалан, јер је једнак са $z_1 \cdot 1 + z_2 \cdot 2 + ... + z_{2023} \cdot 2023 + z_{2024} \cdot 2024$. Ако је збир $z_1 + z_2 + ... + z_{2023} + z_{2024} \neq 0$, онда број S не може бити рационалан, зато што из једнакости (1) добијамо $x = \frac{S+(z_1\cdot 1+z_2\cdot 2+...+z_{2023}\cdot 2023+z_{2024}\cdot 2024)}{z_1+z_2+...+z_{2023}+z_{2024}}$, па уколико је S рационалан број, број x је такође рационалан, као количник два рационална броја, што није могуће. Дакле, број S је рационалан једино када је $z_1 + z_2 + ... + z_{2023} + z_{2024} = 0$.

Како су бројеви $z_1, z_2, ..., z_{2023}, z_{2024} \in \{-1, 1\}$ последња једнакост је задовољена ако и само ако је међу бројевима $z_1, z_2, ..., z_{2023}, z_{2024}$ број оних који су једнаки 1 једнак броју оних који су једнаки -1, односно ако их има по 1012. Према томе, број S је рационалан ако и само ако је број x већи од тачно 1012 бројева из скупа $\{1, 2, ..., 2023, 2024\}$, односно ако и само ако је $x \in (1012, 1013)$. Тада је $z_1 = z_2 = ... = z_{1012} = 1$ и $z_{1013} = ... = z_{2023} = z_{2024} = -1$, па је на основу (1)

$$S = (\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{1012} \underbrace{-1 - 1 - ... - 1}_{1012})x - (1 + 2 + ... + 1012 - 1013 - 1014 - ... - 2024) =$$

$$= (1013 - 1) + (1014 - 2) + ... + (2024 - 1012) = 1012 \cdot 1012 = 1012^2. \qquad (2)$$

Овим смо коначно дешифровали да задати услов у проблему заправо значи да је

$$|x - 1| + |x - 2| + ... + |x - 2023| + |x - 2024| = 1012^2.$$

Да би комплетирали доказ датог тврђења остаје нам да докажемо да за сваки реалан број y важи неједнакост

$$|y - 1| + |y - 2| + ... + |y - 2023| + |y - 2024| \geq 1012^2. \qquad (2)$$

Нека су сада a и b произвољни реални бројеви за које важи $a < b$. Одредимо најмању вредност израза $|y - a| + |y - b|$. Разликоваћемо три случаја:

1. $y > b$. Тада је $|y - a| + |y - b| = (y - a) + (y - b) > y - a > b - a$.
2. $b \geq y \geq a$. Сада је $|y - a| + |y - b| = (y - b) + (b - y) = b - a$.
3. $a > y$. У овом случају имамо $|y - a| + |y - b| = (a - y) + (b - y) > b - y > b - a$.

На овај начин смо доказали да за сваки реалан број y важи неједнакост

$$|y - a| + |y - b| \geq b - a. \qquad (3)$$

Сада користећи неједнакост (3) добијамо

$$|y - 1| + |y - 2| + ... + |y - 2023| + |y - 2024| =$$

$$= (|y - 1| + |y - 2024|) + (|y - 2| + |y - 2023|) + ... + (|y - 1012| + |y - 1013|) \geq$$

$$\geq (2024 - 1) + (2023 - 2) + ... + (1013 - 1012) = 2023 + 2021 + ... + 1 =$$

$$= (2023 + 1) + (2021 + 3) + ... + (1013 + 1011) = 2024 \cdot 506 = 1012^2.$$

Овим смо доказали неједнакост (2), чиме смо употпунили доказ тврђења.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

26. април 2026. године

Четврти разред - Б категорија

1. Нека та три броја, у неком поретку, чине аритметички низ. Тада их можемо записати као $a-d$, a, $a+d$, где је $d \neq 0$.

Пошто ти исти бројеви, можда у другом поретку, чине и геометријски низ, један од њих мора бити средњи члан тог геометријског низа. За геометријски низ x, y, z важи $y^2 = xz$.

Размотримо све могућности.

Ако је средњи члан геометријског низа број a, онда би важило $a^2 = (a-d)(a+d) = a^2 - d^2$, одакле следи $d = 0$, што је немогуће јер су бројеви различити.

Ако је средњи члан геометријског низа број $a-d$, онда важи $(a-d)^2 = a(a+d)$. Сређивањем добијамо $a^2 - 2ad + d^2 = a^2 + ad$, односно $d^2 - 3ad = 0$. Пошто је $d \neq 0$, следи $d = 3a$, па је и $a \neq 0$.

Тада су та три броја једнака $a-d = -2a$, a и $a+d = 4a$. Они заиста могу да образују геометријски низ, на пример у поретку a, $-2a$, $4a$, са количником -2. Ако их узмемо у обрнутом поретку, $4a$, $-2a$, a, добијамо количник $-\dfrac{1}{2}$.

Ако је средњи члан геометријског низа број $a+d$, аналогно добијамо $(a+d)^2 = a(a-d)$, одакле следи $d = -3a$. То даје исти скуп бројева, само у другом поретку, па не добијамо ништа ново.

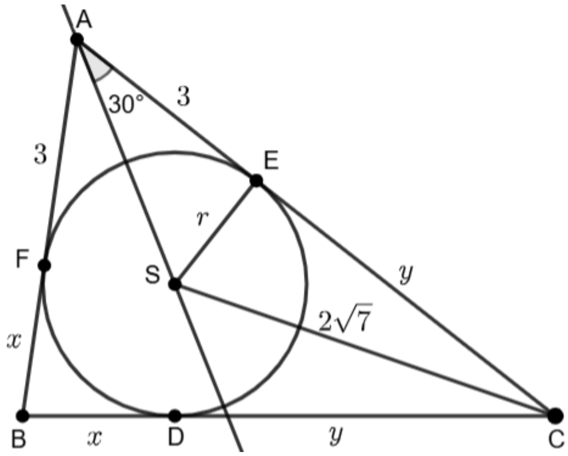
Према томе, једина могућа три броја су, до заједничког ненултог множиоца, облика -2, 1, 4. Зато су могуће вредности количника геометријског низа само -2 и $-\dfrac{1}{2}$.

Дакле, највећа могућа вредност тог количника је $-\dfrac{1}{2}$.

2. Из једнакости тангентних дужи добијамо да важи $|AF| = |AE| = 3$, $|BF| = |BD| = x$ и $|CE| = |CD| = y$.
Нека је $r = |ES|$ полупречник уписане кружнице троугла ABC. Како је AS симетрала угла $\angle EAF$, важи $\angle EAS = 30°$. Из троугла AES следи $r = 3 \operatorname{tg} 30° = \sqrt{3}$.
Применом Питагорине теореме на троугао CSE добијамо $y = 5$, па је $|AC| = 8$.
Према томе, странице троугла ABC су $a = 5 + x$, $b = 8$ и $c = 3 + x$, па је његов полуобим $s = 8 + x$.
Површину троугла ABC можемо изразити на три начина:

- Користећи Херонов образац добијамо $P = \sqrt{(8+x) \cdot 3 \cdot x \cdot 5} = \sqrt{15x(8+x)}$;
- Применом формуле $P = r \cdot s$ добијамо $P = \sqrt{3}(8+x)$;
- Из $P = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$ добијамо $P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (3+x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = (6+2x)\sqrt{3}$.

Изједначавањем било која два од претходна три израза за површину добијамо $x = 2$, одакле је $P = 10\sqrt{3}$.



3. Решење задатка је идентично решењу 4. задатка са Државног такмичења за трећи разред - Б категорија.

4. Јасно је да је $z \geq 1$. Нека је $L = 3^x + 6^y$ и $R = 2025^z$. Запишимо једначину као

$$3^x + 3^y \cdot 2^y = 3^{4z} \cdot 5^{2z}.$$

Размотримо следеће случајеве:

1° $x > y$: Тада је L дељив са 3^y, али није дељив са 3^{y+1}, а R је дељив са 3^{4z}, али није дељив са 3^{4z+1}, те је $y = 4z$. Дељењем обе стране једначине са 3^{4z} добијамо

$$3^{x-4z} + 2^{4z} = 5^{2z} \quad \Rightarrow \quad 3^{x-4z} = (5^z - 2^{2z})(5^z + 2^{2z}).$$

Следи да је $5^z - 2^{2z} = 3^a$ и $5^z + 2^{2z} = 3^b$, где су $b > a \geqslant 0$ цели бројеви и $a + b = x - 4z$. Међутим, $3^a + 3^b = 2 \cdot 5^z$ је број који није дељив са 3, а дељив је са 3^a, па је $a = 0$. Тада важи $5^z - 2^{2z} = 1$. Приметимо да $z = 1$ јесте решење, а за $z \geqslant 2$ је $5^z - 4^z = (5-4)(5^{z-1} + \cdots + 4^{z-1}) > 1$. Дакле, $z = 1$ и $y = 4$, одакле је $x = 6$.

2° $x < y$: Тада је L дељив са 3^x, али није дељив са 3^{x+1}, а R је дељив са 3^{4z}, али није дељив са 3^{4z+1}, те је $x = 4z$. Дељењем обе стране једначине са 3^{4z} добијамо

$$1 + 3^{y-4z} \cdot 2^y = 5^{2z} \quad \Rightarrow \quad 3^{y-4z} \cdot 2^y = (5^z - 1)(5^z + 1).$$

Приметимо да је разлика бројева $5^z - 1$ и $5^z + 1$ једнака 2, па један од њих није дељив са 3. Даље, важи $5^z + 1 \equiv 2 \pmod 4$, па број $5^z + 1$ није дељив са 4. Како је $5^z + 1 > 5^z - 1$, једина могућност је

$$5^z - 1 = 2^{y-1} \quad \text{и} \quad 5^z + 1 = 2 \cdot 3^{y-4z}.$$

Одузимањем претходне две једначине и дељењем са 2 добијамо $1 = 3^{y-4z} - 2^{y-2}$. Одавде је $2^{y-2} \equiv 2 \pmod 3$, па је y непаран. Због тога је $y - 4z$ непаран, па је $3^{y-4z} \equiv -1 \pmod 4$.
За $y \geqslant 4$ је $2^{y-2} \equiv 0 \pmod 4$, па добијамо $3^{y-4z} - 2^{y-2} \equiv -1 \pmod 4$. У случајевима $y \in \{0, 1, 2, 3\}$ директном провером закључујемо да нема целобројних решења.

3° $x = y$: Тада је $3^x + 6^x = 2025^z$. Запишимо једначину као

$$3^x(1 + 2^x) = 3^{4z} \cdot 5^{2z} \quad \Rightarrow \quad 1 + 2^x = 3^{4z-x} \cdot 5^{2z}.$$

Одавде је $x \geqslant 5$, па је $L = 3^x + 6^x \equiv (-1)^x \pmod 4$. С друге стране, $R = 2025^z \equiv 1 \pmod 4$, па је x парно. Тада је $1 + 2^x \equiv 1 + (-1)^x \equiv 2 \pmod 3$. Међутим, ово је немогуће пошто је $3^{4z-x} \cdot 5^{2z}$ потпун квадрат.

Дакле, једино решење постављене једначине је

$$(x, y, z) = (6, 4, 1).$$

5. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Претпоставимо супротно, тј. да важи $2 \in S$. Покажимо да $2026^k \notin S$ за свако $k \geqslant 1$, индукцијом по k.

База $k = 1$: Применимо услов за $n = 2$. Тачно један од $\{2, 4, 2026\}$ припада S. Пошто $2 \in S$, следи $2026 \notin S$.

Индуктивни корак: Претпоставимо $2026^k \notin S$. Применимо услов за $n = 2026^k$. Тачно један од $\{2026^k,\, 2 \cdot 2026^k,\, 1013 \cdot 2026^k\}$ припада S. Пошто $2026^k \notin S$, тачно један од $2 \cdot 2026^k$ и $1013 \cdot 2026^k$ припада S.

У случају да $2 \cdot 2026^k \in S$, применом услова за $n = 2 \cdot 2026^k$ на скуп $\{2 \cdot 2026^k,\, 4 \cdot 2026^k,\, 2026^{k+1}\}$, следи $2026^{k+1} \notin S$. Слично, ако $1013 \cdot 2026^k \in S$, применом услова за $n = 1013 \cdot 2026^k$ на скуп $\{1013 \cdot 2026^k,\, 2026^{k+1},\, 1013^2 \cdot 2026^k\}$, опет, следи $2026^{k+1} \notin S$.

Дакле $2026^{2026} \notin S$, што је у противречности са условом задатка. Претпоставка $2 \in S$ је нетачна, те $2 \notin S$.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Сваки природан број n се на јединствен начин може записати у облику $n = 2^a \cdot 1013^b \cdot k$, где су $a, b \geqslant 0$, а број k узајамно прост са 2 и 1013.

За фиксирано k, услов $|S \cap \{n, 2n, 1013n\}| = 1$ значи да је за свако (a, b) тачно један од бројева

$$2^a \cdot 1013^b \cdot k, \quad 2^{a+1} \cdot 1013^b \cdot k, \quad 2^a \cdot 1013^{b+1} \cdot k$$

у скупу S.

Пошто и број 2 и број $2026^{2026} = 2^{2026} \cdot 1013^{2026}$ одговарају случају $k = 1$, можемо да се ограничимо само на $k = 1$.

Придружимо броју $2^a \cdot 1013^b$ тачку (a, b) у целобројној мрежи (решетки). Тада услов из задатка постаје: у сваком скупу тачака облика $\{(a, b), (a+1, b), (a, b+1)\}$, где су $a, b \in \mathbb{N}_0$, изабрана је тачно једна тачка.

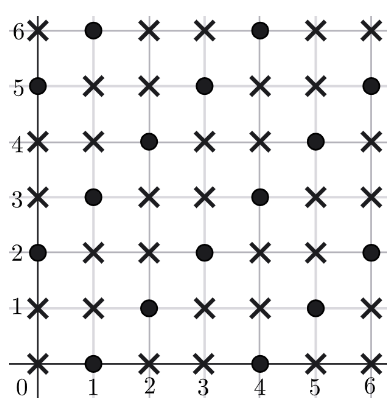
Претпоставимо $2 \in S$, тј. да је тачка $(1, 0)$ изабрана (јер је $2 = 2^1 \cdot 1013^0$). Тада:

- Пошто је тачка $(1, 0)$ изабрана, у скупу тачака $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$, тачно једна тачка сме бити изабрана. Дакле, тачке $(0, 0)$ и $(0, 1)$ нису изабране.

- Аналогно, посматрајући скуп $\{(1, 0), (2, 0), (1, 1)\}$, закључујемо да тачке $(2, 0)$ и $(1, 1)$ нису изабране.

- Даље, посматрајући скуп $\{(0, 1), (1, 1), (0, 2)\}$, закључујемо да мора бити изабрана тачка $(0, 2)$.

Настављајући на исти начин, добијамо целобројну мрежу као на слици испод (изабране тачке означене су са $\bullet$, а неизабране са $\times$).



Једноставном индукцијом се доказује да је тачка (a,b) изабрана ако и само ако важи $a-b \equiv 1 \pmod 3$.

Међутим, броју $2026^{2026} = 2^{2026} \cdot 1013^{2026}$ одговара тачка $(2026, 2026)$, а пошто је $2026 - 2026 \equiv 0 \pmod 3$, она није изабрана. Контрадикција!

Дакле, $2 \notin S$.