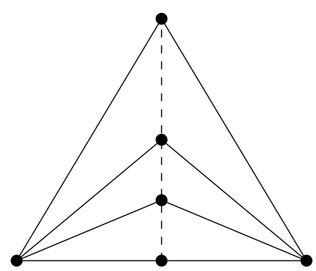
Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

26. април 2026.

Први разред - Б категорија

1. На следећој слици све централне тачке леже на једној правој, а доње три тачке су колинеарне. Тачно је 2024 троуглова чија су темена дате тачке, при чему свака три колинеарна темена не образују троугао.



Колико укупно има тачака на слици?

2. За природан број n, са $S(n)$ означавамо збир његових цифара. На пример, $S(327) = 3+2+7 = 12$. Израчунати вредност израза $A = S(1)-S(2)+S(3)-S(4)+\cdots+S(2025)-S(2026)$.

3. Милица, Александар, Чеда и Ненад живе на острву на коме постоје два племена: Лажковићи и Истинозборићи. Као што им називи кажу, Лажковићи увек говоре неистину, док Истинозборићи увек говоре истину. Они су се такмичили у решавању логичких задатака и познато је да је победник тог такмичења припадник племена Истинозборића. После такмичења дали су следеће изјаве:
Милица: Ни ја ни Чеда нисмо победили.
Александар: Ако је бар један од Чеде и Ненада припадник племена Лажковић, онда је Милица победила.
Чеда: Александар је победник и Ненад је Лажковић.
Ненад: Ако је Милица Лажковић, онда је Чеда победник.
Одредити победника такмичења и утврдити ком племену припада свако од ово четворо острвљана.

4. Нека је ABC оштроугли троугао. Означимо са D, E и F подножја висина из темена A, B и C, редом. Доказати да је $AF = CF$ ако и само ако су дужи DE и DF међусобно нормалне.

5. Наћи најмању вредност израза $|49^a - 6^b|$, где су a и b произвољни природни бројеви.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

26. април 2026.

Други разред - Б категорија

1. Решити једначину:

$$x^{\log_{10}^2 x+\log_{10} x^3+3} = \frac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}}.$$

2. Запис $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, који је састављен само од нула и јединица, називамо *бинарним* записом дужине $n+1$, односно записом са $n+1$ места, при чему је n природан број. Посматрајмо произвољан бинарни запис $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ дужине $n+1$. Рећи ћемо да је тај запис *дијадски* ако има паран број места и ако је збир првог и последњег броја једнак 1, збир другог и претпоследњег једнак 1, збир трећег и трећег отпозади, такође, једнак 1 и тако редом, тј. важи $a_0 + a_n = a_1 + a_{n-1} = a_2 + a_{n-2} = \cdots = 1$. На пример, запис $(1, 0, 0, 1, 1, 0)$ је дијадски, јер има 6 места ($n = 5$), а притом је $1 + 0 = 0 + 1 = 0 + 1 = 1$. Колико има бинарних записа дужине 16 који нису дијадски, али се могу поделити на 4 узастопна дијадска записа, од којих сваки има дужину 4?

3. Нека је n природан број и a_n број који се у декадном запису састоји од n цифара које су наизменично 7 и 3, почевши од цифре 7 слева. На пример, $a_3 = 737$ и $a_6 = 737373$. Одредити најмање n такво да $99|a_n$.

4. (а) Нека су a и b реални бројеви такви да је $a < b$. Доказати да за свако $y \in \mathbb{R}$ важи

$$|y-a| + |y-b| \geq b-a.$$

(б) Нека је x ирационалан број, такав да је број

$$|x-1| + |x-2| + ... + |x-2023| + |x-2024|$$

рационалан. Доказати да за произвољан реалан број y важи неједнакост

$$|y-1| + |y-2| + ... + |y-2023| + |y-2024| \geq |x-1| + |x-2| + ... + |x-2023| + |x-2024|.$$

5. Дат је оштроугли троугао ABC. Нека је H ортоцентар тог троугла. Нека су O_a, O_b и O_c центри описаних кружница троуглова HBC, HCA и HAB, редом. Доказати да су троуглови ABC и $O_aO_bO_c$ подударни.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

26. април 2026.

Трећи разред - Б категорија

1. Нека су a и b катете правоуглог троугла. Ако важи
$$\log_8 \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2}\big(\log_8 a + \log_8 b - \log_8 2\big),$$
одредити углове тог троугла.

2. У праву кружну купу уписана је лопта. Око те лопте описан је прав кружни ваљак чија основа припада равни основе дате купе. Нека је K запремина купе, а V запремина ваљка.
(а) Доказати да је $K \neq V$.
(б) Одредити највећи реалан број m такав да за сваку такву купу важи $K \geq mV$.

3. Одредити све парове $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, где је $\mathbb{N}$ скуп природних бројева, за које важи $5^x - 3^y = 16$.

4. Ана и Бојан играју игру на траци од $n \geqslant 3$ поља са по једним жетоном. На почетку, Анин жетон се налази на првом пољу, а Бојанов жетон на последњем пољу. Играчи играју наизменично. У сваком потезу, играч помера свој жетон за једно или два поља у правцу противниковог жетона. Жетон мора да стане на празно поље и није дозвољено прескакање противниковог жетона. Ана игра прва. Играч који не може да одигра потез губи. Доказати:
(а) Ако n даје остатак 2 при дељењу са 3, Бојан има победничку стратегију.
(б) Ако n даје остатак 0 или 1 при дељењу са 3, Ана има победничку стратегију.

5. Нека је x ирационалан број, такав да је број
$$|x-1| + |x-2| + ... + |x-2023| + |x-2024|$$
рационалан. Доказати да за произвољан реалан број y важи неједнакост
$$|y-1| + |y-2| + ... + |y-2023| + |y-2024| \geq |x-1| + |x-2| + ... + |x-2023| + |x-2024|.$$

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

26. април 2026.

Четврти разред - Б категорија

1. Три различита реална броја, у неком поретку, чине аритметички низ од три члана, а такође, можда у другом поретку, чине геометријски низ од три члана. Одредити највећу могућу вредност количника тог геометријског низа.

2. Дат је троугао ABC чији је центар уписане кружнице означен са S. Кружница додирује странице троугла у тачкама $D \in BC$, $E \in AC$ и $F \in AB$. Ако је $|AE| = 3$, $|CS| = 2\sqrt{7}$, а мера угла $\sphericalangle BAC = 60^\circ$, израчунати површину троугла ABC.

3. Ана и Бојан играју игру на траци од $n \geqslant 3$ поља са по једним жетоном. На почетку, Анин жетон се налази на првом пољу, а Бојанов жетон на последњем пољу. Играчи играју наизменично. У сваком потезу, играч помера свој жетон за једно или два поља у правцу противниковог жетона. Жетон мора да стане на празно поље и није дозвољено прескакање противниковог жетона. Ана игра прва. Играч који не може да одигра потез губи. Доказати:

(а) Ако n даје остатак 2 при дељењу са 3, Бојан има победничку стратегију.

(б) Ако n даје остатак 0 или 1 при дељењу са 3, Ана има победничку стратегију.

4. Одредити све тројке $(x, y, z) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, где је $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, при чему је $\mathbb{N}$ скуп природних бројева, за које важи $3^x + 6^y = 2025^z$.

5. Нека је S скуп позитивних целих бројева такав да за сваки позитиван цео број n важи

$$|S \cap \{n,\, 2n,\, 1013n\}| = 1.$$

Познато је да $2026^{2026} \in S$. Доказати да $2 \notin S$.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.