

**ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА
СРБИЈЕ**

**МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА
СРЕДЊОШКОЛАЦА
ШГ: 2025/2026.**

**Универзитет у Београду, Математички факултет
- април 2026. -**

**Организацију 67. Државног такмичења из математике
за ученике средњих школа у Републици Србији –
Б категорија, су помогли:**

- Министарство просвете Републике Србије
- Друштво математичара Србије (ДМС)
- Универзитет у Београду, Математички факултет

Организациони одбор Државног такмичења:

- doc. dr Dragan Đokić, Matematički fakul tet, Beograd
- Veško Irović, Друштво математичара Србије, potpredsednik DMS
- Radoslav Bojić, Друштво математичара Србије, član I O DMS
- Danijela Ivojinović, Универзитет у Београду, Matematički fakul tet
- Ogen Texić, Универзитет у Београду, Matematički fakul tet
- doc. dr Mićan Knežević, Matematički fakul tet, Beograd

Почасни одбор Државног такмичења:

- prof. dr Zoran Kadelburg, Универзитет у Београду, Matematički fakul tet, profesor emeritus
- prof. dr Dragojub Kečkvić, Универзитет у Београду, Matematički fakul tet - v.d. dekana Fakulteta
- prof. dr Mićoslav Marić, Универзитет у Београду, Matematički fakul tet - predsednik DMS



УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ -

Beograd je glavni grad Republike Srbije i jedno najveće naučno, obrazovno i kulturno središte. Kao univerzitetski centar sa dugom tradicijom, on okuplja brojne značajne ustanove koje imaju važnu ulogu u razvoju nauke, obrazovanja i društva u celini. Među njima posebno mesto pripada Univerzitetu u Beogradu, najstarijoj i najuglednijoj visokoškolskoj ustanovi u našoj zemlji.

Univerzitet u Beogradu zauzima posebno mesto zahvaljujući Matematičkom fakultetu, ustanovi koja koreni se u do 1873. godine, kada je osnovana prva katedra za matematiku na tadašnjoj Velikoj školi. Tokom dugog i storijskog razvoja, ova tradicija je rasla i jačala, a Matematički fakultet je 1995. godine postao samostalna visokoškolska ustanova. Danas on predstavlja jedan od najznačajnijih centara za proučavanje i razvoj matematike, informatike, astronomije i astrofizike u Srbiji.

Na Fakultetu danas studira oko 2400 aktivnih studenata na osnovnim, master i doktorskim studijama, dok nastavu i naučnu istraživačku rad izvodi preko 130 nastavnika, saradnika i asistenta. Pored studijskih tema njihova, studenti razvijaju preciznost u mišljenju, logičko rasuđivanje i sposobnost rešavanja složenih problema, što ih čini veoma uspešnim u različitim profesijama. Bivši studenti Matematičkog fakulteta danas rade u školama, na univerzitetima, u naučnim ustanovama, IT sektoru i brojnim kompanijama u zemlji i inostranstvu.

Poseban ugled Fakulteta potvrđuju i značajna naučna dostignuća njegovih nastavnika i istraživača. Iz njegove akademske sredine poteklo je i deset članova Srpske akademije nauka i umetnosti - SANU, što svedoči o visokom nivou naučnog rada koji se na Fakultetu neguje decenijama. Istovremeno, Fakultet ostaje okrenut savremenim tokovima, unapređujući nastavu, razvoju međunarodne saradnje i povezivanju sa prirodom.



Zahva uju i spoju bogate tradicije i savremenog pristupa obrazovanju i nauci, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu danas je prepoznat kao jedna od vodećih institucija u oblasti matematičkih nauka u Srbiji i širom regionu, a njegova diplomatura i va ugled i priznanje i u zemlji i u inostranstvu.



U Beogradu, 26. aprila 2026. godine

*
* * *
* * * * *

РЕПУБЛИЧКА КОМИСИЈА

за такмичења из математике ученика средњих школа

- школска година 2025/2026. -

1. Dragan Azdejkovi , Ekonomski fakul tet, Beograd
2. Jovan Ari zanovi , Matemati qki fakul tet, Beograd
3. Vl adi mi r Bal ti , VI X ER, Beograd
4. Voji n Boji , Matemati qki fakul tet, Beograd
5. Teodor von Burg, Matemati qka gi mnazi ja, Beograd
6. Al eksandar Vi x i , Matemati qki fakul tet, Beograd
7. Nema a Vuqi evi , PMF, Kragujevac
8. Mi l an Gel i , Matemati qki fakul tet, Beograd
9. Strahi a Gvozdi , ETH - Ci ri h, X vajcarska
10. Vukaxi n i novi , PMF, Novi Sad
11. Andri ja i vadi novi , Uni verzi tet u Kembri u, Vel i ka Bri tani ja
12. Dani ca Zezevi , Matemati qka gi mnazi ja, Beograd
13. Al eksandar Jovi , Matemati qki fakul tet, Beograd
14. Enes Kaqapor, DUNP, Novi Pazar
15. Mi l uti n Koji , Gi mnazi ja „Urox Predi ", Panqevo
16. Mi an Kne evi , Matemati qki fakul tet, Beograd - predsednik
17. Petar Markovi , PMF, Novi Sad
18. Pavl e Marti novi , Matemati qki fakul tet, Beograd
19. Mi lox Mi l i ev, Matemati qki fakul tet, Beograd
20. Al eksandra Mi l osav evi , PMF, Kragujevac
21. Mi lox Mi l osav evi , Gi mnazi ja „Svetozar Markovi ", Ni x
22. Danka Mi ri l ovi , ETX „Ni kol a Tesl a", Panqevo
23. Vukaxi n Pantel i , Matemati qki fakul tet, Beograd
24. Nevena Petrovi , PMF, Kragujevac
25. I van Pexi , Matemati qka gi mnazi ja, Beograd
26. Stevan Radi vojevi , Matemati qki fakul tet, Beograd
27. Marek Svetl i k, Matemati qki fakul tet, Beograd
28. or e Staki , Ekonomski fakul tet, Beograd
29. Bori s Stankovi , Matemati qki fakul tet, Beograd
30. Mi lox Stojakovi , PMF, Novi Sad
31. I a Uzel ac Buji xi , Matemati qki i nsti tut - SANU, Beograd
32. Og en Texi , Matemati qki fakul tet, Beograd
33. Urox Col ovi , Uni verzi tet u Oksfordu, Vel i ka Bri tani ja
34. Vl adi mi r X ari , Matemati qka gi mnazi ja, Beograd

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, 31. 01. 2026.

Први разред – А категорија

1. Neka su a, b, c, d i e cel i brojevi za koje važi $a \neq b \neq c \neq d \neq e \neq a$. Odredi ti najmanju moguću vrednost izraza $I = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$.

2. Neka su a_1, a_2, \dots, a_n različiti brojevi iz skupa $\{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Dokazati da je

$$(a_1 - 1) + (a_2 - 2)^2 + \dots + (a_n - n)^n$$

uvek paran broj.

3. Dve kružnice k_1 i k_2 , koje se seku u dve različite tačke, imaju zajedničku tetivu AB . Neka je tačka P izabrana na kružnici k_1 i neka se nalazi u spojnici kružnice k_2 . Prave PA i PB seku po drugi put kružnicu k_2 , redom, u tačkama X i Y . Pokazati da je, bez obzira na izbor tačke P , dužina dužine XY konstantna.

4. Napiši sve prirodne brojeve, koji su stepeni broja 3 i koji se u bazi sa osnovom 12 zapisuju samo uz pomoć cifara 6 i 9.

5. Brojevi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8 su podeleni u tri disjunktne i neprazne skupe. Neka su P_1 , P_2 i P_3 proizvodi brojeva u prvom, drugom i trećem skupu, redom, i neka je P najveći od ta tri broja. Odredi ti najmanju moguću vrednost broja P .

Други разред – А категорија

1. Dat je broj $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[4]{2}$.

(a) Da li je broj α racionalan?

(b) Dokazati da postoji nekonstantan polinom $P(x)$, sa celim koeficijentima, takav da je $P(\alpha) = 0$.

2. Dokazati da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n za koje je

$$\sin(n^\circ) = \sin(\sqrt{n}^\circ).$$

3. Na xahovskom turniru igraju n igrača, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Svaki takmičar igra sa svakim takmičarem na turniru tačno po jedan put. Za svaku partiju

svaki takmičar dobija 0 poena za svaki poraz, 0.5 poena za svaki remi i 1 poen za svaku pobjedu. Odredi ti najveći mogući broj nerazrešenih partija, tako da svaki takmičar ima ceo broj poena.

4. Dat je trougao ABC čiji je centar upisane kružnice tačka I . Ta kružnica dodiruje prave AB i AC u tačkama E i F , redom. Prava EF seče pravu BC u tački H . Kružnice k_1 i k_2 prolaze kroz tačku H i dodiruju pomenutu upisanu kružnicu u tačkama E i F , redom. Ako je O drugi presek kružnica k_1 i k_2 , dokazati da je $\angle HOI = 90^\circ$.

5. Na tabli je napisan broj 2. Nakon svakog minuta sa table se briše broj x , koji je u tom trenutku napisan na tabli, i zapiše tačno jedan od brojeva $x + 7$, x^{10} ili $x + 1001$. Da li je moguće da u nekom trenutku na tabli bude napisan broj:

(a) $2024^{2024} + 2025$?

(b) 2025?

Трећи разред – А категорија

1. Neka je A kvadratna matrica, sa celim brojevima, dimenzija 2023×2023 . Dokazati da je determinanta matrice $A + 2024 \cdot A^T$ deliva sa 2025, gde je sa A^T označena transponovana matrica matrice A .

2. Odredi ti sve kompleksne brojeve z , $z \neq 0$, takve da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$\left| z^n + \frac{1}{z^n} \right| = \left| z + \frac{1}{z} \right|.$$

3. Reši ti jednačinu $10^x + 2^y = 5202^z$ u skupu prirodnih brojeva.

4. Dat je trougao ABC i proizvoljna tačka D na njegovoj upisanoj kružnici, različit od temena tog trougla. Sa M , N i P označimo, redom, središta duži AB , BC i CA , a sa E označimo središte duži CD . Ukoliko je tačka F takva da je četvorougao $MDEF$ paralelogram, dokazati da je četvorougao $MNPF$ teti van.

5. Neka je dato k , $k \in \mathbb{N}$, ne nužno različiti prirodni brojevi a_1, a_2, \dots, a_k , koji su veći od 1. Sa n označimo proizvod $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k$. Za svako $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ particioniramo skup $\{1, 2, \dots, n\}$ na a_i skupova jednake veličine (svi skupovi koji učestvuju u particionisanju su međusobno disjunktni i svaki ima po $\frac{n}{a_i}$ elemenata). Dokazati da je moguće izvršiti particionisanje tako da, kako god odabrali po tačno jedan skup iz svakog

od pomenutih k partitici oni sa a , postoji tačno jedan element koji se nalazi u svim odabranim skupovima.

Четврти разред – А категорија

1. Na sl uqajan naqin se biraju tri razli qi ta temena date kocke. Kol i ka je verovatno a da i zabrana temena predstav aju ujedno i temena pravougl og trougl a?

2. Neka su a, b i c poziti vni realni brojevi takvi da va i $a + b + c = 1$. Na i najve u mogu u vrednost i zraza

$$S(a, b, c) = a \log(1 + b) + b \log(1 + c) + c \log(1 + a).$$

3. Rexi ti jednaqinu $n! + n = n^m$ u skupu prirodni h brojeva.

4. Dat je trougao ABC sa centrom opisane kru ni ce u taqki O . Taqka D , koja pripada pravoj BC , je takva da su taqke A, O i D kol i nearne, a razli qi te taqke E i F su odabrane na pravoj BC tako da je $DE = DA = DF$. Ako je taqka G drugi presek kru ni ca opisani h oko trougl ova ABE i ACF , a taqka H drugi presek kru ni ca opisani h oko trougl ova ABF i ACE , dokazati da je $GH \perp BC$.

5. Neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Na kru ni ci se nal azi n razli qi ti h taqaka. Izlom ena l i ni ja je *dobra* ukol i ko se sastoji od $n - 1$ du i i sadr i svaku od n taqaka na kru ni ci , a ne preseca samu sebe. U zav i snosti od n , odredi ti broj dobri h i zl om eni h l i ni ja.

Први разред – Б категорија

1. Neka su a, b i c cel i brojevi za koje va i $a \neq b \neq c \neq a$. Odredi ti najma u mogu u vrednost i zraza $I = a^2 + b^2 + c^2$.

2. Za funkciju f defi ni xi mo $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$, za svako $n \in \mathbb{N}$, pri qemu je $f^1(x) = f(x)$. Ako je $f(x) = -\frac{4}{x+2}$, $x \neq -2$, odredi ti $f^{2025}(2025)$.

3. Da li postoji ci fra $a \in \{0, 1, \dots, 9\}$ tako da je broj $\overline{2a0a2a5}$ barem drugi stepen nekog prirodnog broja?

4. Dokazati da prava deli dati pravougaonik na dva dela jednakih površina ako i samo ako prolazi kroz presek dijagonala tog pravougaonika.

5. Neka su $a_1, a_2, \dots, a_{2025}$ različiti brojevi iz skupa $\{1, 2, \dots, 2025\}$. Dokazati da je

$$(a_1 - 1)^2 + (a_2 - 2)^2 + \dots + (a_{2025} - 2025)^2$$

uvek paran broj.

Други разред – Б категорија

1. Odredi ti sve vrednosti realnog parametra a za koje jednačina $(a-1)x^2 + ax + 2 = 0$ ima oba rešenja u intervalu $(1, 2)$.

2. U skupu kompleksnih brojeva reši ti jednačinu

$$z^3 + |z|^2 + \operatorname{Re} z = 0.$$

3. Poznato je da je $n! = 2432902008176640000$, za neko $n \in \mathbb{N}$. Odredi ti n .

4. Dve kružnice k_1 i k_2 , koje se seku u dve različite tačke, imaju zajedničku tetivu AB . Neka je tačka P izabrana na kružnici k_1 i neka se nalazi u spojnici kružnice k_2 . Prave PA i PB seku kružnicu k_2 , redom, u tačkama X i Y . Ako je $AB = 6$, $PA = 5$, $PB = 7$ i $AX = 16$, odredi ti dužinu dužine XY .

5. Da li se brojevi $1, 2, 3, \dots, 9$ mogu rasporediti na kružnici tako da među susedima svaka dva susedna broja nemaju zajedničkih delitelja 3, 5, 7?

Трећи разред – Б категорија

1. Odredi ti minimalnu vrednost funkcije f , gde je

$$f(x) = (3 \sin x - 4 \cos x - 10)(3 \sin x + 4 \cos x - 10), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Reši ti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x^{\ln y} + y^{\ln x} &= 2 \\ x^{\ln x} + y^{\ln y} &= e + 1, \end{aligned}$$

pri čemu je $x > 0$ i $y > 0$ ($\ln a = \log_e a$, $a > 0$).

3. Nađi sve proste brojeve p , q i r takve da važi $p^2 + q^3 = r^4$.
4. Dat je pravougli trougao ABC sa pravim uglom kod temena C . Neka su $ABPQ$, $BCRS$ i $CATU$ kvadrati konstruisani nad stranicama datog trougla sa egove spoax e strane. Ako je $PS = 58$, a $QT = 59$, izračunati dužinu dužine AB .
5. Na neka polja table veličine 88×88 postavljene su etoni. eton se može ukloniti sa table ako je najmanje polovina polja u egovoj vrstici ili egovoj kolonici prazna. Koliki je minimalan (pozitivni) broj etona potreban da bude na tablici, tako da nijedan eton ne može biti uklonjen sa table?

Четврти разред – Б категорија

1. Odredi ti jednačinu prave koja sadrži datu tačku $A(2,1)$, koja seče obe koordinatne ose sa pozitivne strane i sa imaj gradi trougao najmanje površine.

2. Predstavi ti skupove A i B u kompleksnoj ravni, pri čemu je

$$A = \{z \mid z - \bar{z} + i = 0\} \text{ и } B = \{z \mid \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z-1}\right) = 1\}.$$

Odredi ti, zatim, sva rešenja sistema jednačina $z - \bar{z} + i = 0$ i $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z-1}\right) = 1$.

3. U skupu prirodnih brojeva reši ti jednačinu $n! + n = n^n$.

4. U raznostraničnom trouglu ABC simetrala unutrašnjeg ugla kod temena A seče stranicu BC u tački D . Ako simetrala dužine AD seče pravu BC u tački E , dokazati da je prava AE ujedno i tangenta na opisanu kružnicu oko trougla ABC .

5. Na xahovskom turniru igraju n igrača, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Svaki takmičar igra sa svakim takmičarem na turniru tačno po jedan put. Za svaku partiju svaki takmičar dobija 0 poena za svaki poraz, 0.5 poena za svaki remi i 1 poen za svaku pobjedu. Odredi ti najveći mogući broj nerazrešenih partija, tako da svaki takmičar ima ceo broj poena.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, 28. 02. 2026.

Први разред – А категорија

1. Data je relacija $\varrho = \{(a, b) \in A \times A : (a^2 - b^2)(ab - 1) = 0\}$ na skupu A , gde je $A = \{0, 1, -1, 2, \frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}\}$.

(a) Da li je relacija ϱ refleksi vna, simetrična, antisimetrična i tranzitivna?

(b) Ispitati da li je ϱ relacija ekvivalencije. U slučaju da nije, odrediti barem jedan skup $\varrho_1 \subset A \times A$ takav da je relacija $\varrho \cup \varrho_1$ relacija ekvivalencije.

2. Dat je trougao $\triangle ABC$ i tačka X u njegovoj ravni. Tačke A, B i C su preslikane centralnom simetrijom u odnosu na tačku X u tačke A', B' i C' , redom. Neka su M, N i P središta duži AB', BC' i CA' , redom. Dokazati da je tačka X težištem trougla $\triangle MNP$.

3. Na tabli je zapisan broj 2025. Ana i Bojan igraju sledeću igru, naizmenično vuku i poteze: Potez se sastoji od brišanja napisanog broja i zamenjivanja istog sa razlikom tog broja i neke njegove cifre koja nije nula (i graq sam bi ra cifru). Pobednik je onaj koji napiše 0 na tabli. Ako Ana igra prva, odrediti koji igraq ima pobedničku strategiju.

4. Perica je za svaki prirodan broj na tabli napisao ostatak pri deljenju tog broja sa zbirom svojih cifara u dekadnom zapisu. Da li je na ovaj naqin Perica na tabli napisao svaki prirodan broj?

5. Odrediti sve parove $(a, b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, gde je $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, za koje važi

$$1 + 3^a + 2025^b = 2027^b.$$

Други разред – А категорија

1. Neka su x, y i z pozitivni realni brojevi takvi da je $xy + yz + zx = 3$. Dokazati nejednakost:

$$\frac{2x^2 + yz}{zx + xy} + \frac{2y^2 + zx}{xy + yz} + \frac{2z^2 + xy}{yz + zx} \geq 6.$$

Kada važi znak jednakosti?

2. Dat je teti van qetvorougao $ABCD$ sa ugl ovi ma $\angle A = \alpha$ i $\angle B = \beta$. Taqke E i F su sredi xta strani ca AB i CD , redom. Neka postoji taqka G na du i EF takva da je $\frac{EG}{GF} = \frac{AB}{CD}$, kao i $AG = CG$. Odredi ti vel i qi nu $\angle AGC$.

3. Neka je n pri rodan broj. Odredi ti najma e k sa sl ede im svojstv om: I z proi zvo nog ni za a_1, \dots, a_n , gde $a_i \in \{0, 1\}$, $1 \leq i \leq n$, je mogu e, i z baci va em najvi xe k ql anova, dobi ti ni z koj em je zbi r ql anova na parni m pozi ci jama jednak zbi ru ql anova na neparni m pozi ci jama.

4. Neka je $A = \{1, 2, \dots, 2025\}$ dati skup i $f : A \rightarrow A$ data funkci ja. Defi ni xi mo $f^0(x) = x$ i $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$, za $k \in \mathbb{N}$, $x \in A$. Dokazati jednakost skupova $\{f^{2024}(1), f^{2024}(2), \dots, f^{2024}(2025)\} = \{f^{2025}(1), f^{2025}(2), \dots, f^{2025}(2025)\}$.

5. Dokazati da 20-oci freni pri rodan broj, koji poqi e sa 11 jedi ni ca sl e va, ne mo e bi ti kvadrat nekog pri rodno g broja.

Трeћи разред – А категорија

1. Na i sve funkci je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ va i $f(x(x+y)) = x^2 + yf(x)$.

2. Dat je teti van qetvorougao $ABCD$. Di jagonal e AC i BD se seku u taqki E , a prave AD i BC se seku u taqki F . Neka je G sredi xte luka CD kru ni ce opi sane oko qetvorougl a $ABCD$, koji ne sadr i taqke A i B . Ako su taqke E, F i G kol i nearne, dokazati da je qetvorougao $ABCD$ jednakokraki trapez.

3. Neka je (a_n) ni z real ni h brojeva za koji je $a_0 = 0$ i

$$a_{n+1} = 45a_n + \sqrt{2024a_n^2 + 1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dokazati da je svaki ql an ni za (a_n) ceo broj i da 90 del i a_{2n} , za sve pri rodne brojeve n .

4. Neka je $p > 2$ prost broj i $(a_1, a_2, \dots, a_{p-1})$ permutaci ja brojeva $\{1, 2, \dots, p-1\}$. Kol i ko najvi xe od brojeva $a_1a_2, a_2a_3, \dots, a_{p-2}a_{p-1}, a_{p-1}a_1$ mo e da daje isti ostatak pri de e u sa p ?

5. U moru Enmore, nal azi se n ostrva, pri qemu se na i -tom ostrvu nal azi grad sa i menom i -grad. Svi ovi gradovi zajedno qi ne dr avu Entiju. Prevozn i k Entransport organi zuje pol aske iz i -grada do j -grada ako i samo ako va i $(i+j, n) > 1$ (gde sa (x, y) oznaqavamo najve i zajedni qki del i l ac brojeva x i y). Odredi ti sve pri rodne brojeve n za koje va i da se iz bi lo kog grada mo e do i u bi lo koji drugi grad.

Четврти разред – А категорија

1. Postoje li različiti $m, n \in \mathbb{N}$, pri čemu je:

(a) $m^{\tau(m)} = n^{\tau(n)}$?

(b) $m^{\tau(n)} = n^{\tau(m)}$?

Sa $\tau(a)$ smo označili ukupan broj pozitivnih delilaca prirodnog broja a .

2. (a) Dokazati da za svaki polinom $P(x)$, sa realnim koeficijentima, postoji odgovarajući polinom $Q(x)$ takav da je $P(x) = Q(x+1) - Q(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) Dokazati da je za svaka dva polinoma $Q_1(x)$ i $Q_2(x)$ koji odgovaraju polinomu $P(x)$, tj. za koje je ispunjeno $P(x) = Q_1(x+1) - Q_1(x) = Q_2(x+1) - Q_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$, važi da je polinom $Q_2(x) - Q_1(x)$ konstantan.

3. Dat je trougao ABC . Odegovarajućim kružnicama, sa centrom u tački I , dodiruje stranicu AB u tački D . Neka je F tačka na visini iz temena A , takva da je $AF = AD$. Dokazati da se prava kroz I paralelna sa pravom BC i prava DF seku na upisanom kružnici trougla ABC .

4. Perica je odabrao realne brojeve a, b i c i skicirao grafičke funkcije $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, koje su zadate sa $f(x) = ax^2 + bx + c$ i $g(x) = cx^2 + bx + a$, za svako $x \in \mathbb{R}$. Nakon toga izradio je koordinatne ose (videti sliku) ravni u kojoj su ti grafički skicirani.



Konstruisati koordinatne ose.

5. Nikola i Marko igraju igru sa gomilom od N novčića. U i -tom potezu, igrač može da uzme najviše i novčića (mora bar 1). Pobeđuje onaj koji uzme poslednji novčić. Ako Nikola igra prvi, odredi ti koji ima pobedničku strategiju u zavisnosti od N .

Први разред – Б категорија

1. Data je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, koja je definisana sa

$$f(x) = \begin{cases} |x+1|, & x \leq -1, \\ -2x+a, & x > -1. \end{cases}$$

(a) Da li postoji realan broj a takav da je f bijekcija?

(b) Ako postoji takvo a , odredi ti f^{-1} .

2. Relacija ρ , na skupu prirodnih brojeva \mathbb{N} , definisana je sa: $x \rho y \iff x + y \in P$, gde smo sa P obelje ili skup svih prostih brojeva. Dokazati da ne postoji 2027 različitih prirodnih brojeva $a_1, a_2, \dots, a_{2026}, a_{2027}$ takvih da važi $a_1 \rho a_2 \rho a_3 \rho \dots \rho a_{2026} \rho a_{2027} \rho a_1$.

3. Dat je trougao ABC . Neka su tačke D i E sredista stranica AB i AC , redom, a h_a visina iz temena A na pravu BC . Označi mo sa F presek opisane kružnice trougla ADE sa visinom h_a , a sa H presek prave koja prolazi kroz tačke D i F sa pravom BC . Dokazati da tačke A, F, H i C leže na jednoj kružnici.

4. Na i maksimalan broj elemenata skupa $\{1, 2, \dots, 2n\}$ koje možemo izabrati tako da među izabranima ne postoje neka dva elementa, reci mo a i b , tako da je $\text{NZD}(a, b) = 1$.

5. Perica je dobio beskonaqne kol i qi ne kartona na koji ma pi xe broj 20 i beskonaqne kol i qi ne kartona na koji ma pi xe broj 25. Spaja em ovi h kartona na proizvoljan naqin, on mo e dobiti razli qi te prirodne brojeve, npr. 25, 2025, 202520 i td. Mo e li Perica spaja em konaqno mnogo kartona dobiti broj koji je kub nekog prirodnog broja?

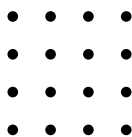
Други разред – Б категорија

1. Neka su a, b i c cel i brojevi i $a \neq 0$. Koje sve vrednosti mo e imati diskriminanta kvadratne funkcije

$$f(x) = ax^2 + bx + c?$$

2. Odredi ti sve parove cel i h brojeva (x, y) koji predstavljaju rešenja jednaqine $y = 2x^2 + 5xy + 3y^2$.

3. Data je kvadratna rešetka 4×4 saqinena od 16 taqaka (videti sliku). Kol i ko i ma trouglova sa temenima u ovim taqkama?



4. Neka su P i Q središta kraćih lukova AB i AC kružnice opisane oko trougla ABC , a s_α simetrala unutrašnjeg ugla $\angle BAC$. Dokazati da važi $PQ \perp s_\alpha$.

5. Za prirodan broj n označimo sa $n!_0$ prirodan broj koji se dobija odbacivanjem svih nulā koje se nalaze na kraju dekadnog zapisa broja $n!$ (npr. $4!_0 = 24$, $7!_0 = 504$). Reši ti jednačinu

$$a!_0 = 12 + b!_0$$

u skupu prirodnih brojeva.

Трећи разред – Б категорија

1. U trouglu ABC uglovi kod temena A , B i C označeni su sa α , β i γ , redom. Ako važi

$$\cos \gamma = 2 \sin \alpha \sin \beta - 1,$$

dokazati da je taj trougao jednakokraki.

2. Dokazati da su vektori $\vec{x} = (1, a, a^2)$, $\vec{y} = (1, b, b^2)$ i $\vec{z} = (1, c, c^2)$ li nearno nezavisni ako i samo ako su a , b i c po parovima različiti (tj. $a \neq b \neq c \neq a$).

3. Dat je tetivan četvorougao $ABCD$. Prave AC i BD se seku u tački E , a prave AD i BC se seku u tački F . Neka je G središte luka CD kružnice opisane oko $ABCD$ koji ne sadrži tačke A i B . Ako su tačke E, F i G kolinearne, dokazati da je četvorougao $ABCD$ jednakokraki trapez.

4. Odredi ti sve trojke $(x, y, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ za koje važi

$$x^{2024} + 2025^y = 2026^z.$$

5. Da li je moguće svaku tačku koordinatne ravni obojiti u jednu od 2025 boja, tako da postoji tačka u svakoj od ovih boja i da je grafik svakog polinoma sa celobrojnim koeficijentima jednobojan?

Четврти разред – Б категорија

1. Odredi ti sve $a, b \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ takve da je broj $1 + 2^a + 2025^b$ stepen nekog parnog prirodnog broja, pri čemu je taj stepen prirodan broj veći od 1.

2. Data je funkcija $f_k(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + k(\sin^4 x + \cos^4 x)$, gde je k neki realan broj.

(a) Odredi ti domen funkcije f .

(b) Odredi ti sve k takve da je $f_k(x) \leq 0$ na celom domenu.

(v) Odredi ti sve k za koje je $f_k(x)$ konstantna funkcija na celom domenu i za tako dobijeno k odredi ti $f_k(2026)$.

3. Dužine stranica trougla ABC su $BC = 4$ i $AC = 5$, a dužina delatice međutrale ugla $\angle ACB$, koji se nalazi unutar trougla, je $s = \frac{10}{3}$. Izračunati dužinu stranice AB .

4. Da li je moguće svaku tačku koordinatne ravni obojiti u jednu od 2026 boja, tako da postoji tačka u svakoj od ovih boja i da je grafik svakog polinoma sa celobrojnim koeficijentima jednobojan?

5. Neka su $a = \log_6 30$ i $b = \log_{15} 24$ dati pozitivni realni brojevi. Poznato je da važi

$$\frac{2ab + 2a - 1}{ab + b + 1} = \log_m n,$$

gde su m i n prirodni brojevi. Ako je $n = 3600$, odredi ti vrednost izraza $2m + n$.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ,
A категорија, Математичка гимназија - Београд, 28. 03. 2026.

Први разред

1. Da li postoji polinom $P(x)$ sa celobrojnim koeficijentima takav da za getiri, po parovima razliqita, cela broja a, b, c i d važi $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 2024$, kao i:

(a) $P(e) = 2028$, za neki ceo broj e ?

(b) $P(e) = 2026$, za neki ceo broj e ?

2. Dat je trougao ABC . Oznaqimo sa k egovim opisanim kružnicu sa centrom u tački O . Konstruisati tačku D na kružnici k tako da su težišta trouglova ABC i ABD tačke kolinearne sa tačkom O .

3. Neka je $S(x)$ zbir cifara prirodnog broja x u dekadnom zapisu.

(a) Odredi ti najmanji element skupa $\{S(11n^2 + n + 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(b) Dokazati da se za beskonačno mnogo prirodnih brojeva n dostiže jedna najmanja vrednost (koja je određena u prvom delu zadatka).

4. Posmatramo konačan niz od ukupno n brojeva, $n \in \mathbb{N}$, gde je svaki 1 ili 0. U jednom potezu, uziavamo dva susedna broja, recimo x i y , obrnemo ih, i na njihovim mestima upisujemo samo jedan broj, $x + y \pmod{2}$. Za koje najveće k (u funkciji od n) možemo da garantujemo, da nakon primene nekoliko ovakvih poteza, možemo da dobijemo barem k uzastopnih međusobno jednakih brojeva?

Други разред

1. Neka su a, b i c realni brojevi i $a^2 + b^2 + c^2 > 0$. Dokazati da postoji realan broj d takav da je

$$(ad^2 + bd + c)(bd^2 + cd + a) > 0.$$

2. Dat je trougao ABC sa centrom opisane kružnice u tački O . Označimo sa M središnu tačku stranice BC i izaberimo proizvoljnu tačku D sa opisane kružnice trougla ABC , koja je različita od temena tog trougla. Prave DB i DC seku kružnicu AOD u tačkama E i F redom, ne nužno različitim od tačke D . Ako je središnja dužina EF tačka G , dokazati da je $AG = MG$.

3. Neka je $S = \{\text{НЗД}(a^n + b^n + c^n, a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1}, a^{n+2} + b^{n+2} + c^{n+2}) \mid a, b, c, n \in \mathbb{N}, \text{НЗД}(a, b, c) = 1\}$. Odrediti, ako postoji, najveći element skupa S .

4. Dat je prirodan broj n . Jednakostranični trougao stranice n podelejen na n^2 jednakostraničnih jednakostraničnih trouglova pravama paralelnim sa stranicama originalnog trougla. Dva jednakostranična trougla su susedna ako dele zajedničku stranicu. Put je niz nekoliko susednih jednakostraničnih trouglova u kojem se svaki jednakostranični trougao pojavljuje najviše jednom. Naći sve prirodne brojeve n za koje postoji n puteva koji svi sadrže tačno n jednakostraničnih trouglova i za koje važi da se svaki od n^2 jednakostraničnih jednakostraničnih trouglova nalazi u tačno jednom od njih.

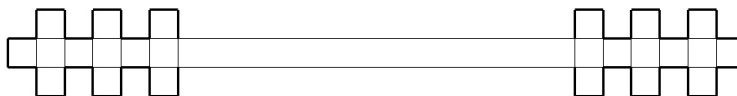
Трећи разред

1. (a) Ako je $z \in \mathbb{C}$ kompleksan broj jedinog modula, dokazati da je $z^{2020} + z^3 + 1 \neq 0$.

(b) Odredi ti sve prirodne brojeve n takve da za svaki kompleksan broj z , za koji je $|z| = 1$, važi jednakost

$$\left| \frac{z^{2020} + z^n + 1}{z^{2020} + z^3 + 1} \right| = 1.$$

2. Data je tabla koja sadrži po 1011 jediničnih polja u „gornjem“ i „dole“ redu, a 2023 polja u „srednjem“ (videti sliku). Kengur u jednom potezu skače sa jednog jediničnog polja tablice na neko drugo jedinično polje tablice. Potez AB , kojim kengur skače sa nekog polja A na polje B , podudaran je potezu CD , kojim kengur skače sa polja C na polje D tablice, ako i samo ako je vektor od centra polja A do centra polja B jednak vektoru od centra polja C do centra polja D . Da li postoji niz poteza $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{4044}A_{4045}$, pri čemu su svaka dva od polja $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{4044}$ i A_{4045} različita, takav da ni koja dva poteza nisu podudarna?



3. Dokazati da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva m koji se ne mogu predstaviti u obliku zbiru $m = n + \varphi(n)$, za neki prirodan broj n , gde je $\varphi(n)$ ukupan broj prirodnih brojeva, ne veći od n , koji su uzajamno prosti sa n .

4. Dat je trougao ABC sa ortocentrom u tački H . Prave BH i CH seku simetralu u spoljašnjem uglu u temenu A tog trouglau tačkama D i E , redom. Neka je M središte stranice BC , a K podnožje visine iz tačke H na pravu AM . Dokazati da su tačke D, K, H i E kolokvijalne.

Четврти разред

1. Odredi ti sve vrednosti pozitivnih realnih parametara a i b za koje nejednakost

$$4^x + a^x + b^x \geq 6^x + 3^x + 2^x$$

važi za svaki realan broj x .

2. Odredi ti sve uređene parove $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ za koje važi jednakost

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdots 2024! = x^2 \cdot n!.$$

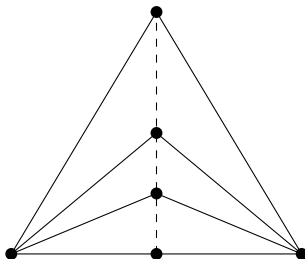
3. Dat je trougao ABC sa centrom opisane kružnice u tački O . Tačke E i F su odabrane na pravama AB i AC , redom, tako da je četvorougao $AEOF$ paralelogram. Tačka D je proizvoljna tačka na stranici BC , a simetrala dužine BD seče pravu OE u tački P , a pravu AB u tački Q , dok simetrala dužine CD seče pravu OF u tački R i pravu AC u tački S . Dokazati da se prave QR i PS seku na pravoj EF .

4. Dati su prirodni brojevi m i n . Pravougaona tabla dimenzija $m \times n$ podele na mn jedinica (kvadrata) i popunjena je prirodnim brojevima od 1 do mn (u svakom polju je različit broj). Pravougaonik koji je su obe strane ceviće od 1 i paralelne stranice tabele, a sva četiri temena su mu neka od temena jedinica kvadrata, nazivamo *lošim* ako mu je zbir brojeva u gornjem levom ćeliju i donjem desnom ćeliju različit od zbira brojeva u donjem levom ćeliju i gornjem desnom ćeliju. Ako je poznato da postoji barem jedan loš pravougaonik, odredi ti najveće k za koje može tvrditi da postoji k loših pravougaonika.

**ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ,
Б категорија, Математички факултет - Београд, 26. 04. 2026.**

Први разред

1. Na sledejoj slici sve centralne tačke leže na jednoj pravoj, a dve tri tačke su kolinearne. Tačno je 2024 trouglova čija su temena date tačke, pri čemu svaka tri kolinearne temena ne obrazuju trougao.



Koliko ukupno ima tačaka na slici?

2. Za prirodan broj n , sa $S(n)$ označavamo zbir njegovih cifara. Na primer, $S(327) = 3 + 2 + 7 = 12$. Izračunati vrednost izraza $A = S(1) - S(2) + S(3) - S(4) + \dots + S(2025) - S(2026)$.

3. Milica, Aleksandar, Qeda i Nenad žive na ostrvu na kome postoje dva plemena: Lavovi i Istinozborci. Kao što im nazivika u,

La kovi i uvek govore ni sti nu, dok I sti nozbori i uvek govore i sti nu. Oni su se takmi qili u rexava u logi qkih zadataka i poznato je da je poredni k tog takmi qe a pri padni k pl emena I sti nozbori a. Posl e takmi - qe a dali su sl ede e izjave:

Милица: Ni ja ni Qeda ni smo poredi li .

Александар: Ako je bar jedan od Qede i Nenada pri padni k pl emena La kovi , onda je Mili ca poredi la.

Чед: Al eksandar je poredni k i Nenad je La kovi .

Ненад: Ako je Mili ca La kovi , onda je Qeda poredni k.

Odredi ti poredni ka takmi qe a i utvrdi ti kom pl emenu pri pada svako od ovo qetvoro ostrv ana.

4. Neka je ABC oxtrougli trougao. Oznaqi mo sa D , E i F podno ja vi si na iz temena A , B i C , redom. Dokazati da je $AF = CF$ ako i samo ako su du i DE i DF me usobno normal ne.

5. Na i najma u vrednost izraza $|49^a - 6^b|$, gde su a i b proi zvo ni pri rodni brojevi .

Други разред

1. Rexi ti jednaqi nu:

$$x^{\log_{10}^2 x + \log_{10} x^3 + 3} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}}.$$

2. Zapi s (a_0, a_1, \dots, a_n) , koji je sastav en samo od nul a i jedi ni ca, nazi vamo *бинарним* zapi som du i ne $n+1$, odnosno zapi som sa $n+1$ mesta, pri qemu je n pri rodan broj. Posmatrajmo proi zvo an binarni zapi s (a_0, a_1, \dots, a_n) du i ne $n+1$. Re i emo da je taj zapi s *дијадски* ako i ma paran broj mesta i ako je zbir prvog i posl ed eg broja jednak 1, zbir drugog i preposl ed eg jednak 1, zbir tre eg i tre eg otpozadi , tako e, jednak 1 i tako redom, tj. va i $a_0 + a_n = a_1 + a_{n-1} = a_2 + a_{n-2} = \dots = 1$. Na pri mer, zapi s $(1, 0, 0, 1, 1, 0)$ je di jadski , jer i ma 6 mesta ($n = 5$), a pri tom je $1 + 0 = 0 + 1 = 0 + 1 = 1$. Kol i ko i ma binarni h zapi sa du i ne 16 koji ni su di jadski , ali se mogu podel i ti na 4 uzastopna di jadska zapi sa, od koji h svaki i ma du i nu 4?

3. Neka je n pri rodan broj i a_n broj koji se u dekadnom zapi su sastoji od n ci fara koje su nai zmeni qno 7 i 3, poqevxi od ci fre 7 sl eva. Na pri mer, $a_3 = 737$ i $a_6 = 737373$. Odredi ti najma e n takvo da $99 \mid a_n$.

4. (a) Neka su a i b realni brojevi takvi da je $a < b$. Dokazati da za svako $y \in \mathbb{R}$ važi

$$|y - a| + |y - b| \geq b - a.$$

(b) Neka je x iracionalan broj, takav da je broj

$$|x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2023| + |x - 2024|$$

racionalan. Dokazati da za proizvoljan realan broj y važi nejednakost

$$|y - 1| + |y - 2| + \dots + |y - 2023| + |y - 2024| \geq |x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2023| + |x - 2024|.$$

5. Dat je ortocentri trougao ABC . Neka je H ortocentar tog trougla. Neka su O_a, O_b i O_c centri opisanih kružnica trouglova HBC , HCA i HAB , redom. Dokazati da su trouglovi ABC i $O_aO_bO_c$ podudarni.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Neka su a i b katete pravouglog trougla. Ako važi

$$\log_8 \frac{a - b}{2} = \frac{1}{2} (\log_8 a + \log_8 b - \log_8 2),$$

odrediti uglove tog trougla.

2. U pravu kružnicu kupi upisana je lopta. Oko te lopte opisan je pravokutnik K čija osnova pada ravni osnovne date kupe. Neka je V zapremina kupe, a K zapremina pravokutnika.

(a) Dokazati da je $K \neq V$.

(b) Odrediti najmanji realan broj m takav da za svaku takvu kupu važi $K \geq mV$.

3. Odrediti sve parove $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, gde je \mathbb{N} skup prirodnih brojeva, za koje važi $5^x - 3^y = 16$.

4. Ana i Bojan igraju igru na traci od $n \geq 3$ poa sa po jednim etonom. Na početku, Ana i eton se nalazi na prvom poa, a Bojanov eton na poslednjem poa. Igrači igraju naizmenično. U svakom potezu, igrač pomeri svoj eton za jedno ili dva poa u pravcu protivničkog etona. eton mora da stane na prazno poe i nije dozvoljeno preskakanje protivničkog etona. Ana igra prva. Igrač koji ne može da odigra potez gubi. Dokazati:

(a) Ako n daje ostatak 2 pri deljenju sa 3, Bojan ima pobjedničku strategiju.

(b) Ako n daje ostatak 0 ili 1 pri deljenju sa 3, Ana ima pobjedničku strategiju.

5. Neka je x iracionalan broj, takav da je broj

$$|x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2023| + |x - 2024|$$

iracionalan. Dokazati da za proizvoljan realan broj y važi nejednakost

$$|y - 1| + |y - 2| + \dots + |y - 2023| + |y - 2024| \geq |x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2023| + |x - 2024|.$$

Четврти разред

1. Tri različita realna broja, u nekom poretku, qine aritmetički niz od tri člana, a tako je, možda u drugom poretku, qine geometrijski niz od tri člana. Odrediti najveću moguću vrednost količnika tog geometrijskog niza.

2. Dat je trougao ABC qiji je centar upisane kružnice označen sa S . Kružnici dodiruju strane trouglau tačkama $D \in BC$, $E \in AC$ i $F \in AB$. Ako je $|AE| = 3$, $|CS| = 2\sqrt{7}$, a mera ugla $\angle BAC = 60^\circ$, izračunati površinu trouglau ABC .

3. Ana i Bojan igraju igru na traci od $n \geq 3$ polja sa po jednim etonom. Na početku, Anin eton se nalazi na prvom polju, a Bojanov eton na poslednjem polju. Igrači igraju nizaizmenično. U svakom potezu, igrač pomera svoj eton za jedno ili dva polja u pravcu protivničkog etona. Eton mora da stane na prazno polje i nije dozvoljeno preskakanje protivničkog etona. Ana igra prva. Igrač koji ne može da odigra potez gubi. Dokazati:

(a) Ako n daje ostatak 2 pri deljenju sa 3, Bojan ima pobjedničku strategiju.

(b) Ako n daje ostatak 0 ili 1 pri deljenju sa 3, Ana ima pobjedničku strategiju.

4. Odrediti sve trojke $(x, y, z) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, gde je $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, pri qemu je \mathbb{N} skup prirodnih brojeva, za koje važi $3^x + 6^y = 2025^z$.

5. Neka je S skup pozitiivnih celih brojeva takav da za svaki pozitiivan ceo broj n važi

$$|S \cap \{n, 2n, 1013n\}| = 1.$$

Poznato je da $2026^{2026} \in S$. Dokazati da $2 \notin S$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

1. Ukoliko je $(a, b, c, d, e) = (1, 0, 1, 0, -1)$ tada je $I = 3$. Dokaži mo da je pod navedenim uslovima uvek $I \geq 3$. Pretpostavi mo suprotno. Tada je $I \leq 2$, pa su među brojevima a, b, c, d i e bar tri jednaka nuli (pošto je kvadrat celog broja koji je različit od nule ne može biti od 1). Sada zbog cikličnosti uslova $a \neq b \neq c \neq d \neq e \neq a$, bez uma o cikličnosti moemo pretpostaviti da je $a = 0$. Tada je $b \neq 0$ i $e \neq 0$, pa kako su bar tri broja među brojevima a, b, c, d i e jednaka nuli, mora biti $c = d = 0$. Kontradikcija.

Ovim je dokazano da je najmanja vrednost izraza I jednaka 3.

2. Neka su a_1, a_2, \dots, a_n različiti brojevi iz skupa $\{1, 2, \dots, n\}$. Posmatrajmo zbir

$$S = (a_1 - 1) + (a_2 - 2)^2 + \dots + (a_n - n)^n = \sum_{i=1}^n (a_i - i)^i.$$

Za svaki ceo broj x i svaki $i \geq 1$ važi

$$x^i \equiv x \pmod{2},$$

jer stepen ne menja parnost datog broja. Otuda,

$$(a_i - i)^i \equiv a_i - i \pmod{2},$$

odakle sledi

$$S \equiv \sum_{i=1}^n (a_i - i) \pmod{2}.$$

S obzirom da je (a_1, \dots, a_n) permutacija skupa $\{1, \dots, n\}$, imamo

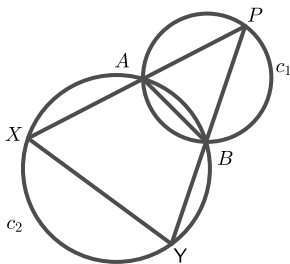
$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n i,$$

te je

$$\sum_{i=1}^n (a_i - i) = 0.$$

Dakle, S je paran broj.

3. Primetimo da je tetiva AB konstantne dužine, tj. ne zavisi od izbora tačke P . Na kružnici cama k_1 (na slici je označena sa c_1) neka je $\angle APB = \alpha$, a na k_2 (na slici je označena sa c_2) neka je $\angle AXB = \angle AYB = \beta$.



Tako e, ovi uglovi su konstantne veli qi ne jer je tetiva AB konstantna. Otuda va i da je $\angle XBP = \angle PAY = \pi - (\alpha + \beta)$ pa je $\angle XAY = \angle YBX = \alpha + \beta$. Kako su ova dva posled a ugla konstantne vrednosti , bez obzi ra na pozici ju taqke P , tada je i du XY tako e konstantne veli qi ne.

4. Odgovor su brojevi 9_{12} i 69_{12} . Doka i mo da su to jedina rexe a. Neka je $x = \overline{c_n \dots c_3 c_2 c_1 c_0}$, $c_i \in \{6, 9\}$ rexe e. Broj x mora bi ti neparan, pa je $c_0 = 9$ i $x = 9 + c_1 \cdot 12^1 + \dots + c_n \cdot 12^n$. Ako je $c_1 = 9$ onda $9 \mid x$, al i $27 \nmid x$, x to je nemogu e, pa je $c_1 = 6$. Dakl e, $x = 81 + c_2 \cdot 12^2 + \dots + c_n \cdot 12^n$. Ako je $c_2 = 6$, onda $27 \mid x$, al i $81 \nmid x$, jer jedi no ql an $12^2 \cdot 6$ ni je de i v sa 81. Zato je $c_2 = 9$ i $x = 1377 + c_3 \cdot 12^3 + \dots + c_n \cdot 12^n$. Ako je $c_3 = 9$ onda $81 \mid x$, al i $243 \nmid x$, jer jedi no broj 1377 ni je de i v sa 243. Zak uqujemo da je $c_3 = 6$. Konaqno, sada je $x = 11745 + c_4 \cdot 12^4 + \dots + c_n \cdot 12^n$. Me uti m, sada opet $81 \mid x$, a $243 \nmid x$, jer $243 \nmid 11745$, qi me je dokaz zavr xen.

5. Pri meti mo da je $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = 8! = 40320$. Da e, $40320 = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \leq P \cdot P \cdot P$, pa je $P \geq 35$.

Razmotri mo sl uqaj $P = 35$. Kako je $35 = 5 \cdot 7$, to se u jednom skupu nal aze samo brojevi 5 i 7 (i eventual no 1). Kako me u brojevi ma od 1 do 8 i mam o taqno jedan broj de i v sa 5 i taqno jedan de i v sa 7, to je u ostal a dva skupa proi zvod brojeva ma i od 35. Tako e, ni u jednom skupu proi zvod brojeva ne mo e da bude $34 = 2 \cdot 17$ jer $17 \notin \{1, 2, \dots, 8\}$. I z i stog razl oga ni u jednom skupu proi zvod brojeva ne mo e da bude $33 = 3 \cdot 11$, pa je proi zvod u sva tri skupa ne ve i od $35 \cdot 32 \cdot 32 = 35840 \leq 40320$, pa $P \neq 35$. Sa druge strane, podel a na skupove $\{1, 5, 7\}$, $\{2, 3, 6\}$ i $\{4, 8\}$ daje $P_1 = 35$, $P_2 = 36$ i $P_3 = 32$, odnosno $P = 36$, x to je i rexe e zadatka.

Други разред – А категорија

1. (a) Prebaci va em $\sqrt{2}$ na drugu stranu dobijamo: $\alpha - \sqrt{2} = \sqrt[4]{2}$, te kvadri ra em nal azi mo da je $(\alpha - \sqrt{2})^2 = \sqrt{2}$, $\alpha^2 + 2 - 2\alpha\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$,

$\sqrt{2} = \frac{\alpha^2+2}{1+2\alpha}$ ($1+2\alpha > 0$). Leva strana je i racionalna, a ako je α racionalan, desna strana je tako i racionalna, te dolazi do kontradikcije. Dakle, α nije racionalan.

(b) Od rani je je $\sqrt{2} = \frac{\alpha^2+2}{1+2\alpha}$. Kvadriramo i imamo $2 = \frac{(\alpha^2+2)^2}{(1+2\alpha)^2}$, $2(1+2\alpha)^2 = (\alpha^2+2)^2$, $(\alpha^2+2)^2 - 2(1+2\alpha)^2 = 0$, pa polinom $P(x) = (x^2+2)^2 - 2(1+2x)^2$ zadovoljava traženi uslov.

2. Neka je $x = \sqrt{n}$ i $x^2 = x + 360k$, za $k \in \mathbb{N}$. Važi $\sin((x^2)^\circ) = \sin(x^\circ)$. Dokaži mo da se pri rodan broj x može izabrati na beskonačno mnogo načina. Resavamo kvadratnu jednačinu $x^2 - x - 360k = 0$. Za $x > 1$, rešenje je oblika $x = \frac{1 + \sqrt{1 + 1440k}}{2}$.

Preostalo je dokazati da postoji beskonačno mnogo kvadrata prirodnih brojeva oblika $1+1440k$. Napomeni mo da ako je $1 + \sqrt{1 + 1440k}$ ceo broj, onda je i paran zbog neparnosti broja $1 + 1440k$. Zapišujemo $m^2 = 1 + 1440k \iff 1440k = (m-1)(m+1)$. Moguće je izabrati $m-1 = 1440t$ i $m+1 = 1440t+2$, za bilo koje $t \in \mathbb{N}$.

3. Za svakog takmičara, broj poena je $\frac{1}{2}a+b$, gde je a broj nerexenih partija koje je igrao i grao, a b broj pobeda, odatle sledi da takmičar ima ceo broj poena ako i samo ako je broj nerexenih partija paran. Da rešenje zavisi od parnosti broja n , tj. broja igrača.

1° n je neparan: Tada svaki igrao i igrao ukupno $n-1$ partija, a broj $n-1$ je paran. Zato je moguće da sve partije na turniru budu nerexene. U tom slučaju, svaki igrao i igrao paran broj remija, pa samim tim i ceo broj poena. Kako nema više partija od $\frac{n(n-1)}{2}$, što je ukupan broj partija na turniru, ovaj broj, tj. $\frac{n(n-1)}{2}$, predstavlja najveći mogući broj nerexenih partija u ovom slučaju.

2° n je paran: Analogni, svaki igrao i igrao tačno $n-1$ partija, što je neparan broj. Stoga, igrao ne može imati sve partije nerexene, jer bi tada imao neparan broj remija. Sa druge strane, najveći paran broj koji je manji od $n-1$ jeste $n-2$, te svaki igrao može imati najviše $n-2$ nerexene partije.

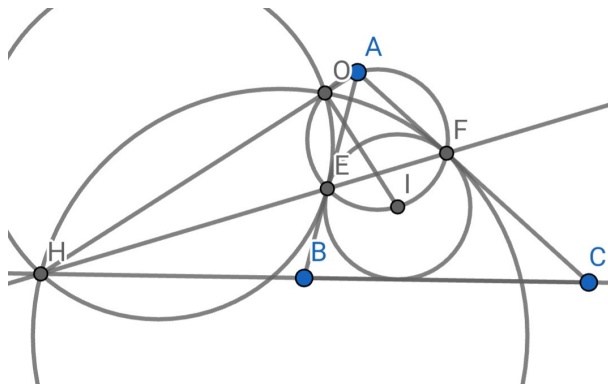
Ovo se može ostvariti tako što, na primer, igrao upari mo:

$$(1, 2), (3, 4), \dots, (n-1, n),$$

i neka u svakom od ovih parova partija bude odlučena (ni je nerexeno), dok su sve ostale partije nerexene. Tada svaki igrao i igrao tačno jednu odlučenu partiju (pobeda ili poraz) i $n-2$ nerexene partije, što je paran broj, te svi igrao i igrao ceo broj poena. Dakle, u ovom slučaju dobijamo da je $\frac{n(n-2)}{2}$ najveći mogući broj nerexenih partija.

4. Pošto se k_1 i upisani krug dodiruju u tački E to je prava AB tangenta

na krug k_1 . Slika prikazuje, prava AC je tangenta na krug k_2 . Tačka A ima jednake potencije u odnosu na krugove k_1 i k_2 i one iznose $AE^2 = AF^2$.



Zato se A nalazi na radijalnoj osi ovih krugova, odnosno na pravoj HO . Ostaje da dokažemo da je $\angle AOI = 90^\circ$. Kako je $\angle AEO = \angle OHE = \angle OHF = \angle AFO$ (tangenti i periferijski uglovi) četverougao $OAFE$ je tetivani. Prečni krak ovog optičkog kruga je AI , te je $\angle AOI = 90^\circ$, čime je dokaz završen.

5. (a) Primetimo da se nakon svakog poteza, ostatak broja na tabli pri deljenju sa 7 ne menja. Zapravo, $x + 7 \equiv x \pmod{7}$, $x + 1001 \equiv x \pmod{7}$ i $2^{10} = 1024 \equiv 2 \pmod{7}$. Sa druge strane, $2024^{2024} + 2025 \equiv 1^{2024} + 2 \equiv 3 \pmod{7}$, te je odgovor ne.

(b) Da! Na primer, nakon prve minute umesto broja 2 zapisujemo $2^{10} = 1024$, te nakon druge minute zapisujemo $1024 + 1001 = 2025$.

Трећи разред – А категорија

1. Neka je $B = A + 2024A^T$, $B = [b_{ij}]_{2023 \times 2023}$, $B^T = [b_{ij}^t]_{2023 \times 2023}$. Tada je $B + B^T = 2025(A + A^T)$, odakle dobijamo da je $b_{ij} \equiv -b_{ij}^t \pmod{2025}$, $i, j = 1, 2, \dots, 2023$. Na osnovu osobina determinanti, ako posmatramo sve elemente matrice po modulu 2025, sledi da je $\det B = \det(-I) \det(B^T) = (-1)^{2023} \det B = -\det B$, odnosno da je $2 \det B \equiv 0 \pmod{2025}$. Dakle, $\det B$ je deljivo sa 2025.

2. Dokazujemo da su brojevi $z = \pm 1$ jedina rešenja. Posmatrajmo najpre brojeve sa navedenom osobinom kod kojih je $|z| > 1$. Iz nejednakosti trougla imamo

$$|z|^n + \frac{1}{|z|^n} \geq |z^n + \frac{1}{z^n}| = |z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}| \geq |z|^{n+1} - \frac{1}{|z|^{n+1}},$$

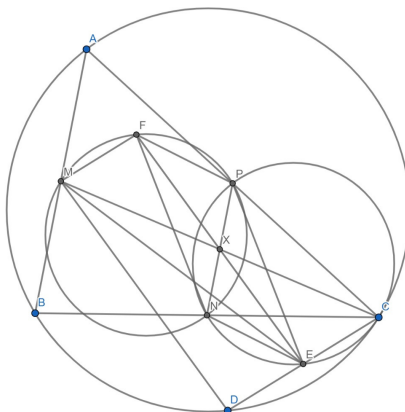
odakle zbog $|z| > 1$ važi $|z|^{n+1} \leq |z|^n + \frac{1}{|z|^n} + \frac{1}{|z|^{n+1}} < |z|^n + 2$. Dakle, za svaki prirodan broj n važi

$$|z|^n < \frac{2}{|z| - 1}. \quad (1)$$

Kako je $|z| > 1$, to veličina $|z|^n$, kada n prolazi skupom prirodnih brojeva nije odozgo ograničena, što je u suprotnosti sa (1). Ovim smo dobili da ne postoje brojevi z sa navedenom osobinom kod kojih je $|z| > 1$. Primetimo da je neki broj z rešenje zadatka akko je $\frac{1}{z}$ rešenje zadatka. Zato, ako bi neki broj z za koji je $|z| < 1$ bio rešenje zadatka, onda bi i broj $\frac{1}{z}$ bio rešenje i za drugačiji slučaj $|z| > 1$. Međutim, kako smo već dokazali da nema rešenja među brojevima koji imaju modulu veću od 1, odavde zaključujemo da nema rešenja ni među brojevima koji imaju modulu manju od 1. Razmotrimo još slučaj $|z| = 1$. Tada je $\bar{z} = \frac{|z|^2}{z} = \frac{1}{z}$, te je $|z^n + \frac{1}{z^n}| = |z^n + \bar{z}^n| = 2|\operatorname{Re}(z^n)|$. Neka je $z = a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, pri čemu je $a^2 + b^2 = 1$. Sada iz jednakosti $|z + \frac{1}{z}| = |z^2 + \frac{1}{z^2}| = |z^3 + \frac{1}{z^3}|$ lako dobijamo da je $|a| = |2a^2 - 1| = |4a^3 - 3a|$. Rešavajući poslednju jednačinu nalazimo da je $a = \pm 1$, čime je $b = 0$, odnosno $z = \pm 1$. Brojevi $z = \pm 1$ oči gledno jesu rešenja zadatka, a iz svega navedenog zaključujemo i da su jedina.

3. Po modulu 9 imamo $1 + 2^y \equiv 0 \pmod{9}$, $2^y \equiv 8 \pmod{9}$. Stepenu broja 2 pri deljenju sa 9 daje ostatke, periodično, 2, 4, 8, 7, 5, 1, pa 3 deli y . Po modulu 7 imamo da je $5202 \equiv 1 \pmod{7}$, $10^x + 1 \equiv 1 \pmod{7}$, te dobijamo da 7 deli 10^x , što je kontradikcija.

4. (PRVO REŠENJE) Primetimo da je i četvorougao $MECF$ paralelogram, i presek njegovih dijagonala obelazi X . Kako je MN i MP srednja linija trougla $\triangle ABC$, znamo da je i četvorougao $MNCP$ paralelogram, odnosno X je takođe središte i NP . Sada znamo da je i četvorougao $NEPF$ paralelogram.



particijoni sa a i m amo po taqno jedan el ement koji daje svaki ostatak po modul u n_0 . Ti me je dokaz završen.

(DRUGO REŠENJE) Uoqi mo n k -torki pri rodnih brojeva, gde i -ti el ement k -torke uzima vrednosti iz skupa $\{1, 2, \dots, a_i\}$ za svako $i = \overline{1, k}$. Pri meti mo da el emenata sa fiksnom i -tom koordinatom i ma $\frac{n}{a_i}$, za svako $i = \overline{1, k}$, te mo emo ove k -torke deliti u skupove po i hovi m koordinatama. Dakle, u i -tom particijoni sa u j -ti skup e sadr ati sve k -torke koje na i -toj poziciji imaju broj j , za sve $i = \overline{1, k}$ i $j = \overline{1, a_i}$. Sada, za svaki odabir skupova, znamo taqno koje koordinate mora imati k -torka u preseku svih tih skupova, pa je po konstrukciji jasno da postoji taqno jedna takva k -torka za svaki odabir skupova. Kako je k -torki n , svakom broju emo dodeliti po taqno jednu k -torku i umesto k -torki emo posmatrati brojeve. Ovi me je tvr e e zadatka dokazano.

Четврти разред – А категорија

1. Ukupno ima $\binom{8}{3} = 56$ naqna da se i zaberu tri razliqi ta temena kocke.

Pokazemo da su svi tako dobijeni trouglovi pravougl i, osim oni koji su saqinjeni od tri dijagonale strana kocke. Zai sta, neka su i zabrana tri razliqi ta temena A, B, C date kocke. Posmatrajmo trougao ABC .

Ako je jedna od du i AB, BC, CA i vica kocke, reci mo da je to du AB , tada su taqke A i B susedna temena kocke. Tre e teme C se nalazi u jednoj od strana kocke koje sadr e ivicu AB , ili u nekoj od preostalih strana koje sa om nemaju zajedni qku ivicu.

U oba sluqaja, jedna od du i AC ili BC le i u pravcu ivice kocke koja je normal na na ivicu AB . Poxt o su sve ivice kocke koje izlaze iz istog temena me usobno normal ne, sl edi da je jedan od ugl ova trougla ABC prav.

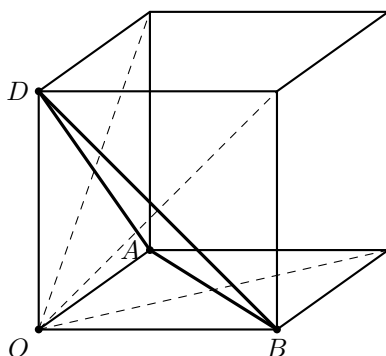
Prema tome, ako trougao ABC ima bar jednu stranu koja je ivica kocke, onda je taj trougao pravougl i.

Jedini preostali sluqaj je kada nijedna od du i AB, BC, CA nije ivica, tj. kada su sve tri du i dijagonale nekih strana. To se de xava upravo kada su A, B, C tri temena susedna nekom temenu kocke. Tada su AB, BC, CA tri dijagonale triju strana koje se seku u pomenutom temenu kocke, te dobijeni trougao nije pravougl i (on je jednakostran iqan). Stoga, za svako teme kocke postoji taqno jedan takav trougao, pa ih ima taqno 8. Dakle, nepovolnih izbora je 8, pa je tra ena verovatno a

$$P = 1 - \frac{8}{\binom{8}{3}} = 1 - \frac{8}{56} = \frac{6}{7}.$$

2. PRVO REŠENJE:) Poqetni izraz mo emo napisati u obliku

$$a \log(1 + b) + b \log(1 + c) + c \log(1 + a) = \log((1 + b)^a (1 + c)^b (1 + a)^c).$$



Kako je funkcija $f(x) = \log x$ rastu a, dovo no je na i najve u mogu u vrednost izraza unutar logaritma. Pri menimo na taj izraz te insku ari tmeti qko{geometrijsku nejednakost:

$$(1+b)^a(1+c)^b(1+a)^c \leq \frac{a(1+b) + b(1+c) + c(1+a)}{a+b+c} = 1+ab+bc+ca.$$

Najve a mogu a vrednost izraza $ab+bc+ca$ je $\frac{1}{3}$. Zai sta,

$$\begin{aligned} 1 &= (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca + 3(ab+bc+ca) \\ &= \frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) + 3(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca). \end{aligned}$$

Odavde dobi jamo

$$S(a, b, c) \leq \log(1+ab+bc+ca) \leq \log\left(\frac{4}{3}\right),$$

pri qemu se obe nejednakosti posti u upravo kada je $a = b = c = \frac{1}{3}$. Dakl e, najve a mogu a vrednost izraza je

$$\log\left(\frac{4}{3}\right).$$

(DRUGO REX E E:) Pri meti mo da je funkcija $f(x) = \log(1+x)$ konkavna na intervalu defi ni sanosti, tj. za $x \in (-1, +\infty)$. Poxt o je $a+b+c=1$, mo emo pri meni ti Jensenovu nejednakost na poqetni i zraz (za sluqaj konkavne funkcije):

$$S(a, b, c) = af(b) + bf(c) + cf(a) \leq f(ab+bc+ca) = \log(1+ab+bc+ca).$$

Jednakost se posti e za $a = b = c$, te je nastavak isti kao i u prvom rexe u.

3. I z nejednakosti $n^m = n! + n \geq 1 + 1 = 2$ zak uqujemo da je $n \geq 2$.

De e em obe strane sa n , dobi jamo $(n-1)! + 1 = n^{m-1}$, pa kako je $n^{m-1} > 1$,

to je $m \geq 2$. I z ovog zapi sa vi di mo da $n \nmid (n-1)!$, pa ako bi n bio oblika $n = ab$, za neke $a \neq b$, pri čemu su oba veća od 1 i manja od n , imali bismo $ab \mid (n-1)!$, što je kontradikcija, pa $n = a^2$ i n je prost broj.

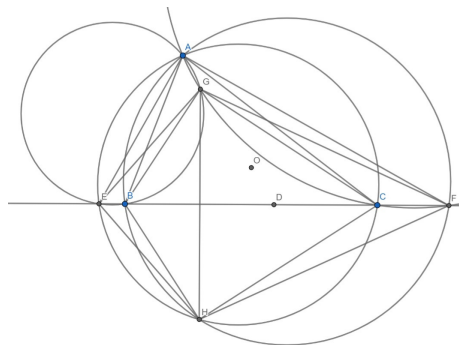
1° Neka je $n = a^2$: I mam o $a \mid n^{m-1}$ i $a \mid (n-1)!$, pa $a \mid 1$, tj. $a = 1$ i $n = 1$. Me utim, pokazali smo da mora da važi $n \geq 2$, pa u ovom slučaju nema rešenja.

2° Neka je n prost broj: Za $n = 2$ dobijamo $m = 2$, za $n = 3$ imamo $m = 2$, dok za $n = 5$ dobijamo $m = 3$.

Neka je sada $n \geq 7$ prost broj. Tada je $(n-1)! = 2 \cdot 3 \cdots (n-1) < n^{n-2}$, pa $(n-1)! + 1 \leq n^{n-2}$. Kako važi $n^{m-1} \leq n^{n-2}$, to je $m < n$. Kako je $n \geq 7$, to je $2 < \frac{n-1}{2} < n-1$, pa $(n-1)^2 \mid (n-1)!$. Sada $(n-1)^2 \mid n^{m-1} - 1$, tj. $(n-1)^2 \mid ((n-1) + 1)^{m-1} - 1$. I z bi nomne formule odavde sledi $(n-1)^2 \mid (m-1)(n-1)$, tj. $n-1 \mid m-1$. Me utim, kako smo već pokazali da važi $n > m \geq 2$, zaključujemo da je nemoguće da važi $n-1 \mid m-1$.

Dakle, zadatak ima tri rešenja: $(m, n) \in \{(2, 2), (2, 3), (3, 5)\}$.

4. Dokazamo da je tačka H zapravo tačka G preslikana preko prave BC , odakle direktno sledi tvrdjenje zadatka. I zračunajmo prvo par uglova. Znamo da je $\angle AGB = 180^\circ - \angle AEB$, kao i $\angle AGC = 180^\circ - \angle AFC$, pa kako je $\angle EAF = 90^\circ$ (tačka A je na krugu sa prečnikom EF), I ako dobijamo da je i $\angle BGC = 90^\circ$.



I z tetivnosti četvorougla $AEBG$ dobijamo $\angle EGB = \angle EAB = \angle EAD - \angle BAD = (90^\circ - \frac{\angle ADB}{2}) - (90^\circ - \frac{\angle AOB}{2}) = \frac{\angle AOB - \angle ADB}{2} = \frac{\angle OBC}{2} = \theta$. Slično dobijamo i $\angle CGF = \angle CAF = \frac{\angle OCB}{2} = \theta$. Obelimo sada sa H' tačku dobijenu preslikavanjem tačke G preko BC . Znamo da je $\angle BH'F = \angle BGF = \angle BGC + \angle CGF = 90^\circ + \theta$, dok je s druge strane $\angle BAF = \angle EAF - \angle EAB = 90^\circ - \theta$. Dakle, $\angle BAF + \angle BH'F = 180^\circ$, pa je četvorougao $ABH'F$ tetivan. Slično je i četvorougao $AEH'C$ tetivan, pa je $H \equiv H'$, čime smo dokazali tvrdjenje zadatka.

5. Fiksirajmo početak izlomene linije (postoji n načina da to uradimo). I stujemo pravi tetivno poqev od datog poqetka. U svakom od

na rednih $n - 2$ koraka potrebno je spojiti trenutni kraj i zlomenu liniju sa novom tačkom prekidu. Kandidati za novi kraj su dve susedne tačke od krajeva skupa tačaka koje smo do sada obišli. Napomenimo da je taj skup povezan. Ukoliko taj skup nije povezan, odnosno nisu svi susedni elementi, onda naš proces mora napraviti zlomenu liniju koja seže samu sebe. U poslednjem $n - 1$ -om koraku, spajamo trenutni kraj sa jedinom preostalom tačkom. Broj načina da izvršimo pomenuti proces je $n \cdot 2^{n-2}$. Primetimo da određena linija ne razlikuje svoj početak i poslednji kraj, te smo svaku izbrojali dvaput. Konačan rezultat je $n \cdot 2^{n-3}$.

Први разред – Б категорија

1. Uzmi mo $(a, b, c) = (-1, 0, 1)$. Tada je

$$I = a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 0 + 1 = 2.$$

Dokazimo da je uvek $I \geq 2$. Kako su a, b, c različiti celobrojni, najviše jedan od njih može biti nula. Prema tome, bar dva od brojeva a, b, c su nenula, te su njihovi kvadrati najmanje 1. Otuda,

$$I = a^2 + b^2 + c^2 \geq 1 + 1 = 2.$$

Dakle, najmanja moguća vrednost je $\boxed{2}$, i postiže se za $(a, b, c) = (-1, 0, 1)$ (i za bilo koju njegovu permutaciju).

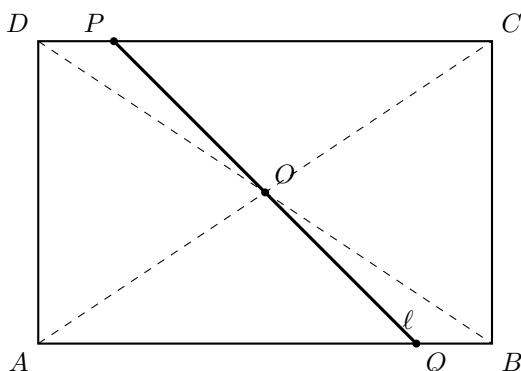
2. Krenimo sa preračunavajućim samim kompozicijama da bismo uočili pravilo. Imamo: $f^2(x) = \frac{-2x - 4}{x}$. Jednostavno se dobija

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = x.$$

Sada je $f^4(x) = f(f^3(x)) = f(x)$, što implicira sledeće: $f^5(x) = f^2(x)$, $f^6(x) = f^3(x)$, $f^7(x) = f(x)$, ... Kako je 2025 delivo sa 3, sledi da je

$$f^{2025}(2025) = f^3(2025) = 2025.$$

3. Vidimo da 5 deli dati broj, te 25 deli moguću stepen, pa $25 \mid \overline{a5}$, pa je $a \in \{2, 7\}$. Sledi, ako je upitna u barem treći stepen, $125 \mid \overline{a5}$ deliti dati broj, tj. $125 \mid \overline{2a5}$, te a ne može biti ni jedan od prethodnih. Stoga, traženi broj može biti samo potpun kvadrat, te je dati ostatak 0 ili 1 pri deljenju sa 4. Sledi, $a = 7$ ne ispunjava uslov (75 ne daje ostatak 0 ili 1 pri deljenju sa 4), te može biti samo $a = 2$. Ispitujemo da li je broj 2202225 kvadrat nekog prirodnog broja. Zbir cifara mu je 15, što znači da je deliv sa 3, ali ne i sa 9. Dakle, ne postoji takva cifra a .



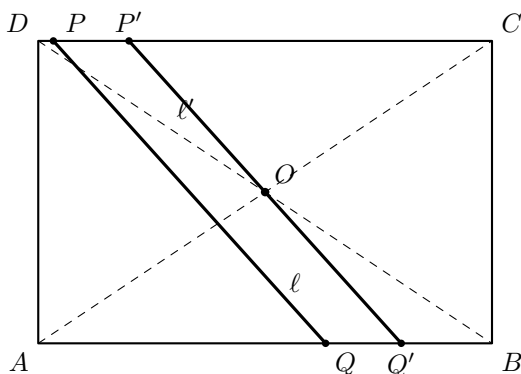
4. Neka je $ABCD$ dati pravougaonik i neka je O presek njegovih dijagonala. Označimo sa ℓ datu pravu. S obzirom da se u formuli zadatka jasno ističu reži - ako i samo ako, rešenje sprovedi mo u dva smera.

(\Leftarrow) Pretpostavimo da prava ℓ prolazi kroz tačku O i, bez ograničenja opštosti, pretpostavimo da seče i višec pravougaonika u tačkama P i Q , koje su različite od temena datog pravougaonika (videti sliku). U ostalim slučajevima, tj. ukoliko prava ℓ , koja sadrži tačku O , zauzme neki drugi položaj, tvrđenje u ovom smeru postaje trivijalno.

Jasno je da su trouglovi BOQ i DOP podudarni, jer je $BO = DO$, $\angle BOQ = \angle DOP$ (unakrsni), $\angle QBO = \angle PDO$ (naimenjački), odakle zaključujemo da su dužine BQ i DP podudarne, a samim tim i AQ i CP . Stoga, trapezi $AQPD$ i $CPQB$ su podudarni, te imaju jednake površine. Napomenimo da bismo isti zaključak dobili da smo oba trapeza podelili odgovarajućim normalama iz tačaka P i Q na prave AB i CD , redom, na po jedan trougao i pravougaonik, koji su podudarni (trougao nastao deobom prvog trapeza sa odgovarajućim trouglom drugog trapeza, odnosno, pravougaonik nastao deobom prvog trapeza sa odgovarajućim pravougaonikom koji nastaje deobom drugog trapeza).

(\Rightarrow) Neka sada prava ℓ deli pravougaonik na dva dela jednake površine. Pretpostavimo suprotno, tj. da prava ℓ ne prolazi kroz tačku O . Označimo sa ℓ' pravu koja sadrži tačku O i paralelna je sa pravom ℓ (videti sliku ispod). Prave ℓ i ℓ' su različite, jer ℓ ne sadrži tačku O , pa je deo prave ℓ , tj. otvorena dužina PQ , unutar jednog od trapeza $AQ'P'D$ ili $CP'Q'B$. Na osnovu prvog dela rešenja (prvi smer), prava ℓ' deli polazni pravougaonik na dva dela jednake površine. Međutim, i prava ℓ ima to svojstvo, odakle sledi da figura koja pripada pojasi između dve paralelne prave ℓ i ℓ' koja se nalazi unutar pravougaonika $ABCD$, što može biti paralelogram $QQ'P'P$ ili petougao $QQ'P'DP$ (ovo se desi ti kada P pripada otvorenoj dužini AD) ima površinu jednaku nula, što je nemoguće. Dakle, suprotna pretpostavka dovodi do kontradikcije, odakle

zaključujemo da prava ℓ sadrži tačku O .



5. (PRVO REX E E) Brojevi $(a_i - i)^2$ su iste parnosti kao i $a_i - i$, za svako $1 \leq i \leq 2025$. Kako je zbir svih ovih drugih brojeva nula (paran), jer je

$$S = (a_1 - 1) + (a_2 - 2) + \dots + (a_{2025} - 2025) = \sum_{i=1}^{2025} (a_i - i) = \sum_{i=1}^{2025} a_i - \sum_{i=1}^{2025} i = 0,$$

to je polazni izraz paran broj.

(DRUGO REX E E) Iz jednakosti

$$\begin{aligned} & (a_1 - 1)^2 + (a_2 - 2)^2 + \dots + (a_{2025} - 2025)^2 = \\ & = \sum_{i=1}^{2025} a_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{2025} i a_i + \sum_{i=1}^{2025} i^2 = 2 \left(\sum_{i=1}^{2025} i^2 - \sum_{i=1}^{2025} i a_i \right), \end{aligned}$$

jer je $(a_1, a_2, \dots, a_{2025})$ permutacija od $(1, 2, \dots, 2025)$, dobijamo da je polazni broj paran.

Други разред – Б категорија

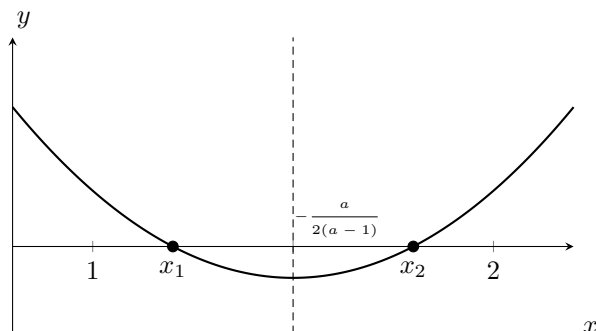
1. (PRVO REX E E) Razlikujemo tri slučaja:

1° Neka je $a = 1$. Tada jednačina nije kvadratna, tj. postaje linearna, te ne može imati dva rešenja (za one koji to ne primete, slučaj bi svakako otpao, jer u istom je rešenju $x = -2 \notin (1, 2)$).

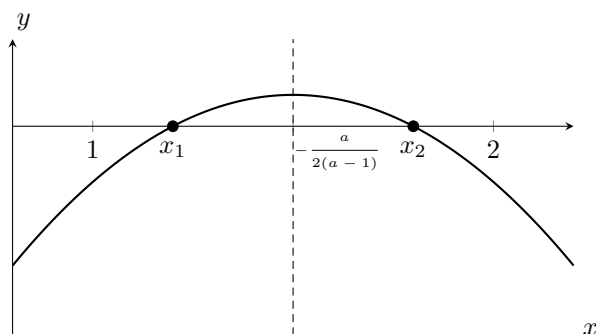
Neka je $a \neq 1$. U daljem podrazumevamo da u slučaju kvadratne jednačine, ukoliko je diskriminanta iste jednaka nula, da ona ima dva realna rešenja, koja su jednaka. Razmatramo kvadratnu funkciju

$$f(x) = (a - 1)x^2 + ax + 2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a \neq 1.$$

Da bi polazna jednačina imala dva realna rešenja mora biti $D \geq 0$, gde je $D = a^2 - 8(a - 1) = a^2 - 8a + 8$ di skri mi nanta te jednaqine. Dakle, uslovi zadatka, za sada, su $D \geq 0$ и $a \neq 1 \iff a^2 - 8a + 8 \geq 0$ и $a \neq 1 \iff (a \leq 4 - 2\sqrt{2}$ или $a \geq 4 + 2\sqrt{2})$ и $a \neq 1$.



2° Neka je sada $a > 1$. Da bi u ovom slučaju jednačina imala oba rešenja u intervalu $(1, 2)$ mora biti $f(1) > 0$, $f(2) > 0$, $1 < -\frac{a}{2(a-1)} < 2$ (x koordinata temena parabole mora pripadati intervalu $(1, 2)$) и $f(-\frac{a}{2(a-1)}) \leq 0$, tj. $a > -\frac{1}{2}$, $a > \frac{1}{3}$, $a \in \emptyset$ и $-\frac{D}{4(a-1)} \leq 0$, tj. $a \in \emptyset$, jer nejednaqina $1 < -\frac{a}{2(a-1)} < 2$ nema rešenja za $a > 1$.



3° Neka je sada $a < 1$. Da bi u ovom slučaju jednačina imala oba rešenja u intervalu $(1, 2)$ mora biti $f(1) < 0$, $f(2) < 0$, $1 < -\frac{a}{2(a-1)} < 2$ и $f(-\frac{a}{2(a-1)}) \geq 0$, tj. $a < -\frac{1}{2}$, $a < \frac{1}{3}$, $a \in (\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ и $-\frac{D}{4(a-1)} \geq 0$, odnosno, $a < -\frac{1}{2}$, $a < \frac{1}{3}$, $a \in (\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ и $a < 1$, tj. $a \in \emptyset$.

Konaqno, polazna jednaqina ni za jedno realno a ne može imati dva realna rešenja u intervalu $(1, 2)$ (uključujući i ona, dupla, koja su jednaka).

(DRUGO REŠENJE) Ako je $a = 1$, jednaqina ima jedno rešenje $x = -2$. U suprotnom, za nule kvadratne funkcije $f(x) = (a - 1)x^2 + ax + 2$, na osnovu

Vi jetovi h formul a, va i

$$x_1 x_2 = \frac{2}{2(a-1)}.$$

Kako je uslov zadatka da obe nule pripadaju intervalu $(1, 2)$, to je i hov proizvod poziti van broj, pa $a > 1$ (zapravo, neophodno je da proizvod pripada intervalu $(1, 4)$, odakle dobijamo jaqu ocenu: $a \in (\frac{5}{4}, 2)$, xto e se i spostaviti da nije neophodno u ovom zadatku).

Jasno je da x -koordinata temena kvadratne funkcije f mora pripadati intervalu $(1, 2)$. Stoga, jednostavno dobijamo da je x -koordinata temena kvadratne funkcije f jednaka $x_T = -\frac{a}{2(a-1)}$. Kako je $a > 1$, to je $x_T < 0$. Kontradikcija!

Dakle, ni jedan realan broj a ne ispuava uslove zadatka.

2. Standardno, stavimo da je $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Zamenom u polaznu jednaqinu i grupisajemo sabirakom dobijamo

$$\begin{aligned} (x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3) + (x^2 + y^2) + x &= 0 \\ (x^3 - 3xy^2 + x^2 + y^2 + x) + (3x^2y - y^3)i &= 0, \end{aligned}$$

odakle je $x^3 - 3xy^2 + x^2 + y^2 + x = 0$ i $3x^2y - y^3 = 0$. Druga jednaqina je ekvivalentna sa $y(3x^2 - y^2) = 0$, odnosno $y = 0$ ili $y^2 = 3x^2$. U prvom sluqaju, zamenom u jednaqinu realnog dela dobijamo $0 = x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1)$, odakle je $x = 0$ ili $x^2 + x + 1 = 0$. No, poslednja jednaqina nema realnih rexea, pa ostaje jedino $x = 0$. U drugom sluqaju, zamenom u jednaqinu realnog dela nalazimo $0 = x^3 - 9x^3 + x^2 + 3x^2 + x = -8x^3 + 4x^2 + x$, odakle je $x = 0$ (i $y = 0$) ili $8x^2 - 4x - 1 = 0$. Rexe poslednje kvadratne jednaqine su $x = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$ i $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$. Konaqno, uslov $y^2 = 3x^2$ nam daje $y = \pm x\sqrt{3} = \pm \frac{1\pm\sqrt{3}}{4}\sqrt{3} = \frac{\pm 3\pm\sqrt{3}}{4}$. Dakle, sva rexea jednaqine su data parovima:

$$\begin{aligned} (x, y) \in \left\{ (0, 0), \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}, \frac{3+\sqrt{3}}{4} \right), \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}, -\frac{3+\sqrt{3}}{4} \right), \right. \\ \left. \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}, \frac{3-\sqrt{3}}{4} \right), \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}, -\frac{3-\sqrt{3}}{4} \right) \right\}. \end{aligned}$$

3. Ako bi va ilo $n \geq 25$, tada bi $5^5 \mid n!$ i $2^5 \mid n!$, pa bi se broj zavxavao sa bar 5 nul a, xto nije sluqaj. Sa druge strane, za $n < 20$ i mammo $5^4 \nmid n!$, xto tako e nije sluqaj. Dakle, $20 \leq n < 25$.

Pri meti mo da $n!$ mo emo zapisati kao

$$n! = x \cdot \prod_{0 \leq i \leq 3} (5i+1)(5i+2)(5i+3)(5i+4)(5i+5),$$

gde je $x = \frac{n!}{20!}$ pri rođan broj. Da e,

$$n! = x \cdot 5^4 (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot \prod_{0 \leq i \leq 3} (5i+1)(5i+2)(5i+3)(5i+4).$$

Po modul u 5^6 i mamo da je $2432902008176640000 \equiv 640000 \pmod{5^6}$, te je

$$640000 \equiv 5^4 \cdot 24 \cdot x \cdot \prod_{0 \leq i \leq 3} (5i+1)(5i+2)(5i+3)(5i+4) \pmod{5^6}.$$

Kako je $640000 = 64 \cdot 10^4 = 2^4 \cdot 5^4 \cdot 64$, pa

$$5^6 \mid 5^4 \left(64 \cdot 16 - 24 \cdot x \cdot \prod_{0 \leq i \leq 3} (5i+1)(5i+2)(5i+3)(5i+4) \right),$$

pa 5^2 deli i izraz u zagradi.

Sa druge strane važi

$$(5i+1)(5i+2)(5i+3)(5i+4) \equiv 24 + 5 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot i \equiv 24 \pmod{25},$$

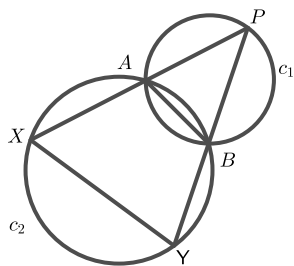
te je $\prod_{0 \leq i \leq 3} (5i+1)(5i+2)(5i+3)(5i+4) \equiv 24^4 \equiv 1 \pmod{25}$, pa je

$$64 \cdot 16 - 24 \cdot x \cdot \prod_{0 \leq i \leq 3} (5i+1)(5i+2)(5i+3)(5i+4) \equiv 14 \cdot 16 + x \equiv x - 1 \pmod{25}.$$

Prema tome, mora da važi $25 \mid x - 1$. S druge strane, $x \in \{1, 21, 21 \cdot 22, 21 \cdot 22 \cdot 23, 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24\}$. Ovi brojevi su, redom, kongruentni sa $1, -4, 12, -24, 24$ po modul u 25. Dakle, $n = 20$ ili $n = 23$.

Ako bi važio $n = 23$, tada bi važio $3 \cdot 10^{18} > 23! > 7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10^{10} \cdot 20^4 = 5040 \cdot 72 \cdot 10^{14} \cdot 16$, što je ekvivalentno sa $3 \cdot 10^4 > 5040 \cdot 72 \cdot 16$, a ovo nije tačno. Dakle, $n = 20$.

4. Neka je $\angle PAB = \alpha$. Tada $\angle XAB = \pi - \alpha$, kao i $\angle XYB = \alpha$, jer je četvorougao $XYBA$ tetivani (zbir naspramnih unutrašnjih uglova u tom četvorouglu je π).



Otuda je $\triangle PAB$ sličan sa trouglom $\triangle PYX$. Stedi da je $\frac{XY}{BA} = \frac{PX}{PB}$, tj.

$$XY = \frac{BA \cdot PX}{PB} = 18.$$

Napomeni mo da smo na sl i ci kru ni ce k_1 i k_2 oznaqili sa c_1 i c_2 , redom.

5. Zbi r dva razli qi ta broja iz skupa $A = \{1, 2, \dots, 9\}$ mo e bi ti bi lo koji ceo broj iz skupa $\{3, 4, 5, \dots, 17\}$. Zabra eni su zbi rovi koji su de i vi sa 3, i li sa 5, i li sa 7, tj. 3, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 15. Prema tome, дозвољени zbi rovi susedni h brojeva su taqno:

4, 8, 11, 13, 16, 17.

Odredi mo sada dozvo ene susednosti (za broj $x \in A$ tra i mo broj $y \in A$ tako da je $x + y \in \{4, 8, 11, 13, 16, 17\}$):

1 \sim 3, 7,
 2 \sim 6, 9,
 3 \sim 1, 5, 8,
 4 \sim 7, 9,
 5 \sim 3, 6, 8,
 6 \sim 2, 5, 7,
 7 \sim 1, 4, 6, 9,
 8 \sim 3, 5, 9,
 9 \sim 2, 4, 7, 8.

K uqna tri broja koja i maju taqno dva mogu a suseda su:

1 mora biti susedan sa 3 i 7;

2 mora bi ti susedan sa 6 i 9; 4 mora bi ti susedan sa 7 i 9.

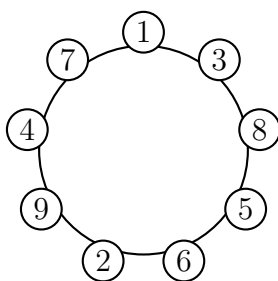
Dakl e, u kru nom rasporedu nu no va e veze:

(1, 3), (1, 7), (2, 6), (2, 9), (4, 7), (4, 9).

Otuda, brojevi 7 i 9 ve i maju po dva suseda (nai me, 7 i ma susede 1 i 4, a 9 susede 2 i 4), pa vi xe ne mogu bi ti susedni ni sa jedni m drugi m brojem. Zato 6 ne mo e bi ti susedan sa 7 (jer je 7 ve \popu en"), pa 6 mora bi ti susedan sa 5. Kako 8 mora i mati dva suseda iz skupa $\{3, 5, 9\}$, a broj 9 ve i ma dva suseda (to su brojevi 2 i 4), sledi da broj 8 mora bi ti susedan sa 3 i 5. Stoga, kru ni ca se jedi nstveno zatvara, te dobi jamo raspored:

1, 3, 8, 5, 6, 2, 9, 4, 7

(u smeru suprotnom od kaza ke na satu).



Na kraju, lako se proverava da su zbirni susednih parova u tom rasporedu: $1 + 3 = 4$, $3 + 8 = 11$, $8 + 5 = 13$, $5 + 6 = 11$, $6 + 2 = 8$, $2 + 9 = 11$, $9 + 4 = 13$, $4 + 7 = 11$, $7 + 1 = 8$, te ni jedan nije deliv sa 3, 5 ili 7. Dakle, takav raspored postoji (videti sliku).

Трећи разред – Б категорија

1. Najpre uoqi mo da je dati proizvod oblika $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$, gde je

$$A = 3 \sin x - 10, \quad B = 4 \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zato važi

$$f(x) = (3 \sin x - 10)^2 - (4 \cos x)^2 = (3 \sin x - 10)^2 - 16 \cos^2 x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Kako je $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, dobi jamo

$$f(x) = (3 \sin x - 10)^2 - 16(1 - \sin^2 x).$$

Neka je $t = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Tada je $t \in [-1, 1]$. Stoga,

$$f(x) = (3t - 10)^2 - 16(1 - t^2) = (9t^2 - 60t + 100) - 16 + 16t^2 = 25t^2 - 60t + 84, \quad t \in [-1, 1].$$

Dakle, mi ni mi zaci ja funkcije f svodi se na mi ni mi zaci ju kvadratne funkcije

$$g(t) = 25t^2 - 60t + 84, \quad t \in [-1, 1].$$

Dopunom do kvadrata bi noma dobi jamo

$$g(t) = 25t^2 - 60t + 84 = (5t - 6)^2 + 48,$$

te, da nema ograniqe a $t \in [-1, 1]$, mi ni mum bi bio 48 i postizao bi se za $t = \frac{6}{5} > 1$, ali to nije mogu e, jer je $|\sin x| \leq 1$, tj. $t \in [-1, 1]$. Stoga, kako je grafik funkcije g parabola otvorena navi xe i kako je x koordinata temena iste ve a od 1, to na segmentu $[-1, 1]$ ona opada, te mi ni mum se posti e u tački $t = 1$. Zato je

$$\min_{t \in [-1, 1]} g(t) = g(1) = 25 - 60 + 84 = 49.$$

Dakle, $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 49$ i isti se posti e taqno kada je $\sin x = 1$, tj. za $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Dati si stem jednaqi na je defini san za $x > 0$ i $y > 0$. Kako va i $x^{\ln y} = y^{\ln x} = e^{\ln x \ln y}$, to iz prve jednaqi ne dobi jama $e^{\ln x \ln y} = 1$. Logari tmova em obe strane posl ed e jednakosti dobi ja se $\ln x \ln y = 0$, odakl e je $x = 1$ i l i $y = 1$.

Ukol i ko je $x = 1$, tada iz druge jednaqi ne si stema i mamo $1^{\ln 1} + y^{\ln y} = e + 1$, odakl e je $y^{\ln y} = e$. Logari tmova em dobi jama $(\ln y)^2 = 1$, odnosno $\ln y = \pm 1$, odakl e su rexe a $y = e$ i l i $y = e^{-1}$. Sl uqaj $y = 1$ daje anal ognu rexe a $(e, 1)$ i $(e^{-1}, 1)$.

Dakl e, rexe a su: $(1, e), (1, e^{-1}), (e, 1), (e^{-1}, 1)$.

3. Pri meti mo da ne mogu sva tri broja p, q i r bi ti neparna. Zai sta, tada bi $p^2 + q^3$ bio paran broj, a r^4 neparan. Kako je 2 jedi ni paran prost broj, barem jedan od p, q i r mora bi ti jednak 2. Di skutujemo tri sl uqaja.

1. $p = 2$: Va i $(r^2 - 2)(r^2 + 2) = r^4 - 4 = q^3$. Kako je q prost broj, sl edi $\{r^2 - 2, r^2 + 2\} = \{q, q^2\}$ i l i $\{r^2 - 2, r^2 + 2\} = \{1, q^3\}$. Odavde sl edi $q^2 - q = 4$ i l i $q^3 - 1 = 4$. Za $q = 2$ ne va i ni jedno od navedenog. Za $q \geq 3$ se dokazuje $q^2 - q > 4$ i $q^3 - 1 > 4$. U ovom sl uqaju nema rexe a.

2. $q = 2$: Va i $(r^2 - p)(r^2 + p) = r^4 - p^2 = 8$. Odavde je $r^2 + p \leq 8$, xto daje mogu nosti $p \in \{2, 3, 5, 7\}$ i $r \in \{2\}$. Di rektnom proverom vi di mo da ni jedna kombi naci ja ne daje rexe e.

3. $r = 2$: I mamo $p^2 + q^3 = 16$. Kako je $p^2 < 16$ i $q^3 < 16$, ostaju mogu nosti $p \in \{2, 3\}$ i $q \in \{2\}$. Di rektnom proverom vi di mo da ni jedna kombi naci ja ne daje rexe e.

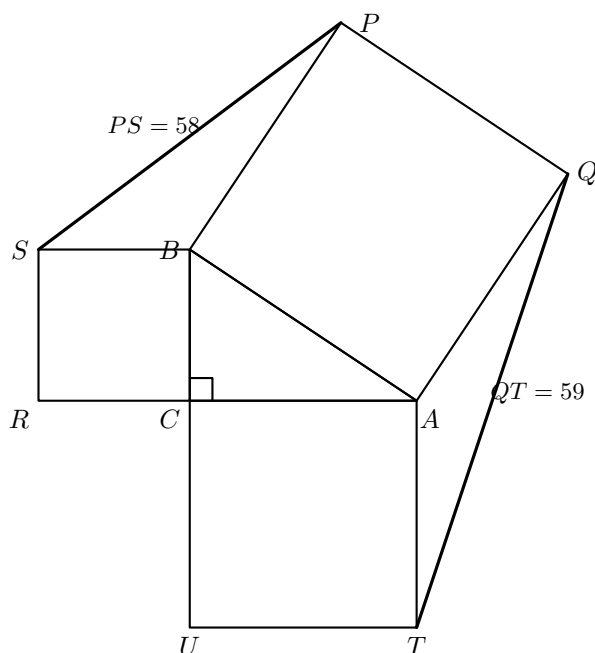
4. Neka su du i ne strani ca pol aznog trougl a $AB = c$, $BC = a$ i $CA = b$. Kori ste i kosi nusnu teoremu, koju prime ujemo na $\triangle TAQ$ i na $\triangle PBS$, dobi jama:

(1) $\triangle TAQ$: I mamo

$$TA = b, \quad AQ = c, \quad \angle TAQ = 180^\circ - \angle CAB = 180^\circ - \alpha,$$

gde je $\alpha = \angle CAB$, pa je

$$\cos(\angle TAQ) = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{b}{c}.$$



Kosi nusna teorema nam daje:

$$QT^2 = TA^2 + AQ^2 - 2 \cdot TA \cdot AQ \cdot \cos(\angle TAQ).$$

$$59^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \left(\frac{b}{c}\right).$$

$$3481 = 3b^2 + c^2. \quad (1)$$

(2) $\triangle PBS$: I mamo

$$PB = c, \quad BS = a, \quad \angle PBS = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \beta,$$

gde je $\beta = \angle ABC$, te je

$$\cos(\angle PBS) = \cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta = -\frac{a}{c}.$$

Kosi nusna teorema nam, tada, daje:

$$PS^2 = PB^2 + BS^2 - 2 \cdot PB \cdot BS \cdot \cos(\angle PBS).$$

$$58^2 = c^2 + a^2 + 2 \cdot c \cdot a \cdot \left(\frac{a}{c}\right).$$

$$3364 = c^2 + 3a^2. \quad (2)$$

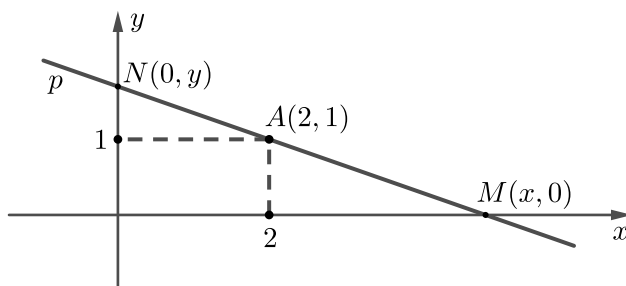
Konaqno, sabi ra em jednakosti (1) i (2) nal azi mo da je $3(a^2 + b^2) + 2c^2 = 3c^2 + 2c^2 = 5c^2 = 6845$, tj. $c^2 = 1369$, tj. $c = AB = 37$.

5. Odgovor: $2025 = 45^2$. Pretpostavimo da su etoni tako postavljeni da se nijedan ne može ukloniti sa table. Posmatrajmo proizvoljan eton sa table. S obzirom na to da se on ne može ukloniti, zaključujemo da u njegovom redu postoji barem 45 etona. Kako se nijedan od tih 45 etona ne može ukloniti, to u koloni svakog od tih 45 etona postoji bar 45 etona. Prema tome, na table je nema e od $45 \cdot 45 = 2025$ etona.

Sa druge strane, popunjava em bilo koje podtable veličine 45×45 sa 2025 etona (ostatak je prazan), lako vidimo da niti jedan od ih ne može ukloniti.

Четврти разред – Б категорија

1. Neka prava p seče ose Ox i Oy u tačkama $M(x, 0)$ i $N(0, y)$, redom, pri čemu je prema postavci $x > 0$ i $y > 0$. Površina takvog trougla je $P = \frac{xy}{2}$. Iz odnosa $x : y = (x - 2) : 1$ dobijamo $y = \frac{x}{x-2}$, a kako je $y > 0$, to mora biti $x > 2$. Površina je sada $P = P(x) = \frac{x^2}{2(x-2)}$, a kako je $P'(x) = \frac{x(x-4)}{2(x-2)^2}$ i $P'(x) < 0$, za $x \in (2, 4)$, odnosno $P'(x) > 0$, za $x > 4$, to je tačka $x = 4$ mi ni mum funkcije P . Površina trougla je tada $P(4) = 4$, a tražena prava, koja prolazi kroz tačke $A(2, 1)$ i $M(4, 0)$, ima jednačinu $x + 2y - 4 = 0$.



Напомена. Mi ni mum funkcije $P(x)$ se mogao odrediti i pri menom nejednakosti i zme u aritmetičke i geometrijske sredine. Naime, jasno je da mora da važi $x > 2$ i $y > 1$. Pri meti mo da važi

$$\frac{x^2}{2(x-2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 4 + 4}{(x-2)} = \frac{1}{2} \left(x + 2 + \frac{4}{x-2} \right) = \frac{1}{2} \left(4 + (x-2) + \frac{4}{x-2} \right).$$

Za $x > 2$ je $x - 2 > 0$, te, na osnovu nejednakosti i zme u aritmetičke i geometrijske sredine, važi

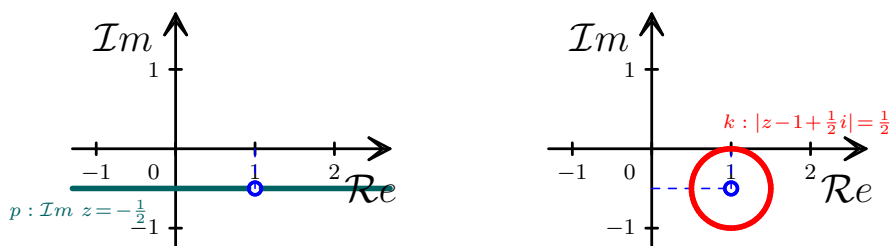
$$(x-2) + \frac{4}{x-2} \geq 2\sqrt{4} = 4.$$

Odatle sledi

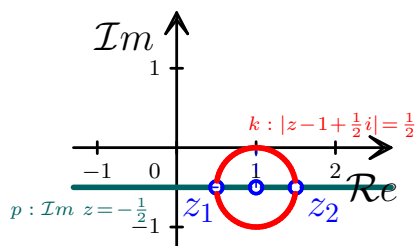
$$\frac{x^2}{2(x-2)} \geq \frac{1}{2}(4+4) = 4,$$

pri čemu jednakost važi za $x-2 = \frac{4}{x-2}$, tj. $x = 4$ (rešenje jednačine je $x = 0$ koje ne uzimamo u razmatranje zbog uslova $x > 2$).

2. Neka je $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Tada, iz $z \in A = \{z : z - \bar{z} + i = 0\}$ dobijamo da je $y = -\frac{1}{2}$, tj. dobijamo da su u pitanju kompleksni brojevi oblika $z = t - \frac{1}{2}i$, $t \in \mathbb{R}$. Oni predstavljaju pravu $p: \operatorname{Im} z = y = -\frac{1}{2}$ (paralelnu sa realnom osom) u kompleksnoj ravni (videti sliku).



Analogno, iz $z \in B = \{z : \operatorname{Im}(\frac{1}{z-1}) = 1\}$ dobijamo da je $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(x-1)+iy}$.
 $\frac{(x-1)-iy}{(x-1)^2+y^2} = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + i\frac{-y}{(x-1)^2+y^2}$. Stoga, jednačina $\operatorname{Im} \frac{1}{z-1} = 1$ se svodi na $\frac{-y}{(x-1)^2+y^2} = 1$, tj. $(x-1)^2+y^2 = -y$, tj. $(x-1)^2+y^2+y+\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, odnosno $(x-1)^2+(y+\frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2$, što znači da skup $B = \{z \mid \operatorname{Im} \frac{1}{z-1} = 1\}$ u kompleksnoj ravni određuje kružnicu k sa centrom u tački $1 - \frac{1}{2}i$ i poluprečnikom $\frac{1}{2}$ (videti sliku iznad).



Dakle, rešenje polaznog sistema jednačina $z - \bar{z} + i = 0$ i $\operatorname{Im} \frac{1}{z-1} = 1$ je skup $A \cap B$, a to su kompleksni brojevi $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ i $z_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$.

3. (PRVO REXE) Dešemo obe strane jednačine sa n dobijamo:

$$(n-1)! + 1 = n^{n-1}.$$

Prvo, primeti mo da $n = 1$ nije rexe e, a $n = 2$ jeste rexe e. Da e, za $n \geq 3$ i mamo

$$(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) < (n-1) \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdots (n-1) = (n-1)^{n-1}.$$

Sa druge strane va i i

$$n^{n-1} - (n-1)^{n-1} = n^{n-2} + n^{n-3}(n-1) + \cdots + n(n-1)^{n-3} + (n-1)^{n-2}.$$

Jasno je da je za $n \geq 3$ ovaj izraz ve i od 1, pa drugi h rexe a nema. Napomeni mo da smo ovde koristi li i poznati i denti tet:

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad k \geq 2.$$

(DRUGO REXE E) Kao u prvom rexe u, jednaqi na je ekvi val entna sa $(n-1)! + 1 = n^{n-1}$. Doka i mo pri nci pom matemati qke i ndukci je da za $n \geq 3$ va i i

$$(n-1)! + 1 < n^{n-1}.$$

Baza: za $n = 3$ tvr e e je taqno jer je $(3-1)! + 1 < 3^2$.

I ndukti vna hi poteza: Neka za neko $n \geq 3$ va i i

$$(n-1)! + 1 < n^{n-1}.$$

I ndukti vni korak: Kori ste i i ndukti vnu hi potezu dobi jamo je

$$n! + 1 = n(n-1)! + 1 < n(n^{n-1} - 1) + 1 = n^n - n + 1.$$

Kako je $n \geq 3$, to je $-n + 1 < 0$, pa je $n^n - n + 1 < n^n$. Konaqno, kako je $n^n < (n+1)^n$, to spaja em prethodni h nejednakosti dobi jamo

$$n! + 1 < n^n - n + 1 < n^n < (n+1)^n.$$

Dakl e, na osnovu pri nci pa matemati qke i ndukci je zak uqujemo da za $n \geq 3$ va i i

$$(n-1)! + 1 < n^{n-1}.$$

Proverom sl uqajeva $n = 1$ i $n = 2$ ustanov avamo da je $n = 2$ jedi no rexe e zadatka.

4. Uvedi mo standardne oznake za ugl ove trougl a ABC : $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ i $\angle ACB = \gamma$. Tada je $\angle ADE = \angle DAC + \angle DCA = \frac{\alpha}{2} + \gamma$, kao spo ax i ugao trougl a ADC . S druge strane, kako je E na si metral i du i AD , to je $AE = DE$, pa je $\angle DAE = \angle ADE = \frac{\alpha}{2} + \gamma$. Sada l ako dobi jamo $\angle EAB = \angle DAE - \angle BAD = \gamma$. Konaqno, kako je $\angle EAB = \angle ACB = \gamma$, to je AE tangenta opi sanog kruga oko trougl a ABC .

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

1. Опиши једно ваљано

$$(a^2 - b^2)(ab - 1) = 0 \iff (a - b)(a + b)(ab - 1) = 0,$$

одакле закључујемо да је

$$a \rho b \iff a = b \text{ или } a = -b \text{ или } ab = 1.$$

Stoga, relaciju ρ možemo predstaviti tablicom (0 označava da elementi nisu u relaciji, dok 1 označava da su elementi u relaciji):

ρ	0	1	-1	2	$\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{3}$
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
-1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	1	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	0	0	1	1	0	1	0	0
-2	0	0	0	1	0	1	1	0	0
$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	1	1	1	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	1	1
$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0	0	0	1	1

(a) Испитати особине relacije ρ .

Рефлексивност: Јасно је да за свако $a \in A$ ваљано $a = a$, те је

$$(a^2 - a^2)(a^2 - 1) = 0,$$

односно $a \rho a$, тј. relacija ρ је рефлексивна.

Симетричност: Ако је $a \rho b$, тада ваљано барем једна од следећих импликација:

$$a = b \Rightarrow b = a,$$

$$a = -b \Rightarrow b = -a,$$

$$ab = 1 \Rightarrow ba = 1.$$

У сва три случаја једноставно закључујемо да проишлаци $b \rho a$, тј. relacija ρ је симетрична.

Антисиметричност: Posmatrajmo elemente $a = 1$ i $b = -1$ skupa A . Tada je

$$1\rho - 1 \quad \text{и} \quad -1\rho 1,$$

tj. $a\rho b$ i $b\rho a$, jer je $1 = -(-1)$. Me utim, $a = 1 \neq -1 = b$. Dakle, relacija ρ nije antisimetrična.

Транзитивност. Posmatrajmo, sada, elemente $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$ i $c = -\frac{1}{2}$ skupa A . Važi:

$$2\rho \frac{1}{2} \quad (\text{jep je } 2 \cdot \frac{1}{2} = 1), \quad \frac{1}{2}\rho -\frac{1}{2} \quad (\text{jep je } \frac{1}{2} = -(-\frac{1}{2})).$$

Me utim,

$$2 \not\rho -\frac{1}{2},$$

jer nije ispuena ni ti jedna od jednakosti:

$$2 = -\frac{1}{2}, \quad 2 = -(-\frac{1}{2}), \quad 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Dakle, relacija ρ nije tranzitivna.

(b) S obzirom da relacija ρ nije tranzitivna, ona nije relacija ekvivalencije. Sa druge strane, ako definiemo podskup ρ_1 skupa $A \times A$ sa

$$\rho_1 = \left\{ \left(2, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -2\right), \left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 2\right) \right\},$$

tada relacija

$$\tilde{\rho} = \rho \cup \rho_1$$

postaje tranzitivna (proveriti - refleksivnost i simetričnost ostaju na snazi), odakle zaključujemo da je relacija $\tilde{\rho}$ relacija ekvivalencije.

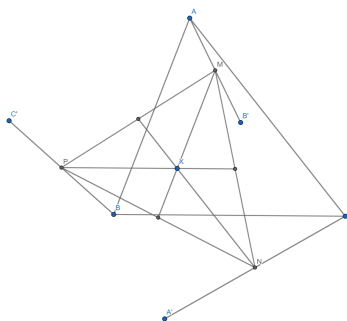
2. Zadatak rešiti uz pomoć vektora i osnovne karakteristike težišta trougla. Za tačku Y , koja predstavlja težište trougla $\triangle MNP$, važi

$$6\vec{AY} = 2\vec{AM} + 2\vec{AN} + 2\vec{AP} = (\vec{AA} + \vec{AB}') + (\vec{AB} + \vec{AC}') + (\vec{AC} + \vec{AA}').$$

Sa druge strane imamo:

$$6\vec{AX} = 2\vec{AX} + 2\vec{AX} + 2\vec{AX} = (\vec{AA} + \vec{AA}') + (\vec{AB} + \vec{AB}') + (\vec{AC} + \vec{AC}'),$$

te je $\vec{AX} = \vec{AY}$, pa se tačke X i Y poklapaju, tj. $X = Y$. Samim tim je tačka X težište trougla $\triangle MNP$.



3. Ana ima pobjedničku strategiju. Nakon svakog poteza, ona će ostaviti Bojanu broj koji je deljiv sa 10. Na početku, Ana briše 2025 sa tablice i zapiše broj $2025 - 5 = 2020$. Tada Ana ostavlja Bojanu broj koji je deljiv sa 10, pa kako Bojan ne može da oduzme 0 od nega, on će Ana ostaviti na tablici broj koji sigurno nije deljiv sa 10. Stoga, Ana ponavlja postupak oduzimanja zadane cifre broja ma kako Bojan igrao.

Nakon konačnog broja koraka, na tablici će biti zapisan broj 10 i tada će Bojan biti na potezu. Bojan zapiše broj 9 na tablici i tada Ana zapiše broj $9 - 9 = 0$, čime pobeđuje u igri.

4. Perica jeste uspeo da na tablici zapiše svaki prirodan broj. Zapravo, neka je n proizvoljan prirodan broj i neka je njegov dekadni zapis $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_1}$.

Označimo sa $s = \sum_{i=1}^k a_i$ zbir cifara broja n . Očigledno je $10^k > s$. Tada, broj

$$\frac{\overbrace{111 \dots 11}^{k \text{ puta}} a_k a_{k-1} \dots a_1}{10^k - s}$$

ima zbir cifara 10^k i k -toci deo završetak jednak n , pa će Perica na tablici zapisati upravo broj n .

5. Prijetimo da je leva strana ne manja od 3, pa je $b > 0$. Pretpostavimo prvo da je $a > 0$. Posmatrajmo obe strane date jednakosti po modulu 3. Tada je

$$1 + 3^a + 2025^b \equiv 1 + 0 + 0 \equiv 1 \pmod{3}, \text{ kao i } 2027^b \equiv (-1)^b \pmod{3}.$$

Odatle je b paran broj iz \mathbb{N} . Slično, posmatrajući obe strane date jednakosti po modulu 8 dobijamo

$$1 + 3^a + 2025^b \equiv 1 + 3^a + 1 \equiv 2 + 3^a \pmod{8}, \text{ kao i } 2027^b \equiv 3^b \pmod{8}.$$

Kako je $3^2 = 9 \equiv 1 \pmod{8}$, to je $3^b \equiv 1 \pmod{8}$, za svaki paran prirodan broj b . Međutim, leva strana je po istom modulu kongruentna sa $2 + 3^a$, što

je kongruentno sa 3 i li 5 po modul u 8. Dakle, u ovom slučaju nema rešenja. Sledi, $a = 0$, pa bi za $b > 1$ važio

$$2 = 2027^b - 2025^b \\ = (2027 - 2025)(2027^{b-1} + 2027^{b-2} \cdot 2025 + \dots + 2027 \cdot 2025^{b-2} + 2025^{b-1}) > 2.$$

Konačno, proverom nalazimo da je jedino rešenje zadatka $(a, b) = (0, 1)$.

Други разред – А категорија

1. Neka je L izraz koji se nalazi sa leve strane nejednakosti u postavci zadatka. Tada, po AG nejednakosti primenimo na tri sabirka u izrazu L , imamo da važi

$$L \geq 3 \sqrt[3]{\frac{2x^2 + yz + y^2 + zx + z^2 + xy}{(zx + xy)(xy + yz)(yz + zx)}}.$$

S obzirom da važi $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$, dobijamo da je $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, odakle je

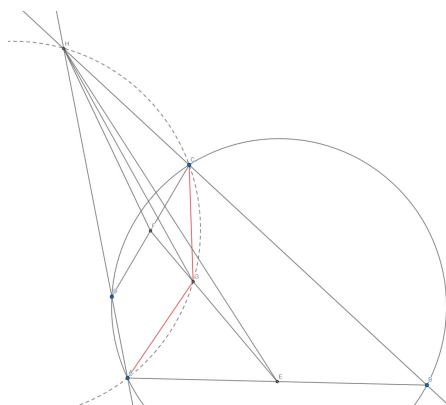
$$L \geq 3 \sqrt[3]{\frac{2^2(xy + yz + zx)}{(zx + xy)(xy + yz)(yz + zx)}} = 3 \sqrt[3]{\frac{2^6}{(zx + xy)(xy + yz)(yz + zx)}}.$$

Primenimo i, ponovo, AG nejednakost na qini očetu i menioču, te korišćenje uslova zadatka, dobijamo

$$\sqrt[3]{(zx + xy)(xy + yz)(yz + zx)} \leq \frac{(zx + xy) + (xy + yz) + (yz + zx)}{3} = \frac{6}{3} = 2,$$

odakle nalazimo da je $L \geq 3 \cdot \frac{2^6}{2} = 6$, qime je dokaz završen. Napomenimo da jednakost važi ako i samo ako je $x = y = z = 1$.

2. Neka je tačka H presek pravih AD i BC . Kako je četvorougao $ABCD$ tetivan, znamo da je $\angle CDH = \beta$ i $\angle DCH = \alpha$, odakle zaključujemo da je $\triangle HAB$ sličan sa $\triangle HCD$. Kako su E i F središta odgovarajućih stranica u sličnim trouglima, imamo da je $\triangle HEB$ sličan sa $\triangle HFD$, odakle nalazimo da je $\angle DHF = \angle BHE$ (*), kao i $\frac{HF}{HE} = \frac{DF}{BE} = \frac{CD}{AB} = \frac{FG}{GE}$, pa na osnovu obrnute teoreme o simetrali ugla imamo da je HG simetrala $\angle FHE$. Dakle, $\angle FHG = \angle EHG$, a zbog (*), dobijamo $\angle AHG = \angle CHG$, odnosno da je HG simetrala $\angle AHC$. Posmatrajmo, sada, opisani krug $\triangle HAC$. Neka isti simetrala $\angle AHC$ seče u tački G' . Tada znamo da je tačka G' središte maeluka AC , odnosno $AG' = CG'$, a kako imamo i $AG = CG$, te da su tačke G, G' sa iste strane prave AC , zaključujemo $G = G'$. Stoga je $\angle AGC = 180^\circ - \angle AHC = \alpha + \beta$.



Напомена. Уколико је $AD \parallel BC$, тада је четворougао $ABCD$ трапеze, одакле тривијално добијамo тврe e.

3. Очигледно је $k > 0$. Дokaјмо да $k = 1$ задовољава услове задатка, тј. да избациваeм највише једног qлана добијамo низ са траeним својством. Дokaјмо и зводимо индукцијом по n , при чему слoужајеви $n = 1$ и $n = 2$ тривијално ваe. Претпоставимо да имамo низ дужине $n > 2$. Ако је $a_1 = 0$ и $a_n = 0$, при меном индуктивне хипотезе на низ a_2, \dots, a_n , односно на низ a_1, \dots, a_{n-1} , завршавамо индуктивни корак. Да e, ако постоји $i < n$ са својством да је $a_i = a_{i+1}$, моeмо применити индуктивну хипотезу на низ без qлана a_i, a_{i+1} , па онда врати тoва два qлана. При мети мо да ти ме нисмо пореметили траeну суму, одакле закључујемо да тврe e ва и. Остао је слoужај $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) = (1, 0, 1, \dots, 1, 0, 1)$. Очигледно је да тада n мора бити непарно, те је довољно избаци тo qлан $a_{\frac{n+1}{2}}$, qи ме је доказ завршен.

4. Нeka је $S_k = \{f^k(1), f^k(2), \dots, f^k(2025)\}$, за $k \in \mathbb{N}_0$, при чему је $S_0 = \{1, 2, \dots, 2025\} = A$. За сваки елемент $x \in A = S_0$ функција f одређује eгов следбеник $f(x)$. Број x је претходник броја y ако важи $f(x) = y$. Очигледно је да један број моe имати више претходника, али (пошто је f функција - једнозначна је) сваки број има тaчно једног слeдбеника.

Јасно је да скуп S_{k+1} добијамo из скупа S_k тако што сваки елемент $x \in S_k$ заменимо eговим слeдбеником $f(x)$. Другим речима,

$$S_{k+1} = f(S_k) = \{f(x) : x \in S_k\}.$$

При мети мо да елемент $y \in S_k$ се не појављује у скупу S_{k+1} ако и само ако нема претходника у скупу S_k , тј. ако не постоји $x \in S_k$ такав да је $f(x) = y$. Такве елементе моe звати листовима (прецизније, листовима у скупу S_k). Ако нема листова, скуп постаје стабилан, тј. функцијом f иде у себе. Претпоставимо да у неком кораку, при прелазу $S_k \rightarrow S_{k+1}$ функцијом f ,

ниједан елемент из S_k није лист. То знаћи да сваки $y \in S_k$ има бар једног претходника у S_k , тј. постоје $x \in S_k$ са $f(x) = y$. Дакле, преликава $f : S_k \rightarrow S_k$ је сурјективна. Како је S_k коначан скуп, из сурјективности следи ијегова ијективност, па је $f : S_k \rightarrow S_k$, заправо, бијекција у том случају. Отуда,

$$S_{k+1} = f(S_k) = S_k.$$

Да је, тривијалном индукцијом добијемо да је

$$S_k = S_{k+1} = S_{k+2} = S_{k+3} = \dots,$$

дакле, од тог тренутка нада се скуп се више не мења деловањем функције f (достиге се такозвани фиксни скуп). Међутим, фиксни скуп мора настати најкасније до 2024. корака. Ако у неком кораку постоји барем један лист, тада тај лист нестане у следећем скупу, па се број елемената строго смањује:

$$|S_{k+1}| < |S_k|.$$

Пошто је $|S_0| = 2025$, такво строго смањивање може да се догоди највише 2024 пута, јер скупови S_k никада ни су празни (на пример, увек садрже елемент $f^k(1)$). Зато, најкасније до корака $k = 2024$, мора наступити ситуација без листа, тј. мора се достићи фиксни скуп.

Када се фиксни скуп једном достигне, он остаје исти у свим наредним корацима, па посебно важи

$$S_{2024} = S_{2025}.$$

што знаћи да је

$$\{f^{2024}(1), f^{2024}(2), \dots, f^{2024}(2025)\} = \{f^{2025}(1), f^{2025}(2), \dots, f^{2025}(2025)\},$$

што је и требало доказати.

5. Претпоставимо да постоји такав природан број x , тј. да је $x = m^2$, за неко $m \in \mathbb{N}$. Тада је

$$1111111111 \cdot 10^9 \leq x < 1111111111 \cdot 10^9 + 10^9,$$

што је еквивалентно са

$$\begin{aligned} 9999999999 \cdot 10^9 &\leq 9x < 9999999999 \cdot 10^9 + 9 \cdot 10^9 \\ \Leftrightarrow (10^{11} - 1) \cdot 10^9 &\leq 9x < (10^{11} - 1) \cdot 10^9 + 9 \cdot 10^9. \end{aligned}$$

С друге стране, приметимо да је

$$(10^{10} - 1)^2 = 10^{20} - 2 \cdot 10^{10} + 1 < (10^{11} - 1) \cdot 10^9 \leq 9x,$$

као и

$$(10^{10} + 1)^2 = 10^{20} + 2 \cdot 10^{10} + 1 > 10^{20} + 8 \cdot 10^9 > 9x,$$

te je

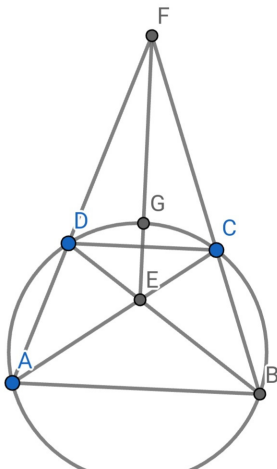
$$(10^{10} - 1)^2 < 9x = (3m)^2 < (10^{10} + 1)^2,$$

odakle sledi da je $3m = 10^{10}$. No, ova jednačina, tj. jednačina $3m = 10^{10}$, nema rešenja po m u skupu \mathbb{N} , jer broj 10^{10} nije deljiv sa 3. Dakle, takav broj x ne postoji.

Трећи разред – А категорија

1. Dakle, treba naći sve funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ za koje je $f(x(x+y)) = x^2 + yf(x)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Uvrstivši $(x, y) = (0, 0)$ u poslednju jednakost dobijamo $f(0) = 0$. Uvrstivši, zatim, $(x, y) = (x, -x)$, za $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, imamo $f(0) = x^2 - xf(x)$, odnosno $xf(x) = x^2 \iff f(x) = x, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dakle, $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$, i lako se proverava da ta funkcija zadovoljava uslove zadatka.

2. Prave AG i BG su simetralne uglova DAE i CBE , redom, pa je po teoremi o simetralnim uglovima $\frac{AE}{AF} = \frac{BE}{BF} = \frac{EG}{GF}$. Znamo da su trouglovi BDF i CAF slični, te je $\frac{AF}{BF} = \frac{AC}{BD}$.



Kombinovanjem prethodne dve jednakosti dobijamo $\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BD} = \frac{AE+EC}{BE+ED}$, odakle je $\frac{AE}{BE} = \frac{EC}{ED}$. Sa druge strane, iz sličnosti trouglova AED i BEC nalazimo da je $\frac{AE}{BE} = \frac{ED}{EC}$. Stoga, zaključujemo da je $ED = EC$, odakle dobijamo da je $AE = BE$ i $AB \parallel CD$, čime je dokaz završen.

3. Vidi se da je $a_{n+1}^2 - 90a_n a_{n+1} + a_n^2 - 1 = 0$ i $a_{n+2}^2 - 90a_{n+1} a_{n+2} + a_{n+1}^2 - 1 = 0$. Oduzimanjem prve od druge jednačine dobijamo da je $a_{n+2}^2 - a_n^2 - 90a_{n+1} a_{n+2} + 90a_n a_{n+1} = 0$, odnosno $(a_{n+2} - a_n)(a_{n+2} + a_n - 90a_{n+1}) = 0$. Kako je niz (a_n)

strogo rastu i (jer je $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, odakle se dobija da je $a_{n+1} - a_n > 0$), mora važi i $a_{n+2} = 90a_{n+1} - a_n$, te kako je $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, principi pom matematičke indukcije, tri vijalno dobijamo da je svaki član ni za (a_n) ceo broj. Iz dobijene relacije sledi da 90 deli $a_{n+2} - a_n$, a kako je $a_0 = 0$, indukcijom dobijamo da 90 deli a_{2n} za sve prirodne brojeve n .

4. Odgovor je $\frac{p-1}{2}$. Primetimo da dva susedna broja ne mogu dati isti ostatak pri deljenju sa p , jer bi onda $a_i \equiv a_{i+2} \pmod{p}$, za neko i , što je nemoguće. Zato nije moguće da traženi maksimum bude veći od $\frac{p-1}{2}$.

Dokazimo sada da je moguće postići $\frac{p-1}{2}$. U tom cilju, izaberimo x tako da ne postoji nijedan prirodan broj a za koji je $a^2 \equiv x \pmod{p}$. Svakako, ovakvo x je moguće izabrati, jer je, na primer, $1^2 \equiv (-1)^2 \pmod{p}$. Podelimo brojeve a_i u parove tako da proizvod brojeva u paru daje ostatak x pri deljenju sa p . Konkretno, u paru sa brojem a je broj $a^{-1}x \pmod{p}$. Na osnovu izbora broja x znamo da nijedan broj neće biti uparen sam sa sobom, te smo formirali $\frac{p-1}{2}$ disjunktnih parova i ih možemo staviti na prve dve pozicije permutacije, zatim na treću i četvrtu i tako dalje, redom. Ovim je dokaz završen.

5. Odgovor je svako $n \in \mathbb{N}$, pri čemu n nije potpun stepen nekog prostog broja.

Posmatrajmo graf $G_n = (V_n, E_n)$, gde je $V_n = \{1, 2, \dots, n\}$ skup qvorova, dok je skup grana E_n određen na osnovu zahteva: $[i, j] \in E_n$ ako i samo ako $(i + j, n) > 1$. Postavka zadatka je ekvivalentna određenju u svih $n \in \mathbb{N}$ za koje je G_n povezan graf. Rešenje ćemo kompletirati uz pomoć sledećih leme.

Lema 1: Ako je $n = p$ prost broj, tada G_n nije povezan graf.

Dokaz: Primetimo da važi $(1, p) = (2, p) = \dots = (p-1, p) = 1$, pa qvor p nije povezan ni sa jednim drugim qvorom grafa. \square

Lema 2: Ako je $n = p^k$, gde je p prost broj, a $k \geq 2$ prirodan broj, tada graf G_n nije povezan.

Dokaz: Posmatrajmo qvorove $p, 2p, 3p, \dots, p^2, (p+1)p, \dots, p^k$ (odnosno sve qvorove čija oznaka je deljiva sa p). Oni su svi međusobno povezani. Proizvodno izaberimo neki od ostalih qvorova i neka je to qvor i . Qvor i neće biti povezan nijednim qvorom oblika mp , jer bi tada važilo $(i + mp, p^k) > 1$, tj. $p | i + mp$, tj. $p | i$, što je nemoguće. \square

Dakle, dokazali smo da za vrednosti n koje su stepeni prostog broja, graf G_n nije povezan. Preostaje nam da dokažemo da za sve ostale vrednosti n , graf G_n jeste povezan.

Lema 3: Neka je n prirodan broj koji ima barem dva različita prosta delioca p i q . Tada je graf G_n povezan.

Доказ: Neka je $n = pqs$ za $s \in \mathbb{N}$. Posmatrajmo qvorove $q, 2q, \dots, pq$ - oni su svi međusobno povezani. Proizvodno izaberimo neki od ostalih qvorova i neka je to qvor i . Dokažemo da je qvor i povezan sa barem jednim

qvorom iz skupa $q, 2q, \dots, pq$. Pri meti mo da skup $q, 2q, \dots, pq$ qi ni potpun si stem ostataka po modul u p . Sami m ti m, postoji neko $k \in \{1, \dots, p\}$ tako da je $kq \equiv -i \pmod{p}$, odnosno $p|(kq + i)$, tj. $kq + i = mp$. Zbog toga je $(kq + i, n) = (mp, pqs) = p \cdot (m, qs) > 1$. Sada je l ako pokazati da za svaka dva qvora i, j postoji $[i, j]$ put u G_n . Razl i kujemo tri sl uqaja:

1. qvorovi i i j su obl i ka $kq, 1 \leq k \leq p$: tada su i i j povezani granom.
2. taqno jedan od qvorova i i j je obl i ka $kq, 1 \leq k \leq p$: Neka je $i = kq$, za $1 \leq k \leq p$, na pri mer. Po prethodno dokazanom, postoji m tako da je $[j, mq] \in E_n, 1 \leq m \leq p$. Razl i kova emo, stoga, dva podsl uqaja:
 - (a) $m = k$: tada su qvorovi i i j povezani granom.
 - (b) $m \neq k$: Tada i mammo put, koji spaja qvorove i i j , nastao nadovezi - va em grana $[kq, mq]$ i $[mq, j]$, jer je $i = kq$.
3. Ni jedan od qvorova i i j ni je obl i ka $kq, 1 \leq k \leq p$: Tada postoje k, m , pri qemu je $1 \leq k, m \leq p$, takvi da $[i, kq], [j, mq] \in E_n$. Anal oqno, ako je:
 - (a) $m = k$, tada i mammo put, koji spaja qvorove i i j , nasttao nadovezi - va em grana $[i, kq]$ i $[mq, j]$, jer je $kq = mq$.
 - (b) $m \neq k$, tada i mammo put, koji spaja qvorove i i j , nadovezi va em grana $[i, kq], [kq, mq]$ i $[mq, j]$.

Четврти разред – А категорија

1. Kori sti emo standardnu oznaku $v_p(t)$, za p -adi qku val uaciju (najve i stepen prostog broja p koji del i $t \in \mathbb{N}$). Pokaza emo sada jednu kori snu l emu na koju emo se pozivati u rexe u.

Лема: Ako su $c, d \in \mathbb{N}, c, d \geq 2$, i $p, q \in \mathbb{N}$ takvi da va i $c^p = d^q$, tada postoji $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, i postoje uzajamno prosti pri rodni brojevi a i b takvi da je $c = k^a$ i $d = k^b$.

Доказ: За сваки прост број r ва и

$$v_r(c^p) = pv_r(c), \quad v_r(d^q) = qv_r(d),$$

odakle, iz $c^p = d^q$, sl edi $pv_r(c) = qv_r(d)$, za svako takvo r . Neka je $g = (p, q)$. Tada je $p = gb$ i $q = ga$, za neke pri rodne brojeve a i b , $(a, b) = 1$. Sl edi $bv_r(c) = av_r(d)$, za svaki prost broj r , te kako je $(a, b) = 1$, dobi jamo da $a | v_r(c)$, odakle zak uqujemo da postoji ceo broj $u_r, u_r \geq 0$, takav da je $v_r(c) = au_r$. Stoga, $v_r(d) = bu_r$. Defi ni xi mo

$$k = \prod_r r^{u_r},$$

gde proi zvod uzi ma po svi m prosti m brojevi ma (samo konaqno mnogo brojeva u_r je razli qi to od nula). Tada je

$$c = \prod_r r^{v_r(c)} = \prod_r r^{au_r} = k^a, \quad d = \prod_r r^{v_r(d)} = \prod_r r^{bu_r} = k^b.$$

□

U nastavku, za svaki prirodan broj $k \geq 2$, neka je

$$k = \prod_{i=1}^s p_i^{\alpha_i} \quad (\alpha_i \in \mathbb{N}),$$

faktori zaci ja tog broja preko egovi h prosti h faktora, odakl e sl edi da je za svako $t \in \mathbb{N}$ i spu eno

$$\tau(k^t) = \prod_{i=1}^s (\alpha_i t + 1).$$

Pre i mo sada na i izvorni probl em.

(a) Pretpostavi mo da va i

$$m^{\tau(m)} = n^{\tau(n)}.$$

Ako je $m = 1$, tada je l eva strana jednakosti jednaka 1, pa mora bi ti i $n = 1$. Dakl e, u ovom sl uqaju nema razli qi ti h rexe a. Analogno postupamo za $n = 1$. Stoga, neka su zato $m, n \geq 2$. Pri me uju i Lemu na jednakost $m^{\tau(m)} = n^{\tau(n)}$, dobi jamo da postoje $k \geq 2$ i uzajamno prosti prirodni brojevi a i b takvi da je

$$m = k^a, \quad n = k^b.$$

Ubaci va em u pol aznu jednakost dobi jamo

$$(k^a)^{\tau(k^a)} = (k^b)^{\tau(k^b)} \implies a \tau(k^a) = b \tau(k^b).$$

Kako je $\tau(k^t) = \prod_{i=1}^s (\alpha_i t + 1)$, od i nteresa e bi ti da uvedemo funkciju:

$$F(t) = t \tau(k^t) = t \prod_{i=1}^s (\alpha_i t + 1), \quad t \in \mathbb{N}.$$

Jasno je da ako je $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$, da je tada $\alpha_i t_1 + 1 < \alpha_i t_2 + 1$, za svako $1 \leq i \leq s$, pa je

$$F(t_1) = t_1 \prod_{i=1}^s (\alpha_i t_1 + 1) < t_2 \prod_{i=1}^s (\alpha_i t_2 + 1) = F(t_2).$$

Dakl e, funkcija F je strogo rastu a na \mathbb{N} , te kako je $a \tau(k^a) = b \tau(k^b)$, to je $F(a) = F(b)$, odakl e sl edi $a = b$, odnosno $m = n$. Dakl e, razli qi ti m i n u ovom del u ne postoje.

(b) Pretpostavimo, sada, da važi

$$m^{\tau(n)} = n^{\tau(m)}.$$

Kao i u prvom delu zadatka, ako je $m = 1$, tada je leva strana jednakosti jednaka 1, pa mora biti $n = 1$. Isto važi u simetričnom slučaju, tj. za $n = 1$. Dakle, neka su, ponovo, $m, n \geq 2$.

Primeni ćemo dokazanu Lemu na jednakost $m^{\tau(n)} = n^{\tau(m)}$. U ovom slučaju dobijamo da postoje $k \geq 2$ i uzajamno prosti prirodni brojevi a i b takvi da je

$$m = k^a, \quad n = k^b.$$

Tada, poznata jednakost postaje:

$$(k^a)^{\tau(k^b)} = (k^b)^{\tau(k^a)} \implies a\tau(k^b) = b\tau(k^a).$$

Kako je $(a, b) = 1$, zaključujemo da $a \mid \tau(k^a)$. Pokažimo da je to moguće samo za $a = 1$.

Zaista, neka je r prost delilac broja a (ako je $a \geq 2$, takav prost broj r postoji) i $k = \prod_{i=1}^s p_i^{\alpha_i}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, za neko $s \in \mathbb{N}$. Za svaki i imamo da je

$$\alpha_i a + 1 \equiv 1 \pmod{r},$$

jer iz $r \mid a$ sledi da je $\alpha_i a \equiv 0 \pmod{r}$. Dakle, r ne deli ni jedan faktor oblika $\alpha_i a + 1$, pa ne deli njihov proizvod, tj. važi

$$r \nmid \prod_{i=1}^s (\alpha_i a + 1) = \tau(k^a).$$

Međutim, $r \mid a$, pa iz uslova $a \mid \tau(k^a)$ sledi da $r \mid \tau(k^a)$, što je kontradikcija. Prema tome, mora biti $a = 1$.

Slično, važi da je i $b = 1$, odakle je

$$m = k^a = k, \quad n = k^b = k,$$

pa je i u ovom slučaju $m = n$, tj. takvi različiti brojevi ne postoje.

2. (a) Za dati polinom Q , sa realnim koeficijentima, uvedi mo operator konačne razlike

$$\Delta Q(x) := Q(x+1) - Q(x).$$

Dokažimo da je operator Δ surjektivan na prostoru realnih polinoma, tj. da za svaki polinom P postoji polinom Q takav da je $\Delta Q(x) = P(x)$, $x \in \mathbb{R}$. U ovom delu zadatka tvrdećemo pokazati primenom principa matematičke indukcije, po stepenu polinoma P .

База индукције: Neka je $\deg P = 0$, tj. neka je $P(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$. Uzmi mo da je $Q(x) = cx$, $x \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\Delta Q(x) = Q(x+1) - Q(x) = c(x+1) - cx = c = P(x).$$

Индуктивни корак: Pretpostavi mo da tvr e e va i za sve pol i nome stepena najvi xe n (i ndukti vna hi poteza). Neka je sada P pol i nom stepena $n+1$, tj. neka je

$$P(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_nx^n + \dots + a_1x + a_0, \quad a_{n+1} \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Razmotri mo pol i nom

$$R(x) := \frac{a_{n+1}}{n+2} x^{n+2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tada, kori ste i bi nomnu formul u, dobi jamo

$$\Delta R(x) = R(x+1) - R(x) = \frac{a_{n+1}}{n+2} ((x+1)^{n+2} - x^{n+2}) = a_{n+1}x^{n+1} + S(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

gde je $S(x)$ neki pol i nom stepena najvi xe n . Sada, defi ni xi mo

$$P_1(x) := P(x) - (R(x+1) - R(x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

S obzi rom da su vode i ql anovi pol i noma P i ΔR jednaki , sl edi da je $\deg P_1 \leq n$. Na osnovu i ndukti vne hi poteze postoji pol i nom Q_1 takav da je

$$P_1(x) = Q_1(x+1) - Q_1(x) = \Delta Q_1(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Konaqno, stavi mo da je

$$Q(x) := R(x) + Q_1(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tada va i

$$\Delta Q(x) = \Delta R(x) + \Delta Q_1(x) = (R(x+1) - R(x)) + P_1(x) = P(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ti me je i ndukci ja zavr xena, te je tvr e e u del u (a) pokazano.

(b) Neka su Q_1 i Q_2 dva pol i noma koja odgovaraju i stom pol i nomu P , tj. neka je

$$\Delta Q_1(x) = Q_1(x+1) - Q_1(x) = P(x) = Q_2(x+1) - Q_2(x) = \Delta Q_2(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Oduzi ma em dobi jamo

$$(Q_2(x+1) - Q_1(x+1)) - (Q_2(x) - Q_1(x)) = 0,$$

odnosno, za pol i nom

$$H(x) := Q_2(x) - Q_1(x)$$

va i $H(x+1) = H(x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Pretpostavi mo da je $\deg H = m \in \mathbb{N}_0$. Ako je $m = 0$, dokaz je zavr xen. Stoga, neka je $m \in \mathbb{N}$. Tada su real ni brojevi

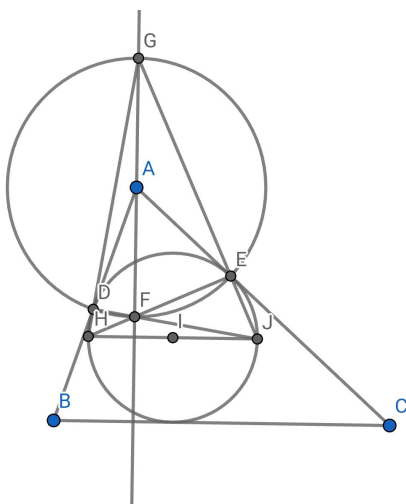
$$H(0), H(1), \dots, H(m)$$

svi me usobno jednaki, jer iz jednakosti $H(x+1) = H(x)$ sledi $H(0) = H(1) = \dots = H(m)$. Posmatrajmo polinom

$$G(x) := H(x) - H(0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

On je stepena $m \geq 1$, a iz prethodnog razmatraćemo da ima nule u tačkama $0, 1, \dots, m$, tj. ima barem $m+1$ različitih nula. To je moguće jedino ako je polinom G nula-polinom, tj. $G(x) = 0, x \in \mathbb{R}$. Dakle, važi $H(x) = H(0), x \in \mathbb{R}$, tj. polinom $H = Q_2 - Q_1$ je konstantan polinom, što se i tvrdilo.

3. Neka je E dodirna tačka upisane kružnice i stranice AC polaznog trougla i neka je G drugi presek visine i kružnice sa centrom u tački A , poluprečnika AD . Kako je FG prečnik te kružnice, to je $\angle GDF = \angle GEF = 90^\circ$.

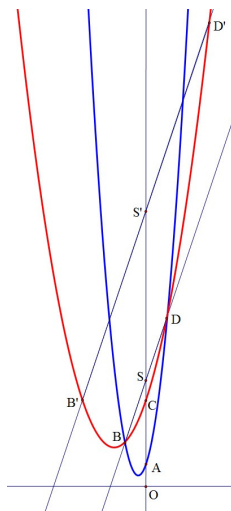


Neka je H presek pravih GD i EF , a J presek pravih GE i DF . Znamo da je F ortocentar trougla HJG . Zato je $GF \perp HJ$, te je $HJ \parallel BC$. Kružnica $ADEI$ je Ojlerova kružnica trougla HJG i dužina AI je prečnik iste, odakle je I središte dužine HJ . S obzirom da je $\angle HDJ = \angle HEJ = 90^\circ$, dobijamo da je $IH = IJ = ID = IE$, pa se tačke J i H nalaze na upisanoj kružnici, čime je dokaz završen.

Напомена. Zadatak se može rešavati uz pomoć računala i uglova. Ako uvedemo tačku S , koja je presek paralele sa BC kroz I i upisane kružnice trougla, tako da je četvorougao $BISC$ konveksan, tada posmatramo jednakokraki trouglova DIS i DAF dobijamo kolikičnost tačaka D, F, S .

4. Obelježimo presečne tačke datih grafičkih sa B i D , a sa S središtem dužine BD . Rešavamo jednačinu $f(x) = g(x)$, gde su rešenja $x = \pm 1$, dobijamo x -koordinate tačaka B i D . Kako je $f(1) = a + b + c$ i $f(-1) = a - b + c$, ove

tačke, neki m redom, i maju koordinate $(1, a + b + c)$ i $(-1, a - b + c)$. Otuda je $S(0, a + c)$.



Neka je $y = kx + n_1$ jednači na pravu BD . Na jednom od grafi ka ski - ci rani h funkci ja odaberi mo proi zvo nu tačku $B' \neq B$ i konstrui xi mo pravu kroz B' koja je paral el na pravoj BD . Neka ta prava seqe odabrani grafi k jox u tački D' i neka je S' sredi xte du i $B'D'$. Kako su pravu BD i $B'D'$ paral el ne, to je jednači na pravu $B'D'$ obl i ka $y = kx + n_2$. Bl ago - dare i Vi jetovi m formul ama i mamo da zbi r rexe a kvadratne jednači ne $f(x) - kx - n = 0$ ne zavi si od n . Otuda je zbi r x -koordinata tačaka B i D jednak zbi ru x -koordinata tačaka B' i D' , te tačke S i S' (kao sredi xta du i) i maju jednake x -koordinate. Kako je $S(0, a + c)$, prava SS' predstav a y osu. Konstrui xi mo jox i x osu. Ako su A i C presečne tačke ski ci rani h grafi ka sa y osom (koja je ve konstrui sana), tada su i hove y -koordinate jednake, neki m redom, a i c . I maju i na umu da je y -koordinata tačke S jednaka $a + c$, zak uqujemo da se sredi xta du i AC i SO pokl apaju, gde je O koordinatni poqetak. Sada i z sredi xta du i AC konstrui xemo kru ni cu koja sadr i tačku S . Drugi presek te kru ni ce i y ose je koordinatni poqetak O . Konstrukcijom normal e na y osu, kroz tačku O , dobijamo i x osu.

5. Neka je a_i broj novqi a uzet u i -tom potezu. Posmatrajmo zbi r $A_i = a_i + a_{i+1}$. Poka i mo da i graq koji i gra u sl ede em potezu, tj. potezu $i+1$, mo e da namesti da je $A_i = i+1$ i i $A_i = i+2$. Oqi gl edno je da $i+1 - a_i \in \{1, 2, \dots, i\}$, kao i $i+2 - a_i \in \{2, 3, \dots, i+1\}$. Neka sada Marko i gra ovom strategijom. Dakl e, znamo da mo e da namesti $A_{2i-1} = 2i$ i i $A_{2i-1} = 2i+1$, te i mamo da

je $\sum_{i=1}^n 2i \leq \sum_{i=1}^{2n} a_i \leq \sum_{i=1}^n 2i+1$, odnosno $n(n+1) \leq \sum_{i=1}^{2n} a_i \leq (n+1)^2 - 1$. Dakl e, za

$(n+1)^2 - n - 1 \leq N \leq (n+1)^2 - 1$ pobe uje Marko. I naqe, ako Ni kol a i gra ovom strategijom, nakon svog prvog poteza (u kom mora da uzme jedan novqi), i mam o $1 + \sum_{i=1}^n 2i+1 \leq \sum_{i=1}^{2n+1} a_i \leq 1 + \sum_{i=1}^n 2i+2$, tj. $(n+1)^2 \leq \sum_{i=1}^{2n+1} a_i \leq 1+(n+1)(n+2)$. Dakl e, za $(n+1)^2 \leq N \leq (n+2)^2 - (n+2) - 1$ pobe uje Ni kol a.

Први разред – Б категорија

1. (a) Da bi f bila bijekcija, mora biti injektivna i surjektivna, tj. 1-1 i „NA“. Na intervalu $(-\infty, -1]$ funkcija f ima oblik $f(x) = |x+1| = -x-1$, te uzima sve vrednosti iz $[0, +\infty)$. Sliqno, na intervalu $(-1, +\infty)$ funkcija f je zadata sa $f(x) = -2x+a$, te e uzeti sve vrednosti iz intervala $(-\infty, a+2)$. Da bi funkcija f bila surjektivna, mora va i ti $[0, \infty) \cup (-\infty, a+2) = \mathbb{R}$, xto je mogu e samo ako je $a+2 \geq 0$, odnosno $a \geq -2$. U tom sl uqaju, tj. za $a \geq -2$, funkcija e bi ti i njektivna jedi no za $a = -2$, jer i mam o dve strogo monotono opadaju e l i nearne funkcije (prva je defi ni sana za $x \leq -1$, dok je druga defi ni san za $x > -1$) sa di sjunktni m kodomeni ma (koji se nadovezuju). Dakl e, jedi no a za koje je f bijekcija jeste $a = -2$.

(b) Za je $a = -2$ odre ujemo i nverznu funkciju f^{-1} funkcije f koja i ma oblik

$$f(x) = \begin{cases} -x-1, & x \leq -1, \\ -2x-2, & x > -1. \end{cases}$$

Za $x \leq -1$ je i spu eno $f(x) = -x-1 \geq 0$, ta za $y \geq 0$ i mam o $y = -(x+1) \implies x = -y-1$. Sliqno, za $x > -1$ je i spu eno $f(x) = -2x-2 < 0$, pa za $y < 0$ i mam o $y = -2x-2 \implies x = -\frac{y+2}{2}$. Dakl e, u ovom sl uqaju, tj. za $a = -2$, i nverzna funkcija $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcije f je

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} -y-1, & y \geq 0, \\ -\frac{y+2}{2}, & y < 0. \end{cases}$$

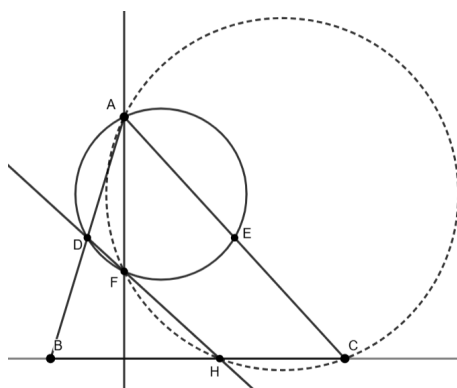
2. Ponovi mo da sa P oznaqavamo skup svih prostih brojeva. Pretpostavi mo suprotno, tj. da postoji 2027 razli qi ti h pri rodni h brojeva $a_1, a_2, \dots, a_{2027}$ takvi h da

$$a_1 \rho a_2 \rho a_3 \rho \dots \rho a_{2027} \rho a_1.$$

Tada je za svaki i ndeks i (i ndekse tretiramo po modul u 2027) broj $a_i + a_{i+1}$ prost. Jedin i paran prost broj je 2, te ako bi za neko i va i l o $a_i + a_{i+1} = 2$, tada bi moral o bi ti $a_i = a_{i+1} = 1$, xto je nemogu e, jer su svi a_i razli qi ti . Dakl e, broj $a_i + a_{i+1}$ je neparan prost, za svaki i ndeks i , odakl e zak uqujemo da su a_i i a_{i+1} suprotne parnosti za svako i . Stoga, parnost datih brojeva se mora nai zmeniti qno sme i vati du cel og ci kl usa.

Me utim, brojeva $a_1, a_2, \dots, a_{2027}$ ima neparno mnogo (plus, kru ni ciklus je u pi ta u), tj. 2027, odakle sledi da brojevi a_1 i a_{2027} imaju potpuno istu parnost. U tom sluqaju, zbir $a_{2027} + a_1$ bi bio paran broj, a po uslovu mora biti prost. Dakle, ponovo, zbir e biti 2, tj. $a_1 = a_{2027} = 1$, xto je nemogu e. Zato, ne postoji 2027 razli qi ti h pri rodni h brojeva sa tra enom osobinom.

3. Kako je prava DE paralelna pravoj BC , jer je du DE sred a linija trougla ABC , i kako je qetvorougao $ADFE$ tetivan, tvr e e trivijano sledi iz ni za jednakosti: $\angle HCA = \angle DEA = \angle DFA = 180^\circ - \angle AFH$.



4. Odgovor je n . Zai sta, pri meti mo da ako izabaremo brojeve $2, 4, 6, \dots, 2n$, koji su parni, dobi jamo da je najve i zajedni qki del ilac svaka dva razli qi ta barem 2.

Sa druge strane, ako iz skupa $\{1, 2, \dots, 2n\}$ izaberemo barem $n+1$ brojeva, tada, po Di ri hleovom pri nci pu, emo izabrati neka dva uzastopna broja, a i hov najve i zajedni qki del ilac je 1, jer, ako za $d \in \mathbb{N}$ va i $d \mid x$ i $d \mid x+1$, tada $d \mid (x+1) - x$, odnosno $d \mid 1$, tj. $d = 1$. Dakle, maksimalno n el emenata pol aznog skupa u tom sluqaju mo emo izabrati.

5. Jasno je da e Perica, ma kakvi m spaja em, dobi ti broj de iv sa 5. Da bi takav broj bio potpun kub, mora biti de iv i sa $5^3 = 125$, tj. da mu trocifreni zavrsetak bude de iv sa 125. Me utim, trocifreni zavrsetak brojeva nastalih spaja em kartona na koji ma pi xu brojevi 20 i 25 mo e biti samo neki od slede ih: $\overline{025}$, $\overline{525}$, $\overline{020}$ i $\overline{520}$. Ni jedan od prethodna tri broja nije de iv sa 125, pa je odgovor negati van.

Други разред – Б категорија

1. Vi di mo da je di skri mi nanta date kvadratne funkcije

$$D = b^2 - 4ac.$$

Prvo, primeti mo da $4 \mid 4ac$ i da broj b^2 daje ostatke 0 ili 1 pri de e u sa 4. Prema tome, $D \equiv 0 \pmod{4}$ ili $D \equiv 1 \pmod{4}$. Sa druge strane, i zborom vrednosti: $a = 1, b = 0$ i $c = -k$, gde je $k \in \mathbb{Z}$ proizvo an ceo broj, dobijamo da je $D = 4k, k \in \mathbb{Z}$, odakle zak uqujemo da kao resul tat, tj. za vrednost di skrimi ni nte, mo emo dobi ti sve cel e brojeve de i ve sa 4. Sli qno, i zborom $a = 1, b = 1$ i $c = -l$, gde je $l \in \mathbb{Z}$ proizvo no, i mam o $D = 4l + 1$, te ovaj i zraz generi xe sve cel e brojeve koji daju ostatak 1 pri de e u sa 4.

Dakle, di skrimi nanta mo e uzeti bi lo koju vrednost i z skupa $4\mathbb{Z} \cup 4\mathbb{Z} + 1$, gde su $4\mathbb{Z} = \{4k : k \in \mathbb{Z}\}$ i $4\mathbb{Z} + 1 = \{4l + 1 : l \in \mathbb{Z}\}$.

2. (PRVO REX E E) Posle sre i va a desne strane pol azne jednaqi ne dobi jamo da je $y = 2(x + y)^2 + y^2 + xy$. Da e i mam o da je $y(1 - y - x) = 2(x + y)^2$. Stavim o da je $x + y = z$. Tada je $y(1 - z) = 2z^2$. Jasno je da je $z \neq 1$, pa je $y = \frac{2z^2}{1-z}$. Sa druge strane, iz $y(1 - z) = 2z^2 - 2 + 2$ sledi da je $(1 - z)(y + 2(z + 1)) = 2$, odakle su mogu e vrednosti za $1 - z$ brojevi $\pm 1, \pm 2$, odnosno $z \in \{0, 2, -1, 3\}$. Konaqno, subli mi ra em svega, rexe a date jednaqi ne su parovi $(x, y) \in \{(0, 0), (10, -8), (-2, 1), (12, -9)\}$.

(DRUGO REX E E) Posmatrajmo datu jednaqi nu kao kvadratnu po x :

$$2x^2 + 5yx + (3y^2 - y) = 0.$$

Da bi rexe a bi la cel a, determi nanta mora da bude cel obrojna, tj. da je broj

$$(5y)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (3y^2 - y) = y^2 + 8y$$

potpun kvadrat. Oznaqi mo $y^2 + 8y = t^2, t \geq 0$, odakle dobi jamo ekvi val entnu jednaqi nu

$$(y + 4)^2 - t^2 = 16 \Rightarrow (y + 4 - t)(y + 4 + t) = 16.$$

Kako su brojevi $y + 4 - t$ i $y + 4 + t$ cel i i $y + 4 - t \leq y + 4 + t$, tabl i ca zavr xava zadatak:

$y + 4 - t$	$y + 4 + t$	$y + 4$	t	y	целобројни x
1	16	$\frac{17}{2}$	$\frac{15}{2}$	није цео	—
2	8	5	3	1	$x = \frac{-5 \cdot 1 \pm 3}{4} \Rightarrow x = -2$
4	4	4	0	0	$x = \frac{0}{4} \Rightarrow x = 0$
-16	-1	$-\frac{17}{2}$	$\frac{15}{2}$	није цео	—
-8	-2	-5	3	-9	$x = \frac{45 \pm 3}{4} \Rightarrow x = 12$
-4	-4	-4	0	-8	$x = \frac{40}{4} \Rightarrow x = 10$

3. Tri tačke od datih 16 možemo odabrati na ukupno $\frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 560$ načina. Od ovog broja moramo oduzeti sve trojke koliniarne tačaka. Pri tome da imamo 10 četvorki koliniarne tačaka (4 vrste, 4 kolone i 2 velike dijagonale - sve su dužine 4), kao i 4 trojke koliniarne tačaka (4 kraje, tj. sporedne, dijagonale - sve su dužine 3). Stoga, prebrojmo kolinearne trojke tačaka.

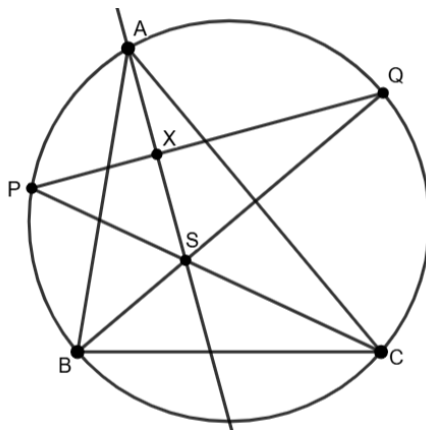
(1) Trojke koje pripadaju nekoj vrsti ili koloni rešetke: U svakoj od 4 vrsta ima 4 tačke, pa je doprinos koliniarnih trojki u tom slučaju $4 \cdot \binom{4}{3} = 4 \cdot 4 = 16$. Analogno, za 4 kolone je još 16, tj. ukupno 32.

(2) Glavne dijagonale: Postoje 2 glavne dijagonale date rešetke dužine 4. Svaka daje doprinos u broju koliniarnih trojki jednak $\binom{4}{3} = 4$, tj. ukupno 8.

(3) Sporedne dijagonale: U okviru rešetke, postoje i 4 sporedne dijagonale rešetke dužine 3. Svaka daje doprinos $\binom{3}{3} = 1$ u broju koliniarnih trojki, tj. ukupno 4.

Konačno, uzimajući u obzir sve pokazano, ukupan broj trouglova biti jednak $560 - 32 - 8 - 4 = 516$ trouglova.

4. Poznato je (a može se i lako pokazati računanjem periferijskih uglava) da su tačke P i Q takve da su prave CP i BQ simetralne uglava $\angle BCA$ i $\angle ABC$. Kao što znamo, simetralne unutrašnjih uglava nekog trougla seku se u centru upisane kružnice i stoga, označimo presečnu tačku CP , BQ i s_α sa S . Takođe, označimo sa X presečnu tačku pravih PQ i s_α .



Posmatrajmo trougao XSQ i izračunajmo njegove unutrašnje uglove. Prvo, imamo da je $\angle XQS = \angle PQB = \angle PCB = \frac{\gamma}{2}$, jer je prava CP simetralna uglava $\angle BCA = \gamma$. Ugao $\angle XSQ$ je suprotni ugao $\triangle ABS$, pa je jednak zbiru njegovih nesusednih unutrašnjih uglava, a to su, zapravo, uglovi $\angle BAS$ i $\angle ABS$.

Iz geometrije da su prave AS i BS simetralne uglava $BAC = \alpha$ i

$\angle ABC = \beta$, sledi da je $\angle BAS = \frac{\alpha}{2}$ i $\angle ABS = \frac{\beta}{2}$. Dakle, $\angle XSQ = \angle BAS + \angle ABS = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, te je

$$\angle SXQ = \pi - \angle XSQ - \angle XQS = \pi - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

a to upravo znači da je $QX \perp XS$, odnosno da je $PQ \perp s_\alpha$.

5. Pri meti mo da odbaci va e nul a sa kraja dekadnog zapi sa nekog pri rodnog broja ne uti qe na stepene trojke koji se jav ajaju u kanonskoj faktori zaciji broja $n!$ (rastav a e na proste faktore), ve samo na stepene dvojke i stepene petice.

Pretpostavi mo, prvo, da je $b \geq 6$. Tada i mam o $9 \mid b!_0$, pa je $12 + b!_0 \equiv 3 \pmod{9}$. Treba i spi tati sl uqajev e $a \in \{3, 4, 5\}$. Sl uqaj $a = 3$ je nemogu , jer je $3!_0 = 6$, pa bi trebal o da bude $b!_0 = -6$. Sl i qno, sl uqaj $a = 5$ je nemogu , s obzi rom da je $5!_0 = 12$, pa bi trebal o da bude $b!_0 = 0$. Konaqno, ako je $a = 4$, tada je $b!_0 = 12$. Me uti m, za $b \geq 6$ i mam o da $9 \mid b!_0$, a znam o da broj koji kao prve dve cifre ima cifre 1 i 2 (sl eva na desno), i za koji h se nal azi gomi l a nul a, ni je de iv sa 9, jer mu je zbi r ci fara jednak 3. Na kraju, razmotri mo sl uqaj $b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Za $b = 1$ i mam o $a!_0 = 13$, a ovo je nemogu e, jer $a = 1$ i $a = 2$ ni su rexe a, a za $a > 2$ bi ovaj broj morao da bude de iv sa 3. I z isti h razl oga $b = 2$ ni je rexe e. Pri meti mo da za svako $n \geq 7$ i mam o $n!_0 \geq 3 \cdot 6 \cdot 7 = 63$. Za $n \leq 6$ l ako raqunamo: $1!_0 = 1$, $2!_0 = 2$, $3!_0 = 6$, $4!_0 = 24$, $5!_0 = 12$ i $6!_0 = 72$. Za $b = 3$ dobi jam o $a!_0 = 18$, a za $b = 4$ dobi jam o $a!_0 = 36$, xto, na osnovu prethodnog razmatra a, ostav a $b = 5$ kao jedi nu mogu nost. Stoga, dobi jam o jedi no rexe e date jednaqi ne par $(a, b) = (4, 5)$.

Трећи разред – Б категорија

1. U proi zvo nom trougl u va i $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, pa je $\cos \gamma = -\cos(\alpha + \beta)$. I z date jednakosti sl edi $1 = 2 \sin \alpha \sin \beta - \cos \gamma$, pa je

$$\cos(\alpha + \beta) + 2 \sin \alpha \sin \beta = 1 \iff \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta = 1$$

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 1 \iff \cos(\alpha - \beta) = 1 \iff \alpha - \beta = 2k\pi, \text{ za } k \in \mathbb{Z}.$$

Kako su α i β ugl ovi trougl a, mora bi ti $k = 0$, odnosno $\alpha = \beta$.

2. S obzi rom da je ekvi val enci ja u pi ta u, razmatra emo dva „smera“ u rexe u.

(\implies): Neka su vektori \vec{x}, \vec{y} i \vec{z} l i nearno nezav i sni . Pretpostavi mo suprotno, tj. da postoji neki par jednaki h brojeva (me u brojevima a, b i c). Neka je, na pri mer, $a = b$. Tada je $\vec{x} = \vec{y}$, tj. $1 \cdot \vec{x} + (-1) \cdot \vec{y} + 0 \cdot \vec{z} = \vec{0}$, pa su vektori \vec{x}, \vec{y} i \vec{z} l i nearno zav i sni , xto je kontradi kci ja.

(\Leftarrow): Neka su brojevi a , b i c po parovi međusobno različiti. Znamo da se vektori \vec{x} , \vec{y} i \vec{z} bit će linearno nezavisni ako važi imпликаcija

$$\alpha_1 \vec{x} + \alpha_2 \vec{y} + \alpha_3 \vec{z} = \vec{0} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,$$

tj. ako važi

$$\alpha_1(1, a, a^2) + \alpha_2(1, b, b^2) + \alpha_3(1, c, c^2) = (0, 0, 0) \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Leva strana je ekvivalentna sustemu od tri jednačine:

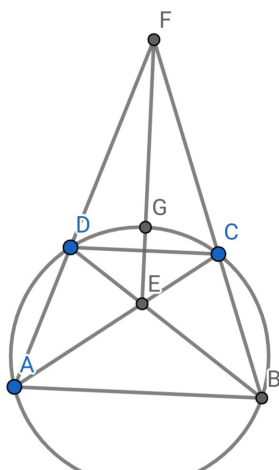
$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c &= 0 \\ \alpha_1 a^2 + \alpha_2 b^2 + \alpha_3 c^2 &= 0. \end{aligned}$$

Stoga, treba pokazati da isti, osim trivijalnog rešenja, tj. rešenja $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$, nema drugih. Lako računamo determinantu sustema:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c).$$

Odavde trivijalno nalazimo da sustem ima jedinstveno rešenje ako je $D \neq 0$, tj. $(a-b)(a-c)(b-c) \neq 0$, što nam obezbeđuje da su brojevi a , b i c po parovi međusobno različiti, što se i tvrdilo u ovom smeru.

3. Prave AG i BG su simetrale uglova DAE i CBE redom, pa je po teoremi o simetrali ugla $\frac{AE}{AF} = \frac{BE}{BF} = \frac{EG}{GF}$.



Znamo da su trouglovi BDF i CAF slični, pa je $\frac{AF}{BF} = \frac{AC}{BD}$. Kombinovavši prethodne dve jednakosti dobijamo $\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BD} = \frac{AE+EC}{BE+ED}$, odakle je $\frac{AE}{BE} = \frac{EC}{ED}$.

Sa druge strane, iz sl i qnosti trougl ova AED i BEC znamo da je $\frac{AE}{BE} = \frac{ED}{EC}$. Stoga, koriste i prethodno, zak uujemo da je $ED = EC$, te je i $AE = BE$ i $AB \parallel CD$, qi me je dokaz završen.

4. Prvo, pri me uujemo da ako je $y < 0$ da je tada i $z < 0$. Me uti m, otuda je $2025^y \in (0, 1)$ i $2026^z \in (0, 1)$, te je $x^{2024} = 2026^z - 2025^y \in (-1, 1)$. Kako je $x \in \mathbb{Z}$, to mora bi ti $x = 0$. Tada ostaje jednaqi na $2025^y = 2026^z$, qi je je $(0, 0)$ jedi no rexe e u skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Dakl e, $y \geq 0$ i $z \geq 0$.

Posmatrajmo jednaqi nu po modul u 4. Za $z \geq 2$ je $2026^z \equiv 0 \pmod{4}$, dok je $2025^y \equiv 1^y \equiv 1 \pmod{4}$ i $x^{2024} \in \{0, 1\} \pmod{4}$ (kvadrat cel og broja). Prema tome, leva strana daje ostatak 1 ili 2 pri de e u sa 4, dok je desna de i va sa 4, za $z \geq 2$. Stoga, $z = 0$ ili $z = 1$.

Ako je $z = 0$, tada ostaje $x^{2024} + 2025^y = 1$. Sada je jasno da je jedi no rexe e ove jednaqi ne par $(x, y) = (0, 0)$. Sa druge strane, ako je $z = 1$, tada ostaje $x^{2024} + 2025^y = 2026$, te su jedi na rexe a ove jednaqi ne parovi $(x, y) = \{(-1, 1), (1, 1)\}$.

Konaqno, pol azna jednaqi na i ma tri rexe a u skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. To su trojke $(x, y, z) = \{(-1, 1, 1), (0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$.

5. Odgovor je poziti van. Nai me, oznaqi mo boje brojevi ma $1, 2, \dots, 2025$. Do vo no je obojiti taqku $(0, k\sqrt{2})$ iz te ravni u boju k , $1 \leq k \leq 2024$, i sve ostale taqke ravni u boju 2025. Vrednost proizvo nog pol i noma sa cel obrojnim koefi cijenti ma u nul i je ceo broj (vrednost je egov sl o bodni ql an), odnosno ni jedna od boja $1, 2, \dots, 2024$ ne e pri pasti ni ti jednom grafi ku pol i noma sa cel i m koefi cijenti ma, te e svaki takav grafi k bi ti u boji 2025.

Четврти разред – Б категорија

1. (PRVO REX E E) Pretpostavi mo da za neke $a, b \in \mathbb{N}_0$ va i $1 + 2^a + 2025^b = (2n)^k$, gde su $n, k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Kako je $k > 1$, i mam o $k \geq 2$, pa je

$$(2n)^k = 2^k n^k \equiv 0 \pmod{4}.$$

Posebno, za $k \geq 3$ va i i

$$(2n)^k \equiv 0 \pmod{8},$$

jer je tada broj 2^k de i v sa 8. Sa druge strane, poxt o je $2025 \equiv 1 \pmod{8}$, sl edi

$$2025^b \equiv 1^b \equiv 1 \pmod{8}, \quad \text{za svaki } b \in \mathbb{N}_0.$$

Zato

$$1 + 2^a + 2025^b \equiv 1 + 2^a + 1 \equiv 2 + 2^a \pmod{8}.$$

Sada posmatramo moguće ostatke broja 2^a po modulu 8:

$$2^a \equiv \begin{cases} 1, & \text{ako je } a = 0, \\ 2, & \text{ako je } a = 1, \\ 4, & \text{ako je } a = 2, \\ 0, & \text{ako je } a \geq 3. \end{cases}$$

Otuda, dnalazi mo da je

$$2 + 2^a \equiv \begin{cases} 3 & (a = 0), \\ 4 & (a = 1), \\ 6 & (a = 2), \\ 2 & (a \geq 3), \end{cases} \pmod{8},$$

te u svakom sluqaju va i

$$2 + 2^a \not\equiv 0 \pmod{8}.$$

Dakl e,

$$1 + 2^a + 2025^b \not\equiv 0 \pmod{8},$$

odnosno broj $1 + 2^a + 2025^b$ nije deљив sa 8. To i sk uquje mogućnost $k \geq 3$, jer bi tada broj $(2n)^k$ bio de i v sa 8, xto je ve napomenuto. Dakl e, mora va i ti $k = 2$.

Za $k = 2$ problem se svodi na tra e e brojeva $a, b \in \mathbb{N}_0$ za koje je $1 + 2^a + 2025^b = (2n)^2 = 4n^2$, za neko $n \in \mathbb{N}$. Posmatrajmo ovu jednakost po modulu 8, ponovo. Znamo da za svaki prirodan broj n va i $4n^2 \equiv 0 \pmod{8}$ i li $4n^2 \equiv 4 \pmod{8}$, jer je $n^2 \equiv 0 \pmod{2}$ i li $n^2 \equiv 1 \pmod{2}$. Sa druge strane, ve smo izraunali da je

$$1 + 2^a + 2025^b \equiv 2 + 2^a \pmod{8},$$

pa mora va i ti

$$2 + 2^a \equiv 0 \pmod{8} \text{ или } 2 + 2^a \equiv 4 \pmod{8}.$$

Me uti m, iz gore navedenih razmatra a vi di mo da je jedina mogućnost

$$2 + 2^a \equiv 4 \pmod{8},$$

koja se dobi ja samo za $a = 1$. Dakl e, $a = 1$, te je

$$1 + 2 + 2025^b = 3 + 2025^b = 4n^2,$$

odnosno $2025^b + 3 = 4n^2$. Konaqno, ako je $b = 0$, tada je $2025^0 = 1$, odakl e je $1 + 2^1 + 2025^0 = 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$, xto jeste stepen parnog broja. Dakl e, $(a, b) = (1, 0)$ je rexe e. Neka je sada $b \geq 1$. Kako je 2025 de i vo sa 5, va i

$2025^b \equiv 0 \pmod{5}$, pa iz $2025^b + 3 = 4n^2$ dobijamo $5 \mid 4n^2 - 3$. Me utim, kvadrati prirodnih (celih) brojeva prirodne u sa 5 daju samo ostatke iz skupa $\{0, 1, 4\}$, odakle sledi da broj $4n^2 - 3$ davati ostatke koji pripadaju skupu $\{1, 2, 3\}$ prirodne u sa 5. Stoga, za $b \geq 1$ broj $4n^2 - 3$ ne može biti deljiv sa 5 ni za jedno n . Konačno, jedino rešenje je par $(a, b) = (1, 0)$.

(DRUGO REŠENJE) Razmotrimo sledeće slučajeve:

1° $a = 0$: Kako je 2025^b neparan broj, sledi da je

$$N = 1 + 2^a + 2025^b = 2 + 2025^b$$

neparan. Me utim, tražimo da N bude stepen parnog prirodnog broja, pa u ovom slučaju nema rešenja.

2° $a \geq 2$: Tada je 2^a deljivo sa 4, pa je

$$N = 1 + 2^a + 2025^b \equiv 1 + 0 + 1^b \equiv 2 \pmod{4}.$$

Dakle, N je deljivo sa 2, ali nije deljivo sa 4. Svaki stepen parnog prirodnog broja deljiv je sa 4, pa N u ovom slučaju ne može biti traženi stepen.

3° $a = 1$: Tada je $N = 3 + 2025^b$. Kako je 2025 deljivo sa 3, to za $b \geq 2$ dobijamo da je 2025^b deljivo sa 9, pa je

$$N = 3 + 2025^b \equiv 3 \pmod{9}.$$

Dakle, N je deljivo sa 3, ali nije deljivo sa 9, pa ne može biti stepen prirodnog broja. Ostaje ispitati još samo slučajeve $b = 0$ i $b = 1$.

3.1° $b = 0$: Tada je $N = 3 + 1 = 4 = 2^2$, što jeste stepen parnog prirodnog broja.

3.2° $b = 1$: Tada je $N = 3 + 2025 = 2028 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$, pa taj broj nije stepen nekog prirodnog broja.

Dakle, jedino rešenje zadatka je $(a, b) = (1, 0)$.

2. (PRVO REŠENJE) (a) Očigledno je da je domen date funkcije skup \mathbb{R} . Poimod osnovnog trigonometrijskog identiteta: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. egovim kvadriranjem dobijamo

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x.$$

Slično, podizanjem tog izraza na treći stepen, dobijamo

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^6 x &= 1 - 3\sin^4 x \cos^2 x - 3\sin^2 x \cos^4 x \\ &= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x. \end{aligned}$$

Sveukupno, i mam o

$$f_k(x) = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x + k(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x) = (1 + k) - (2k + 3) \sin^2 x \cos^2 x,$$

odnosno

$$f_k(x) = (1 + k) - (2k + 3) \frac{\sin^2 2x}{4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sada je jasno da je domen funkcije cel o \mathbb{R} . Pri meti mo da funkcija $x \mapsto \sin^2 2x$, $x \in \mathbb{R}$, uzi ma sve real ne vrednosti i z segmenta $[0, 1]$.

(b) Potreban i dovo an uslov da bi $f_k(x) \leq 0$, na cel om domenu, je da u taqkama u koji ma je $\sin^2 2x = 0$ i $\sin^2 2x = 1$ va i $f_k(x) \leq 0$ (jedna od ove dve vrednosti je maksimum funkcije, xto zavi si od znaka broja $2k + 3$). U taqkama u koji ma je $\sin^2 2x = 0$ i mam o $f_k(x) = 1 + k$, xto daje $k \leq -1$. Si i qno, zamenom vrednosti $\sin^2 2x = 1$, dobi jam o $k \leq -\frac{1}{4}$. Dakl e, odgovor je $k \in (-\infty, -1]$.

(v) Funkcija je konstantna ako i samo ako je $2k + 3 = 0$, tj. $k = -\frac{3}{2}$. Kako je konstantna na cel om skupu \mathbb{R} , to u svakoj taqki i ma i stu vrednost, pa je $f_{-\frac{3}{2}}(2026) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$.

(DRUGO REX E E) (a) Domen je cel o \mathbb{R} . (b) Odredi mo sve k takve da je $f_k(x) \leq 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$. U tom ci u, i zraquna emo izvod funkcije $f_k(x)$ po promen i voj x (smatram o k real ni m parametrom):

$$\begin{aligned} f'_k(x) &= 6 \sin^5 x \cos x - 6 \cos^5 x \sin x + k(4 \sin^3 x \cos x - 4 \cos^3 x \sin x) \\ &= 2 \sin x \cos x \left(3 \sin^4 x - 3 \cos^4 x + 2k \sin^2 x - 2k \cos^2 x \right). \end{aligned}$$

Pri meti mo da va i

$$\begin{aligned} 3 \sin^4 x - 3 \cos^4 x &= 3(\sin^4 x - \cos^4 x) = 3(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= 3(\sin^2 x - \cos^2 x), \end{aligned}$$

te je

$$\begin{aligned} f'_k(x) &= 2 \sin x \cos x \left(3(\sin^2 x - \cos^2 x) + 2k(\sin^2 x - \cos^2 x) \right) \\ &= 2(3 + 2k) \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x). \end{aligned}$$

Dakl e,

$$f'_k(x) = 0 \iff \sin x \cos x = 0 \quad \text{или} \quad \sin^2 x - \cos^2 x = 0 \quad (\text{za } k \neq -\frac{3}{2}), \text{ tj.}$$

$$\sin x \cos x = 0 \iff x = \frac{n\pi}{2}, \quad \sin^2 x = \cos^2 x \iff x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Na intervalu $(0, \pi)$ imamo sledeću tabelu:

x	$(0, \frac{\pi}{4})$	$(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$	$(\frac{3\pi}{4}, \pi)$
$\sin x$	+	+	+	+
$\cos x$	+	+	-	-
$\sin^2 x - \cos^2 x$	-	+	+	-
$\sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x)$	-	+	-	+
$f'_k(x)$	$-\operatorname{sgn}(3+2k)$	$\operatorname{sgn}(3+2k)$	$-\operatorname{sgn}(3+2k)$	$\operatorname{sgn}(3+2k)$

Iz tabele neposredno sledi:

$$k > -\frac{3}{2} \implies \begin{cases} x = \frac{n\pi}{2} & \text{локални максимум,} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} & \text{локални минимум.} \end{cases}$$

$$k < -\frac{3}{2} \implies \begin{cases} x = \frac{n\pi}{2} & \text{локални минимум,} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} & \text{локални максимум.} \end{cases}$$

Izračunajmo vrednosti u tačkama lokalnih ekstremuma:

$$f_k\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 1 + k, \quad f_k\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}.$$

Ako je $k > -\frac{3}{2}$, maksimum je u tačkama $x = \frac{n\pi}{2}$, pa mora da važi $1 + k \leq 0 \iff k \leq -1$, odakle $k \in [-\frac{3}{2}, -1]$.

Ako je $k < -\frac{3}{2}$, maksimum je u tačkama $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, pa mora da važi $\frac{1}{4} + \frac{k}{2} \leq 0 \iff k \leq -\frac{3}{2}$, što je tačno za svako $k \leq -\frac{3}{2}$.

Ako je $k = -\frac{3}{2}$, tada je $f'_k(x) = 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$, pa je funkcija konstantna na celom \mathbb{R} . Kako je

$$f_{-3/2}(0) = \sin^6 0 + \cos^6 0 - \frac{3}{2}(\sin^4 0 + \cos^4 0) = 0 + 1 - \frac{3}{2}(0 + 1) = -\frac{1}{2},$$

to je na celom \mathbb{R} negativna, pa važi uslov.

Dakle, spajanjem rezultata dobijamo $k \leq -1$.

(v) Odredimo sve k za koje je f_k konstanta na \mathbb{R} i za takvo k odredimo $f_k(2026)$. Iz prethodnog dela zadatka imamo

$$f'_k(x) = 2(3+2k)\sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

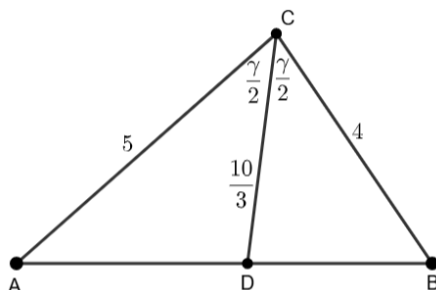
Primetimo da funkcija $\sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x)$ nije identički jednaka nuli, pa da bi $f'_k(x) \equiv 0$ moramo imati

$$3 + 2k = 0 \implies k = -\frac{3}{2}.$$

Kako je $f_{-3/2}$ konstantna na celom skupu \mathbb{R} , to u svakoj tački ima istu vrednost, pa je

$$f_{-3/2}(2026) = -\frac{1}{2}.$$

3. Označi mo sa D presečnu tačku date si metral e ugl a i strani ce AB . Pri - menom teoreme o si metral i ugl a (i li pri menom si nusne teoreme na trougl ove ADC i CDB) dobi jamo $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{5}{4}$. Tada je $|AD| = 5k$, $|DB| = 4k$, za neko $k > 0$, $k \in \mathbb{R}$.



Da e, pri menom kosi nusne teoreme na trougl ove ADC i CDB dobi jamo:

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{5^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 - 25k^2}{2 \cdot 5 \cdot \frac{10}{3}} \quad \text{ili} \quad \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{\left(\frac{10}{3}\right)^2 + 4^2 - 16k^2}{2 \cdot 4 \cdot \frac{10}{3}}.$$

I zjednačava em desni h strana ovi h jednakosti dobi jamo:

$$\frac{5^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 - 25k^2}{2 \cdot 5 \cdot \frac{10}{3}} = \frac{\left(\frac{10}{3}\right)^2 + 4^2 - 16k^2}{2 \cdot 4 \cdot \frac{10}{3}},$$

odakle, rešava em jednačine po k , dobi jamo da je $k = \frac{2}{3}$, pa je $|AB| = 9k = 6$.

Напомена. Zadatak je anal ožno mogao da se zavrxi i pri menom kosi nusne teoreme na trougl ove ADC i CDB , ali sa ugl ovi ma $\angle ADC$ i $\angle CDB$, ko ri ste i da va i $\cos \angle ADC = -\cos \angle CDB$, jer je reč o supl ementni m ugl ovi ma.

4. Odgovor je, naravno, pozi ti van. Nai me, označi mo boje brojevi ma $1, 2, \dots, 2025, 2026$. Dovo no je oboji ti tačku $(0, k\sqrt{2})$ te ravni u boju k , $1 \leq k \leq 2025$, i sve ostal e tačke ravni u boju 2026. Vrednost proizvo nog pol i - noma sa cel i m koefi cijenti ma u nul i je ceo broj (sl obodni ql an pol i - noma), odnosno ni jedna od boja $1, 2, \dots, 2025$ ne e pri pasti ni ti jednom grafi ku pol i noma sa cel obrojni m koefi cijenti ma, te e svaki takav grafi k bi ti u boji 2026.

5. Neka su $\ln 2 = x$, $\ln 3 = y$, $\ln 5 = z$, gde je $\ln x = \log_e x$, $x > 0$. Tada je

$$a = \frac{\ln 30}{\ln 6} = \frac{x + y + z}{x + y}, \quad b = \frac{\ln 24}{\ln 15} = \frac{3x + y}{y + z}.$$

Računa em i sre i va em dobi jamo:

$$\frac{2ab + 2a - 1}{ab + b + 1} = \frac{(2x + y + z)(3x + 3y + 2z)}{(2x + y)(3x + 3y + 2z)}$$
$$= \frac{2x + y + z}{2x + y} = \frac{\ln 60}{\ln 12} = \log_{12} 60 = \log_m 3600.$$

Sada tri vi jal no nal azi mo da je $m = 144$, jer je $3600 = 60^2$, pa je

$$2m + n = 3888.$$

**РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ
МАТЕМАТИКЕ – А категорија**

Први разред – А категорија

1. (a) Одговор је ∂a . Neka је $P(2022) = P(2023) = P(2025) = P(2026) = 2024$. Jedan od pol i noma za koji ovo ва i је

$$P(x) = (x - 2022)(x - 2023)(x - 2025)(x - 2026) + 2024,$$

pa је $P(2024) = 2028$.

(b) Одговор је ne . Pretpostavi mo da postoji ovakav pol i nom. Odavde sledi

$$a - e \mid P(a) - P(e) = -2,$$

$$b - e \mid P(b) - P(e) = -2,$$

$$c - e \mid P(c) - P(e) = -2,$$

$$d - e \mid P(d) - P(e) = -2.$$

Kako su a, b, c, d po parovi ma razl i qi ti cel i brojevi , to su i brojevi $a - e, b - e, c - e$ i $d - e$ po parovi ma razl i qi ti . Stoga, $\{a - e, b - e, c - e, d - e\} = \{-2, -1, 1, 2\}$. Pri meti mo da su a, b, c, d nul e pol i noma $Q(x) = P(x) - 2024$, pa је

$$Q(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) \cdot P_1(x).$$

Kako је $Q(e) = (e - a)(e - b)(e - c)(e - d) \cdot P_1(e)$, доби jamo $2 = 4 \cdot P_1(e)$, odnosno $P_1(e) = \frac{1}{2}$. Me uti m, kako pol i nom P_1 i ma cel obrojne koefi ci jente (ovo sledi , na primer iz standardnog algoritma za de e e pol i noma), to P_1 i ma cel obrojne vrednosti u svi m cel obrojni m tačkama. Kontradi kci ja!

2. **Анализа:** Neka su T_1 i T_2 te i xta trougl ova ABC i ABD , redom, a H_1 i H_2 i hovi ortocentri . Kako su tačke A, B, C, D na i stoj kru ni ci k sa centrom O , prava $H_1 - O - T_1$ је Oj l erova prava trougl a ABC , dok је prava $H_2 - O - T_2$ Oj l erova prava trougl a ABD . Prema tome, iz kol i nearnosti H_1, O, H_2 neposredno sledi i kol i nearnost tačkа T_1, O, T_2 . Dakl e, dovo no је konstrui sati tačku $D \in k$ tako da su H_1, O, H_2 kol i nearne.

Neka је M sredi xte du i AB . Posmatrajmo central nu si metri ju sa centrom u tački M . Poznato је da se ortocentar trougl a pri toj si metri ji presl i kava u tačku opi sane kru ni ce koja је di jametral no suprotna temenu naspram posmatrane strani ce. Stoga se ortocentar H_1 trougl a ABC presl i kava u tačku C' , di jametral no suprotnu tački C na kru ni ci k , a ortocentar H_2 trougl a ABD u tačku D' , di jametral no suprotnu tački D na

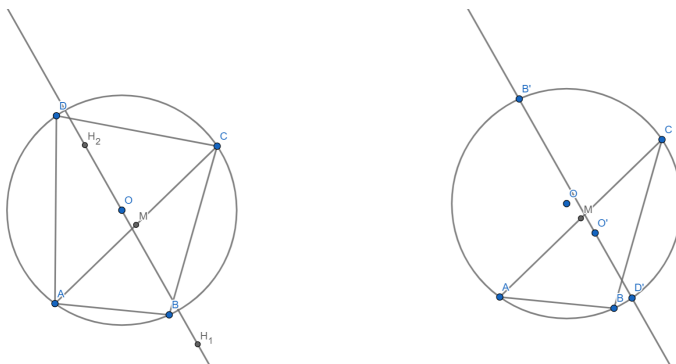
istoj kružnici. Neka je, da je, O' slika tačke O pri istoj centralnoj simetriji. Kako centralna simetrija quva koliknearnost, uslov da su tačke H_1, O i H_2 koliknearne ekvivalentan je uslovu da su i tačke C', O' i D' koliknearne.

Конструкција: Za dati trougao ABC konstrui xemo egovu opi sanu kružnici k i en centar O , kao i sredi xte M du i AB . Potom, konstrui xemo tačku C' , di jametral no suprotnu tački C na kružnici k , i tačku O' , simetri qnu tački O u odnosu na M . Zatim povuqemo pravu $C'O'$. Ako prava $C'O'$ seqe kružnicu k u jox jednoj tački, taj drugi presek oznaqi mo sa D' . Najzad, tačku D konstrui xemo kao tačku di jametral no suprotnu tački D' na kružnici k .

Доказ: Po konstrukciji, tačke C', O', D' su koliknearne. Kako centralna simetrija quva koliknearnost, iz toga sledi da su i tačke H_1, O, H_2 koliknearne. Sa druge strane, tačke H_1, O, T_1 su koliknearne kao tačke Ojlerove prave trougla ABC , a tačke H_2, O, T_2 kao tačke Ojlerove prave trougla ABD . S obzi rom da su H_1, O, H_2 koliknearne, obe Ojlerove prave poklapaju se sa istom pravom kroz tačku O . Otuda sledi da su i tačke T_1, O, T_2 koliknearne.

Дискусија: Ako je $O' = C'$, onda prava $C'O'$ ni je odre ena. Pošto su O' i C' slike tačka O i H_1 pri istoj centralnoj simetriji sa centrom M , uslov $O' = C'$ ekvivalentan je uslovu $O = H_1$. To je mogu e ako i samo ako je trougao ABC jednakostrani qan. U tom sluqaju je $T_1 = O$, pa je za svaku tačku $D \in k$ uslov zadatka automacki ispu en. Dakle, ako je ABC jednakostrani qan, svaka tačka D na kružnici k predstavlja rexe e.

Neka je sada $O' \neq C'$. Tada je prava $C'O'$ u potpunosti odre ena. Ako ona seqe kružnicu k u jox jednoj tački $D' \neq C'$, onda je na taj naqi n dobi jena tačka $D \neq C$ jedi no nedegeneri sano rexe e. Mo e se, me utim, desi ti da je prava $C'O'$ tangenta na kružnicu k u tački C' . Tada drugi presek ne postoji, pa nedegeneri sano rexe e ne postoji. Ako se dopuxta degeneri san sluqaj, tada formal no mo emo uzeti $D' = C'$, odakle sledi $D = C$; zai sta, tada se trouglovi ABC i ABD poklapaju, pa je uslov zadatka ispu en.



Prema tome:

- ako je trougao ABC jednakostraničan, svaka tačka $D \in k$ je rexe e;
- ako trougao ABC ni je jednakostraničan i prava $C'O'$ ni je tangenta na kružnicu k u tački C' , postoji jedinstveno nedegenerisano rexe e;
- ako trougao ABC ni je jednakostraničan i prava $C'O'$ jeste tangenta na kružnicu k u tački C' , onda nedegenerisano rexe e ne postoji, a jedinstveno formalno rexe e je $D = C$.

Напомена. Postoji alternativno rexe e u kojem uočavamo $\overrightarrow{H_1B} = \overrightarrow{H_2D}$. Konstrukcija, stoga, neposredno sledi.

3. Neka je $A = 11n^2 + n + 1$. Za $n = 1$ dobijamo broj $A = 13$, odnosno $S(A) = 4$. Dokažimo da je ovo najmanja vrednost broja $S(A)$. Jasno, A je neparan broj veći od 12 jer važi

$$A \equiv n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1 \equiv 1 \pmod{2},$$

pa ne može imati zbir cifara 1. S druge strane, važi i

$$A \equiv -n^2 + n + 1 = -n(n-1) + 1 \pmod{3}.$$

Ako je $n \equiv 0 \pmod{3}$ ili $n \equiv 1 \pmod{3}$, onda je $A \equiv 1 \pmod{3}$. Slično, ako je $n \equiv 2 \pmod{3}$, dobijamo $A \equiv 2 \pmod{3}$. Poznato je da važi $x \equiv S(x) \pmod{3}$ za svaki prirodan broj x . Stoga, kako A nije deljivo sa 3, nije ni $S(A)$, pa $S(A) \neq 3$.

Pokažimo i da važi $S(A) \neq 2$. Pretpostavimo suprotno tj. da postoji n takvo da je $S(A) = 2$. Kako je broj A neparan (bar dvoциfren) i ima zbir cifara 2, to su njegova prva i poslednja cifra jednake 1, a ostale su nule, pa jednačina

$$11n^2 + n + 1 = 10^m + 1$$

ima rešenja u skupu prirodnih brojeva, iz čega dobijamo

$$n(11n + 1) = 2^m \cdot 5^m.$$

Euklidovim algoritmom se lako pokazuje da važi $(n, 11n + 1) = 1$, pa kako važi $n < 11n + 1$, imamo dva slučaja:

1. $n = 1$ i $11n + 1 = 2^m \cdot 5^m$. U ovom slučaju dobijamo $12 = 2^m \cdot 5^m$, što nema rešenja za $m \in \mathbb{N}$.
2. $n = 2^m$ i $11n + 1 = 5^m$. Odavde dobijamo $11 \cdot 2^m + 1 = 5^m$. Dedešemo obe strane sa 5^m dobijamo

$$11 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^m + \left(\frac{1}{5}\right)^m = 1.$$

Jasno je da je leva strana strogo opadajuća funkcija po m (kao zbir dve opadajuće funkcije). Kako za $m = 2$ i $m = 3$ i mam

$$11 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{9}{5} > 1 \text{ и } 11 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{89}{125} < 1,$$

dobijamo da data jednačina nema rešenja u skupu prirodnih brojeva. Dobilismo kontradikciju sa pretpostavkom, pa $S(A) \neq 2$.

Dakle, najmanji zbir cifara je 4.

Prijetimo da za brojeve $n = 10^k$ ($k \geq 1$) i mam da je $11n^2 + n + 1$ oblika

$$\underbrace{11\,000\dots 000}_{k-1} \underbrace{1\,000\dots 000}_{k-1} 1,$$

pa postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n za koje je

$$S(11n^2 + n + 1) = 4.$$

Коментар 1.1. Principi pomatematike i indukcije možemo da pokažemo nejednakost $11 \cdot 2^m + 1 < 5^m$ za sve prirodne brojeve $m \geq 3$. Za $m = 3$ i mam $11 \cdot 2^3 + 1 = 89$ i $5^3 = 125$, pa nejednakost važi. Pretpostavimo da za prirodne brojeve $m \geq 3$ važi $5^m > 11 \cdot 2^m + 1$. Dokažimo da odatle sledi $5^{m+1} > 11 \cdot 2^{m+1} + 1$. Zaišta,

$$5^{m+1} = 5 \cdot 5^m > 5 \cdot (11 \cdot 2^m + 1) = 55 \cdot 2^m + 5 > 22 \cdot 2^m + 1 = 11 \cdot 2^{m+1} + 1,$$

što povlači $5^m > 11 \cdot 2^m + 1$ za $m \geq 3$.

Коментар 1.2. Lako se pokazuje da za $m \geq 3$ važi

$$5^m = 5^3 \cdot 5^{m-3} > 2^4 \cdot 7 \cdot 5^{m-3} \geq 2^4 \cdot 7 \cdot 2^{m-3} = 14 \cdot 2^m > 11 \cdot 2^m + 1.$$

4. Tvrdimo da je najveće garantovano $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Najpre uoči moxta jedan potez zapravo radi. Ako susedne brojeve $x, y \in \{0, 1\}$ zamenimo brojem $x + y \pmod{2}$, onda novi broj predstavlja zbir tog para po modulu 2. Posle višepoteza, svaki qlan dobija jenog ni za predstavlja zbir po modulu 2 nekog uzastopnog bloka poqetnog ni za. Dakle, svaki kraj i ni z odgovara nekoj podeli poqetnog ni za na uzastopne blokove, pri qemu je svaki novi qlan parnost zbira el emenata u odgovarajućem bloku.

Zato je zadatak ekvivalentan sledenom: treba podeliti poqetni ni za na uzastopne blokove tako da xto višepotez uzastopnih blokova ima istu sumu po modulu 2.

Доња граница: Neka su poqetni qlanovi ni za $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0, 1\}$. Posmatrajmo parcijalne sume po modulu 2:

$$s_0 = 0, \quad s_i \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_i \pmod{2} \quad (1 \leq i \leq n).$$

I mamo ukupno $n+1$ brojeva s_0, s_1, \dots, s_n , a svaki je ili 0 ili 1. Zato se bar jedna od ove dve vrednosti javlja najmae $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ puta.

Neka su $s_{i_0} = s_{i_1} = \dots = s_{i_t}$ sve pojave te iste vrednosti, gde je $t+1 \geq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$. Tada za svaki $j = 1, 2, \dots, t$ blok $a_{i_{j-1}+1}, a_{i_{j-1}+2}, \dots, a_{i_j}$ ima zbir po modulu 2 jednak

$$s_{i_j} - s_{i_{j-1}} \equiv 0 \pmod{2}.$$

Prema tome, moemo dobiti t uzastopnih nula. Odatle sledi

$$t \geq \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil - 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

pa je uvek mogu e dobiti bar $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ uzastopnih jednaki h brojeva. Dakle, $k \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Горња граница: Pokazamo da se uopšte ne moe garantovati više od toga. Posmatrajmo niz koji sadrži taqno jednu jedinicu, a sve ostalo su nule, i to tako da su nule raspoređene xto ravnomernije sa leve i desne strane te jedinice. Na primer, ako je $n = 2m + 1$, uzmi mo ni z

$$\underbrace{0, 0, \dots, 0}_m, 1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_m,$$

a ako je $n = 2m$, uzmi mo

$$\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m-1}, 1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_m.$$

U svakom potezu ukupna suma svih qlanova ni za po modulu 2 ostaje nepromenjena. Pošto je na početku ta suma jednaka 1, svaki dobitjenik z mora imati neparnu sumu, pa zato mora sadržati bar jednu jedinicu.

S druge strane, svaki qlan dobitjenik z predstavlja zbir po modulu 2 nekog uzastopnog bloka poqetnog niza. Pošto poqetnik z sadrži taqno jednu jedinicu, neki blok daje vrednost 1 ako i samo ako sadrži tu jedinicu. Zato u svakoj podel i poqetnog niza taqno jedan blok ima vrednost 1, a svi ostali imaju vrednost 0.

Prema tome, u svakom dobitjeniku z postoji taqno jedna jedinica, koja razdvaja nule na levi i desni deo. Broj uzastopnih nula sa bilo koje strane ne moe biti ve i od $\lfloor n/2 \rfloor$. Zato ni broj uzastopnih jednaki h qlanova ne moe biti ve i od $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Dakle, $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

I z do e i gore grani ce zak uqujemo $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Други разред – А категорија

1. Posmatrajmo funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definisane sa $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = bx^2 + cx + a$ i $h(x) = f(x)g(x)$, za svako $x \in \mathbb{R}$. Treba

dokazati da postoji realan broj d za koji važi $h(d) > 0$. Pri meti mo da je $h(1) = f(1)g(1) = (a + b + c)^2 \geq 0$. (♡) Razmotri mo slede e sl uqajeve:

1° $a + b + c \neq 0$. Zbog (♡) mo emo odabrati $d = 1$, pošto je $h(1) > 0$.

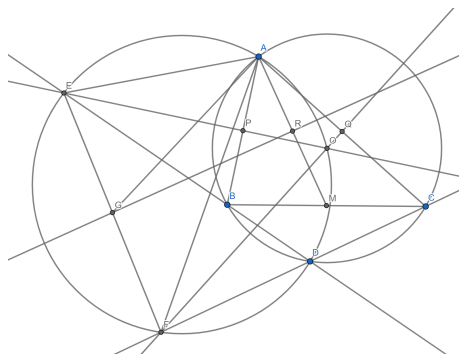
2° $a + b + c = 0$. Sada je $f(x) = ax^2 + bx - a - b = a(x-1)(x+1) + b(x-1) = (x-1)(ax + a + b)$ i anal ogno $g(x) = (x-1)(bx + b + c)$, te je $h(x) = (x-1)^2(ax - c)(bx - a)$. Brojevi a i b ne mogu bi ti i stovremeno jednaki nuli , pošto bi tada zbog $a + b + c = 0$ va i lo $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, što je suprotno uslovu zadatka. Otuda mo emo razmotri ti slede e sl uqajeve:

2.1° $a = 0, b \neq 0$. Tada je $h(x) = b^2(x-1)^2x$, te je $h(2) > 0$.

2.2° $b = 0, a \neq 0$. Tada je $h(x) = -a^2(x-1)^2(x+1)$, te je $h(-2) > 0$.

2.3° $ab \neq 0$. Pri meti mo da je $\frac{c}{a} \neq \frac{c}{b}$. Pretpostavi mo suprotno. Tada bi i mal i $-\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$, što je kontradi kcija. Sada i mammo da kvadratna funkcija $i(x) = (ax - c)(bx - a)$ i ma dve razli qi te real ne nule, te ni je konstantnog znaka na $(-\infty, \infty)$. Otuda postoji i interval I na kom je ona poziti vna. Kako je $h(x) = (x-1)^2 \cdot i(x)$, to zbog prethodnog i mammo da za svaki broj $d \in I \setminus \{1\}$ va i $h(d) > 0$. Ovi m je dokaz kompleti ran.

2. Kako je O sredi xte kra eg luka AD kruga AOD , prava EO je si metral a ugla $\angle AED$, pa je samim tim i si metral a strani ce AB trougla $\triangle ABC$. Anal ogno je i tačka F na si metral i du i AC . Neka su sada P, Q i R redom sredi xta du i AB, AC i AM . Trouglovi $\triangle AEP$ i $\triangle AFQ$ su sl i qni ($\angle AEP = \angle AFQ$ zbog tetivnosti četvorougla $AEFO$, i po prethodno dokazanom i maju po jedan prav ugao). Oдавde je $\frac{AE}{AF} = \frac{AP}{AQ} = \frac{AB}{AC}$, i $\angle EAF = \angle BAC$, pa su trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle AEF$ sl i qni. Odatle, i maju i u vidu da su AM i AG te i xne du i, sledi da su i trouglovi $\triangle ABM$ i $\triangle AEG$ sl i qni, te je i $\frac{AG}{AM} = \frac{AE}{AB}$, odnosno $\frac{AG}{AR} = \frac{AE}{AP}$, pa kako je i $\angle EAP = \angle GAR$, trouglovi $\triangle AEP$ i $\triangle AGR$ su sl i qni, odnosno $\angle ARG = 90^\circ$, odakle je trougao $\triangle AGM$ jednakokrak, qi me je tvr e e zadatka dokazano.



3. Neka su a, b, c i n prirodni brojevi za koje važi $(a, b, c) = 1$, a $p > 3$ proizvo an prost broj, pri qemu je $(u, v, w) = \text{H3D}(u, v, w)$, $u, v, w \in \mathbb{N}$. Oznaqi mo sa $S_k = a^k + b^k + c^k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Pretpostavi mo da $p \mid S_{n+2}, S_{n+1}$ i S_n . Zbog

$p \mid S_n$ i $(a, b, c) = 1$ broj p deli najviše jedan od brojeva a, b i c . Razmotri mo najpre slučaj $p \nmid abc$. Važi

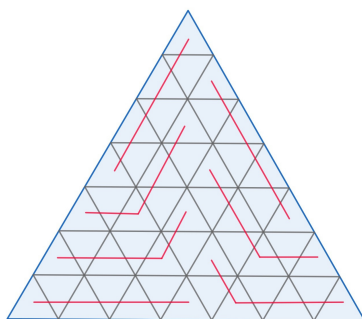
$$S_{k+3} - (a + b + c)S_{k+2} + (ab + bc + ca)S_{k+1} = abcS_k, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (\dagger)$$

Kako $p \mid S_{n+2}, S_{n+1}, S_n$, zamenom $k = n - 1$, i majku i na umu da $p \nmid abc$, u (\dagger) dobi jamao $p \mid S_{n-1}$. Da li omo zamenom za $k = n - 2, n - 3, \dots, 0$, dobi jamao $p \mid S_0 = 3$. Kontradi kcija. Neka sada $p \mid abc$. Odre enosti radi , neka $p \mid c$ i $p \nmid ab$. Tada je $a^{n+1} \equiv_p -b^{n+1} \equiv_p b(-b^n) \equiv_p ba^n$, pa je $a \equiv_p b$. Zato $p \mid 2a^n$, odnosno $p \mid a$. Kontradi kcija. Na ovaj naqin smo dokazali da ne postoji $p > 3$ tako da $p \mid S_{n+2}, S_{n+1}$ i S_n , za neke $(a, b, c) = 1$.

Sl i qno kao u prethodnom del u dokazuje se da nije mogu e da $9 \mid a^n + b^n + c^n, a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1}, a^{n+2} + b^{n+2} + c^{n+2}$. Tako e, nije mogu e da $4 \mid a^n + b^n + c^n, a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1}, a^{n+2} + b^{n+2} + c^{n+2}$. Zai sta, ako bi va ilo $4 \mid a^n + b^n + c^n$, onda bi taqno jednak od brojeva a, b, c bio paran. Me uti m, tada za paran broj $m \in \{n+1, n+2\}$ va i $a^m + b^m + c^m \equiv_4 0 + 1 + 1 \equiv_4 2$, xto je u suprotnosti sa $4 \mid S_m$.

I z svega navedenog zak uqujemo da je $(a^n + b^n + c^n, a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1}, a^{n+2} + b^{n+2} + c^{n+2}) \leq 6$, te je najve i element skupa S ne ve i od 6. Kako je za $a = b = n = 1, c = 4$ posmatrani najve i zajedni qki del ilac jednak 6, to je najve i element skupa S upravo jednak 6.

4. Tra ena podela je mogu a ako i samo ako je n neparan. Neka je $n = 2m + 1$. Konstrukcija se zadaje ovako. Sa leve strani ce vel i kog trougl a povl aqi mo $m + 1$ puteva. Prvi poqi e u do em l evom ugl u i i de vodoravno udesno kroz n trougl ova.



Drugi poqi e u slede em redu i znadi i de vodoravno udesno kroz $n - 2$ trougl ova, pa se zatim lomi i nastavl a koso nagore udesno kroz 2 trougl a. Tre i poqi e jox jedan red vi xe, i de vodoravno udesno kroz $n - 4$ trougl ova, pa zatim koso nagore udesno kroz 4 trougl a. Tako redom, k -ti l evi put, raqunaju i odozdo, poqi e na levoj strani ci u $(k + 1)$ -vom redu, i de najpre vodoravno udesno kroz $n - 2k$ trougl ova, a zatim koso nagore

udesno kroz $2k$ trouglova, gde je $k = 0, 1, \dots, m$. Zato svaki Levi put ima ukupno $(n - 2k) + 2k = n$ trouglova. Sa desne strane povlači se m puteva. Prvi desni put počinje u najvišem preostalom trouglu uz desnu stranu i ide koso nadole udesno kroz n trouglova. Drugi počinje u sledećem najvišem preostalom trouglu, ide koso nadole udesno kroz $n - 2$ trouglova, pa se zatim lomi i nastavlja vodoravno udesno kroz 2 trougla. Treći počinje u sledećem najvišem preostalom trouglu, ide koso nadole udesno kroz $n - 4$ trouglova, pa zatim vodoravno udesno kroz 4 trougla. Tako redom, j -ti desni put, računajući od odozgo, počinje u najvišem jox nepokrivenom trouglu desnog dela, ide najpre koso nadole udesno kroz $n - 2j + 2$ trouglova, a zatim vodoravno udesno kroz $2j - 2$ trougla, gde je $j = 1, 2, \dots, m$. Zato i svaki desni put ima ukupno $(n - 2j + 2) + (2j - 2) = n$ trouglova. Levi putevi se međusobno ne seku, jer su vodoravni delovi leže u različitim redovima, a posle preloma svaki ide drugom kosom dijagonalom. Isto tako se ni desni putevi međusobno ne seku. Najzad, Levi i desni putevi se ne mogu seći jer posle svih Levih puteva ostaje nepokriven samo jedan „desni“ stepenasti deo trougla, a desni putevi se upravo u njemu povlače, redom odozgo nadole. Drugim rečima, Levi putevi ispunjavaju ceo Levi deo figure do jedne cik-cak granice, a svaki desni put leži u potpunosti sa desne strane te granice; zato Levi i desni putevi nemaju zajedničkih trouglova. Tako dobijamo $(m + 1) + m = 2m + 1 = n$ međusobno disjunktne puteve, svaki od po n trouglova, koji zajedno pokrivaju ceo trougao. Ako je, međutim, n paran, onda bi svaki put imao parnu dužinu, pa bi u njemu bio jednak broj trouglova orijentisanih nagore i nadole, što je nemoguće jer je u celom trouglu broj takvih trouglova $\frac{n(n+1)}{2}$, odnosno $\frac{n(n-1)}{2}$. Dakle, tražena podela postoji ako i samo ako je n neparan.

Трећи разред – А категорија

1. (PRVO REŠENJE) (a) Posmatrajmo polinom $P(x) = x^{2020} + x^3 + 1$. Pretpostavimo da je broj $x = z$, gde je $|z| = 1$, jedna nula polinoma $P(x)$. Kako je polinom $P \in \mathbb{R}[x]$ to je i broj $\bar{z} = \frac{1}{z}$ njegova nula. Otuda, zamenom $P(\frac{1}{z}) = 0$ dobijamo da je $1 + z^{2017} + z^{2020} = 0$, te je $z^3 = z^{2017}$. Iz poslednje jednakosti, kako je $z \neq 0$, imamo da je $z^{2014} = 1$. Zato je sada $0 = P(z) = z^6 + z^3 + 1$, te je $z^9 - 1 = (z^3 - 1) \cdot P(z) = 0$. Dakle, za broj z važi $z^{2014} = z^9 = 1$. Zato je $z^7 = \frac{z^{2014}}{(z^9)^{223}} = 1$, odakle je i $z^2 = \frac{z^9}{z^7} = 1$ i $z = \frac{z^7}{(z^2)^3} = 1$. Zato je $0 = P(1) = 3$, što je kontradikcija.

(DRUGO REŠENJE) (a) Pretpostavimo suprotno-neka važi $z^{2020} + z^3 + 1 = 0$ za neko z za koje je $|z| = 1$. Tada iz jednakosti modula leve i desne strane u jednakosti (koje su ekvivalentne sa $z^{2020} + z^3 + 1 = 0$) $z^3(z^{2017} + 1) = -1$ i $z^{2020} + 1 = -z^3$ imamo da je $|z^{2017} + 1| = 1$ i $|z^{2020} + 1| = 1$. Iz poslednjih jednakosti zaključujemo da se brojevi z^{2020} i z^{2017} nalaze na rastojanju 1 od broja -1 , odnosno nalaze se na kružnici čiji je centar u broju -1 , a

pol upretni k 1. Kako je $|z| = 1$, to je i $|z^{2020}| = |z^{2017}| = 1$, te se brojevi z^{2020} i z^{2017} nalaze i na kružnici čiji je centar broj 0, a pol upretni k 1. Presek pomenutih kružnica su brojevi $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ i $\varepsilon^2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$, te je $z^{2020}, z^{2017} \in \{\varepsilon, \varepsilon^2\}$. Otuda, kako je $\varepsilon^3 = 1$, i mammo $z^3 = \frac{z^{2020}}{z^{2017}} \in \{1, \varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$. Za $z^3 = 1$ i mammo $z^{2020} = -z^3 - 1 = -2$, te je $|z^{2020}| = 2$, što je u suprotnosti sa $|z^{2020}| = 1$. Ako je pak $z^3 \in \{\varepsilon, \varepsilon^2\}$, onda iz jednakosti $z^{2020} + z^3 + 1 = 0 = \varepsilon^2 + \varepsilon + 1$, dobijamo da je $z^{2020} = \varepsilon^2$ (kada je $z^3 = \varepsilon$) ili $z^{2020} = \varepsilon$ (kada je $z^3 = \varepsilon^2$.) Ovakve, kako je $(z^{2020})^3 = (z^3)^{2020}$ dobijamo da je $(\varepsilon^2)^3 = \varepsilon^{2020}$ ili $\varepsilon^3 = (\varepsilon^2)^{2020}$. I mammo i na umu da je $\varepsilon^3 = 1$, poslednje jednakosti nas dovode do zaključka da je $1 = \varepsilon$ ili $1 = \varepsilon^2$. Kontradikcija.

(b) Pod uslovom $|z| = 1$, odnosno $\bar{z} = \frac{1}{z}$, data jednakost je ekvivalentna sa

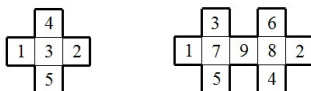
$$\begin{aligned} |z^{2020} + z^n + 1| &= |z^{2020} + z^3 + 1| \Leftrightarrow (z^{2020} + z^n + 1)\left(\frac{1}{z^{2020}} + \frac{1}{z^n} + 1\right) \\ &= (z^{2020} + z^3 + 1)\left(\frac{1}{z^{2020}} + \frac{1}{z^3} + 1\right) \\ &\Leftrightarrow z^{2020-n} + z^{n-2020} + z^n + z^{-n} = z^{2017} + z^{-2017} + z^3 + z^{-3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z^{4040} + z^{2n} + z^{2020+2n} + z^{2020} - z^{4037+n} - z^{3+n} - z^{2023+n} - z^{2017+n} = 0. \quad (1) \end{aligned}$$

Dakle, broj $n \in \mathbb{N}$ je rešenje akko je jednakost (1) ispunjena za sve brojeve z za koje je $|z| = 1$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ neko rešenje. Posmatrajmo polinom $P(x) = x^{4040} + x^{2n} + x^{2020+2n} + x^{2020} - x^{4037+n} - x^{3+n} - x^{2023+n} - x^{2017+n}$. Nule ovog polinoma su svi brojevi $x = z$, gde je $|z| = 1$, te posmatrani polinom ima beskonačno mnogo nula. Zato je $P(x)$ jednak nula polinomu, te su svi njegovi koeficijenti jednaki nuli. Zato mora da važi $4040 = 4037 + n$ ili $2020 + 2n = 4037 + n$, odnosno $n = 3$ ili $n = 2017$. Lako proveravamo da za $n = 3$, odnosno $n = 2017$, važi jednakost (1), te su ovi brojevi zaista rešenja zadatka.

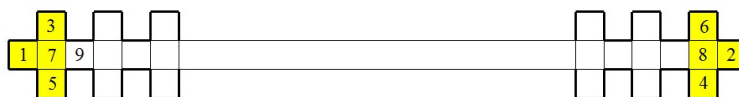
2. Postoji. Neka u "sredem" redu ima $2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, jedinica po a. Dokazemo matematičkom indukcijom (po n), sa korakom 2, da postoje elementi potezi, pri čemu je prvi potez sa pola koje je prvo (sa leve strane) u "sredem" redu.

Baza indukcije: Na slici kama su dati primeri elementarnih poteza za $n = 1$ i $n = 2$.



Induktivna hipoteza: Neka navedeno tvrđenje važi za n .

Induktivni korak: Posmatrajmo tablu u čijem je "sredem" redu $2(n+2)+1$ jedinica po a. Prvih 8 poteza izvodi se kao na sledejoj slici.



Među navedenih 8 poteza oti gl jedno nema podudarnih, pri čemu na bel o j tabl i , koja u "sred em" redu i ma $2n + 1$ jedi ni qno po e, ni je mogu e odi - grati potez koji bi bio podudaran nekom od 8 navedeni h poteza. Po e označeno brojem 9 je zapravo prvo po e bel e tabl e koja u "sred em" redu i ma $2n + 1$ jedi ni qni h po a. Po i ndukti vnoj hi potezi , za tu bel u tabl u, mogu e je i zvesti e eni ni z poteza. Ovi m je kompl eti ran dokaz.

3. Pretpostavi mo suprotno, tj. da takvi h brojeva i ma samo konačno mnogo. Neka je i hov ukupan broj jednak k . Potrebna nam je sl ede a do a ocena za Oj l erovu funkciju:

$$\varphi(t) \geq \sqrt{\frac{t}{2}}, \text{ za svako } t \in \mathbb{N}.$$

Stoga, zapi xi mo $t = 2^\alpha q$, gde je $\alpha \geq 0$, a q neparan broj. Ako je $q = 1$, onda je

$$\varphi(t) = \varphi(2^\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha = 0, \\ 2^{\alpha-1}, & \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Za $\alpha = 0$ dobi jamo $\varphi(t) = 1 \geq \sqrt{1/2}$, a za $\alpha \geq 1$ va i

$$2^{\alpha-1} \geq 2^{\alpha/2-1/2} = \sqrt{\frac{2^\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{t}{2}}.$$

Dakl e, i u ovom sl uqaju va i $\varphi(t) \geq \sqrt{t/2}$.

Neka je sada $q > 1$. Ako je $q = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_s^{\beta_s}$ kanonska faktori zaci ja broja q , onda je

$$\varphi(q) = \prod_{i=1}^s p_i^{\beta_i-1} (p_i - 1).$$

Za svaki neparan prost broj p i svako $\beta \geq 1$ va i $p^{\beta-1}(p-1) \geq p^{\beta/2}$. Zai sta, za $\beta = 1$ to je ekvi val entno nejednakosti $p-1 \geq \sqrt{p}$, xto va i za svaki $p \geq 3$, a za $\beta \geq 2$ i mam

$$p^{\beta-1}(p-1) \geq p^{\beta-1} \geq p^{\beta/2}.$$

Mno e em ovi h nejednakosti po svi m prosti m del i oci ma broja q dobi jamo $\varphi(q) \geq \sqrt{q}$.

Sada, ako je $\alpha = 0$, onda je $t = q$ neparan, pa

$$\varphi(t) = \varphi(q) \geq \sqrt{q} = \sqrt{t} \geq \sqrt{\frac{t}{2}}.$$

Ako je $\alpha \geq 1$, onda je

$$\varphi(t) = \varphi(2^\alpha)\varphi(q) = 2^{\alpha-1}\varphi(q) \geq 2^{\alpha-1}\sqrt{q}.$$

Pošto je $2^{\alpha-1} \geq 2^{\alpha/2-1/2}$, sledi

$$\varphi(t) \geq 2^{\alpha/2-1/2}\sqrt{q} = \sqrt{\frac{2^\alpha q}{2}} = \sqrt{\frac{t}{2}}.$$

Ti me je tražena dođna ocena dokazana.

I zaberimo sada prirodan broj N tako da važi $\sqrt{\frac{N}{2}} > k$. Na primer, možemo uzeti $N = 2k^2 + 1$. Tada za svako $d \geq N$, po dokazanoj oceni, važi

$$\varphi(d) \geq \sqrt{\frac{d}{2}} \geq \sqrt{\frac{N}{2}} > k,$$

pa je

$$d + \varphi(d) > d + k \geq N + k.$$

Prema tome, ako je neki broj $m \leq N + k$ predstaviv u obliku $m = c + \varphi(c)$, onda mora biti $c < N$, jer za $c \geq N$ dobijamo $c + \varphi(c) > N + k$.

Dakle, brojevi ne veći od $N + k$ koji su predstavivi u obliku $c + \varphi(c)$ mogu nastati samo za

$$c = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Pošto takvih vrednosti c ima najviše $N - 1$, sledi da među prvih $N + k$ prirodnih brojeva ima najviše $N - 1$ predstavivih brojeva.

S druge strane, među brojevima

$$1, 2, \dots, N + k$$

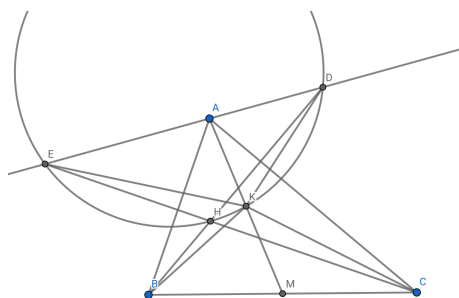
ima ukupno $N + k$ brojeva. Zato najmađe

$$(N + k) - (N - 1) = k + 1$$

ih ni je predstavivo u obliku $n + \varphi(n)$. Međutim, to je nemoguće, jer smo pretpostavili da ukupno postoji samo k takvih brojeva.

Konačno, sledi da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva m koji se ne mogu predstaviti u obliku $m = n + \varphi(n)$ ni za jedan prirodan broj n .

4. Prvo, trouglovi EAC i DAB su slični. Zastaje, $\angle ECA = \angle ABD = 90^\circ - \alpha$ i $\angle EAC = \angle BAD = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Zaključujemo da je $\frac{EC}{BD} = \frac{AC}{AB}$. Kako je K zapravo A -*Humpty* tačka, poznato je da je $\angle MBK = \angle BAM$. Kako je i $\angle CHK = 180^\circ - \angle KHC' = \angle BAM$ (C' je podnožje visine iz C na AB), to je četvorougao $BHKC$ tetivan (i ovo je generalno poznato). Pošto su trouglovi BMK i AMB slični, to je $\frac{BM}{AM} = \frac{BK}{AB}$. Analogno je $\frac{CM}{AM} = \frac{CK}{AC}$. Pošto je $BM = CM$, to je $\frac{BK}{CK} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE}$. Kako je zbog tetivnosti četvorougla $BHKC$ i $\angle KBD = \angle KCE$, trouglovi BKD i CKE su slični. Zato je $\angle HDK = \angle HEK$, čime je dokaz završen.



Четврти разред – А категорија

1. Neka su a i b neke vrednosti parametara za koje va i navedena nejednakost. Posmatrajmo funkciju $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za koju je $f(x) = 4^x + a^x + b^x - 6^x - 3^x - 2^x$, za svako $x \in \mathbb{R}$. Funkcija $f(x)$ je neprekidno diferencijabilna na \mathbb{R} . Doka i mo da je $f'(0) = 0$. Pretpostavimo suprotno. Kako postoji $f'(0)$, neka je $f'(0) = \alpha \neq 0$. Ako je $\alpha > 0$, to postoji neka okolina broja 0, takva da je funkcija $f(x)$ strogo monotono rastu a u toj okolini. Me utim, tada za svako x iz te okoline za koje va i $x < 0$, imamo $f(x) < f(0) = 0$, xto je u suprotnosti sa osobinom brojeva a i b (brojevi a i b su takvi da za svako $x \in \mathbb{R}$ va i $f(x) \geq 0$). Ako je pak $\alpha < 0$, to postoji neka okolina broja 0, takva da je funkcija $f(x)$ strogo monotono opadaju a u toj okolini. Me utim, tada za svako x iz te okoline za koje va i $x > 0$, imamo $f(x) < f(0) = 0$, xto je u opet u suprotnosti sa osobinom brojeva a i b . Dakle, ako tra ena vrednost parametara a i b postoji, onda mora biti $f'(0) = 0$. Kako je $f'(0) = \ln 4 + \ln a + \ln b - \ln 6 - \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{ab}{9}$, to jednakost $ab = 9$ daje jedine potencijalne vrednosti tra enih parametara.

Bez uma e a opxtosti mo emo pretpostaviti da je $a \geq b$. Doka i mo da mora biti $a \geq 6$. Pretpostavimo suprotno, $a < 6$. De e em polazne nejednakosti sa 6^x dobi jamo da za svako $x \in \mathbb{R}$ va i

$$L(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{a}{6}\right)^x + \left(\frac{b}{6}\right)^x \geq 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x = D(x). \quad (1)$$

Kako je $\lim_{x \rightarrow \infty} L(x) = 0$, a $\lim_{x \rightarrow \infty} D(x) = 1$, to za dovo no veliko x nejednakost (1) ne va i. Kontradikcija. Ovim smo dokazali (pod pretpostavkom da je $a \geq 6$) da ukoliko tra eni parametri postoje, mora va iti $a \geq 6$ i $b = \frac{9}{a}$. Doka i mo sada da parametri odre eni ovim uslovima zaista zadovo avaju polaznu nejednakost. Fiksi rajmo realan broj x , $x \neq 0$ (za $x = 0$ navedeni parametri zadovo avaju polaznu nejednakost). Neka je $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija zadata sa $g(a) = 4^x + a^x + \left(\frac{9}{a}\right)^x - 6^x - 3^x - 2^x$. Doka i mo

da je $g(a) \geq 0$ za svako $a \geq 6$. Funkcija $g(a)$ je neprekidno diferencijabilna na \mathbb{R}^+ . Lako nalazimo da je $g'(a) = \frac{x(a^x+3^x)(a^x-3^x)}{a^{x+1}}$. Za $x > 0$ izraz $a^x - 3^x$ je pozitivan samo za $a > 3$, dok je za $x < 0$ izraz $a^x - 3^x$ je negativan samo za $a > 3$. Dakle, $g'(a) > 0 \iff a > 3$. Ovim je dokazano da je funkcija $g(a)$ strogo monotona rastuća na intervalu $(3, \infty)$. Kako je još $g(6) = 4^6 + (\frac{3}{2})^6 - 3^6 - 2^6 = (2^6 - (\frac{3}{2})^6)(2^6 - 1) > 0$ (za $x > 0$ važi $2^x - (\frac{3}{2})^x, 2^x - 1 > 0$, dok za $x < 0$ važi $2^x - (\frac{3}{2})^x, 2^x - 1 < 0$), to za svako $a \geq 6$, na osnovu monotoničnosti, važi $g(a) > 0$, a time i polazna nejednakost.

Sve tražene vrednosti su iz skupa $\{(a, b) \mid ab = 9, a \geq 6 \vee b \geq 6\}$.

2. Primetimo da je

$$\begin{aligned} A &= 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdots 2024! = (1! \cdot 2!) \cdot (3! \cdot 4!) \cdots (2023! \cdot 2024!) \\ &= (1! \cdot 1! \cdot 2) \cdot (3! \cdot 3! \cdot 4) \cdots (2023! \cdot 2023! \cdot 2024) \\ &= (1!)^2 \cdot (3!)^2 \cdot (5!)^2 \cdots (2023!)^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2024 \\ &= (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdots 2023!)^2 \cdot 2^{1012} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 1012 = (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdots 2023! \cdot 2^{506})^2 \cdot 1012!, \end{aligned}$$

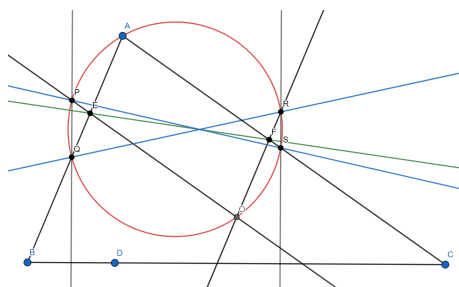
odakle nalazimo jedno rešenje $(n, x) = (1012, 1! \cdot 3! \cdot 5! \cdots 2023! \cdot 2^{506})$. Dokazimo da drugih rešenja nema.

Pretpostavimo suprotno, da je neko $n \neq 1012$ rešenje ove jednačine. Tada, broj $\frac{A}{n!}$ treba da bude kvadrat prirodnog broja.

Ako je $n \leq 1008$, tada je $\frac{A}{n!} = (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdots 2023! \cdot 2^{506})^2 \cdot 1012 \cdot 1011 \cdot 1010 \cdot 1009 \cdots (n+1)$. Lako se proverava da je broj 1009 prost, a njegov eksponent je neparan, te ovaj broj nije potpun kvadrat. Za $n = 1009$, imamo $\frac{A}{n!} = (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdots 2023! \cdot 2^{506})^2 \cdot 1012 \cdot 1011 \cdot 1010$, a za $n = 1010$ je $\frac{A}{n!} = (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdots 2023! \cdot 2^{506})^2 \cdot 1012 \cdot 1011$, pa ovi brojevi nisu potpuni kvadrati jer je stepen broja 3 neparan. Takođe, $n = 1011$ nije rešenje pošto 1012 nije potpun kvadrat.

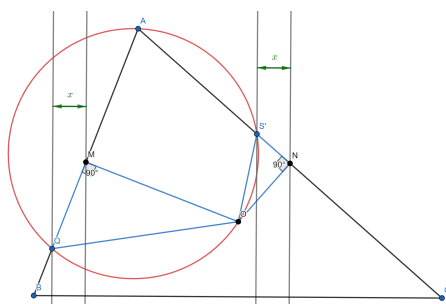
Konačno, ako je $n \geq 1013$, tada je $\frac{A}{n!} = \frac{(1! \cdot 3! \cdot 5! \cdots 2023! \cdot 2^{506})^2}{1013 \cdot 1014 \cdots n}$. Broj 1013 je prost, njegov eksponent u $\frac{A}{n!}$ je neparan za $n < 2026$, pa ne može biti potpun kvadrat. S druge strane, $\frac{A}{n!}$ ni je ceo broj za $n \geq 2027$, pošto je 2027 prost broj koji ne deli A . Broj $n = 2026$ nije rešenje npr. jer je 1019 prost broj koji ima neparan eksponent u $\frac{A}{n!}$.

3. Dokazaćemo da je xestougao $APQOSR$ tetivan, pa po Paskalovoj teoremi primenimo na ovaj xestougao direktno sledi tvrđenje zadatka.



Da bi smo dokazali da je pomenuti xestougao teti van dokazamo da su tetivni četvorouglovi $APQO$, $ARSO$ i $AQOS$. Znamo da je $\angle QPO = 90^\circ - \angle ACB$, jer je jednak uglu između visine iz A trougla $\triangle ABC$ i prave AC kao ugao sa paralelnim krakovima. Kako je tako i $\angle BAO = 90^\circ - \angle ACB$, zaključujemo da je četvorougao $APQO$ teti van. Analogno je i četvorougao $ARSO$ teti van, pa ostaje pokazati da je četvorougao $AQOS$ teti van. Obelježimo sa M i N redom središta AB i AC , i obelježimo drugi presek kruga AOQ sa AC sa S' . Trouglovi $\triangle OMQ$ i $\triangle OS'N$ su slični (pravougloni su i pri tom je $\angle OQM = \angle OS'N$), pa je odatle $\frac{QM}{S'N} = \frac{OM}{ON} = \frac{\cos \gamma}{\cos \beta}$, gde je $\angle ABC = \beta$ i $\angle ACB = \gamma$. Odatle zaključujemo da su projekcije dužina QM i $S'N$ na BC jednake dužine, odakle je dužina projekcije dužine QS' na BC jednaka $\frac{BC}{2}$, pa zaključujemo da je $S' \equiv S$.

Dakle, četvorougao $AQOS$ je teti van, odakle po prethodnoj diskusiji sledi tvrdnja zadatka.



4. Najveće takvo k je $(m-1)(n-1)$. Na slici je dat primer sa $(m-1)(n-1)$ loxih pravougaonika (svi koji sadrže dole desno po tabeli). Ostaje da dokažemo da mora da postoji bar $(m-1)(n-1)$ loxih pravougaonika. Uoqimo neki loxi pravougaonik koji postoji prema uslovu zadatka. Obelježimo brojeve u otkovima ovog pravougaonika kao na slici. Tada je $a+d \neq b+c$, odnosno $a-c \neq b-d$. Uoqimo sada još dva po a , nazovimo ih e i f , na sledeći način. e i f su u istoj koloni, $e \neq a, e \neq b, f \neq c, f \neq d$, e je u istom redu kao a i b , f je u istom redu kao c i d . Kako ne može istovremeno da važi $e-f = a-c$ i $e-f = b-d$, barem jedan od pravougaonika ea i $ebfd$ je loxi. Kako ovakve parove po a i f možemo izabrati na $n-2$

naqi na dobi li smo jox $n - 2$ l oxi h pravougaoni ka, koji su svi oqi gl edno razli qi ti . I za beri mo bi lo koji od $n - 1$ l oxi h pravougaoni ka koji su nam do sada poznati . Ako anal ogan postupak ponovi mo krenuvxi od i zabranog pravougaoni ka samo u verti kal nom smeru dobi jamo jox $m - 2$ razli qi ti h l oxi h pravougaoni ka. Jasno je da ni dva pravougaoni ka dobi jena od razli - qi tog i ni ci jal nog l oxi g prvougaoni ka ne mogu bi ti i sta. Dakl e, pronaxli smo $(m - 1)(n - 1)$ l oxi h pravougaoni ka, qi me je dokaz zavr xen.

1	$m + 1$			$(n - 2)m + 1$	$(n - 1)m + 2$	
2	$m + 2$	•	•	•	$(n - 2)m + 2$	$(n - 1)m + 3$
		•				
		•		•		
		•			•	
$m - 1$	$2m - 1$				$(n - 1)m - 1$	mn
		•	•	•		
m	$2m$				$(n - 1)m$	$(n - 1)m + 1$

e	a	•	•	•	b
•	•	•			•
•	•		•		•
•	•			•	•
f	c	•	•	•	d

**РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ
МАТЕМАТИКЕ – Б категорија**

Први разред – Б категорија

1. Neka je broj centralnih tačaka jednak n . Tada je ukupan broj svih tačaka jednak $n + 2$, jer pored tih n tačaka postoje još dve došne tačke.

Broj svih trojki tačaka jednak je $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, od čega treba oduzeti nedozvoljene trojke tačaka. Kako svih n centralnih tačaka pripadaju jednoj pravoj, broj trojki sastavljenih samo od tih tačaka jednak je $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. Pored toga, došne tri tačke su kolinearne, te daju još jednu nedozvoljenu trojku. Prema tome, broj svih trouglova jednak je

$$\frac{(n+2)(n+1)n}{6} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - 1.$$

Po uslovu zadatka, to je jednako 2024, pa važi

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - 1 = 2024.$$

Srećno ćemo dobiti

$$\frac{n((n+2)(n+1) - (n-1)(n-2))}{6} - 1 = 2024.$$

Da li je $(n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2$, dok je $(n-1)(n-2) = n^2 - 3n + 2$, pa je razlika ovih izraza jednaka $6n$. Stoga, važi $\frac{n \cdot 6n}{6} - 1 = 2024$, odnosno $n^2 - 1 = 2024$, odakle je $n^2 = 2025$, te je $n = 45$. Dakle, ukupan broj tačaka je 47.

2. (PRVO REŠENJE) Traženi zbir možemo grupisati na sledeći način:

$$A = (-S(0) + S(1)) + (-S(2) + S(3)) + \dots + (-S(2024) + S(2025)) - S(2026).$$

Izračunajmo $S(2k+1) - S(2k)$. Broj $2k$ je uvek paran, što znači da mu je poslednja cifra $c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Pri prelasku sa $2k$ na $2k+1$, poslednja cifra postaje $c+1$, a ostale cifre ostaju nepromenjene (nema prenosa). Zato je $S(2k+1) - S(2k) = 1$. Takvih parova je 1013, a pošto je $S(2026) = 10$, odgovor je $A = 1013 - 10 = 1003$.

(DRUGO REŠENJE) Grupisati možemo i parovima: $A = \sum_{k=1}^{1013} (S(2k-1) - S(2k))$. Ako se pri prelasku sa $2k-1$ na $2k$ ne javlja prenos, tada se zbir cifara povećava za 1, pa je $S(2k) = S(2k-1) + 1$, odnosno $S(2k-1) - S(2k) = -1$.

Ako broj $2k - 1$ na kraju ima tačno t devetki, onda pri dodavanju u jedinicu te t devetki prelazi u nule, pa se zbir cifara smanjuje za $9t$, a zatim se prethodna cifra povećava za 1. Zato važi $S(2k) = S(2k-1) + 1 - 9t$, pa je $S(2k-1) - S(2k) = 9t - 1$. Stoga, svaki par daje osnovni doprinos -1 , a za svaku završnu devetku dobijamo još 9. Kako ima ukupno 1013 parova, dobijamo $A = -1013 + 9(N_1 + N_2 + N_3)$, gde je N_1 broj neparnih brojeva do 2025 koji se završavaju cifrom 9, N_2 broj neparnih brojeva do 2025 koji se završavaju sa 99, a N_3 broj neparnih brojeva do 2025 koji se završavaju sa 999.

Sada broji mo: $N_1 = \#\{9, 19, 29, \dots, 2019\} = 202$, jer je $\frac{2019 - 9}{10} + 1 = 202$.

Da je, $N_2 = \#\{99, 199, 299, \dots, 1999\} = 20$, jer je $\frac{1999 - 99}{100} + 1 = 20$. Najzad, $N_3 = \#\{999, 1999\} = 2$.

Prema tome, $A = -1013 + 9(202 + 20 + 2) = -1013 + 9 \cdot 224 = -1013 + 2016 = 1003$. Dakle, $A = 1003$.

3. Dokazamo da je pobjednik Nenad, da su Milica i Nenad istih nozbori, a Aleksandar i Qeda La kovi.

Posmatrajmo najpre Qedinu izjavu: *Aleksandar je pobednik i Nenad je Lажкович*.

Pretpostavimo da Qeda govori istinu. Tada su obe tvrdnje izjave tačne, pa je Aleksandar pobjednik i Nenad je La kovi.

Kako je poznato da je pobjednik istih nozbori, sledi da je Aleksandar istih nozbori, pa je njegova izjava tačna. Kako je, prema Qedinoj izjavi, Nenad La kovi, uslovu Aleksandrovoj izjavi je ispunjen, te iz istih razloga sledi da je Milica pobjedila. To je u protivrječnosti sa tim da je Aleksandar pobjednik. Dakle, Qeda ne govori istinu, pa je Qeda La kovi.

Kako je Qeda La kovi, on ne može biti pobjednik, jer je pobjednik istih nozbori.

Sada posmatrajmo Milicinu izjavu: *Ни ја ни Чеда нисмо победили*. S obzirom da već znamo da Qeda nije pobjednik, istih razloga ova izjava svodi se na istih razloga tvrdnje - Milica nije pobjedila. Ako bi Milica bila La kovi, njena izjava bila bi istinita. Kako je deo „Чeдa није побeдиo” tačan, istih razloga celina Milicine izjave mogla bi nastati samo tako što je istih razloga tvrdnja - Milica nije pobjedila, odnosno tako što bi tvrdnja Milica je pobjedila bila istinita. Međutim, tada bi Milica bila pobjednik, a pobjednik je istih nozbori, što je u protivrječnosti sa pretpostavkom da je Milica La kovi. Stoga, Milica nije La kovi, već je istih nozbori. Zato je njena izjava tačna, te važi: *Милица није побeдила*.

Posmatrajmo sada Nenadovu izjavu: *Ако је Милица Лажкович, онда је Чеда победник*. Kako je Milica istih nozbori, pretpostavka ove implikacije je istinita. Zato je cela Nenadova izjava istinita. Sledi da je

Nenad I sti nozbori .

Vrati mo se sada na Al eksandrovu i zjavu: *Ако је бар један од Чеде и Ненада припадник племена Лажковић, онда је Милица победила.* S obzi rom da је Qeda La kovi , pretpostavka ove impl ikaci je је i sti ni ta. Kako smo ve utvrdili da Mi l i ca ni је победила, следи да је Al eksandrova i zjava не i sti ni ta. Dakle, Al eksandar је La kovi .

Sada znamo:

Чеда није победник, Милица није победник, Александар није Истинозборић.

Preostaje jox da i sk uqi mo mogu nost da је Al eksandar победник. Al i победник је I sti nozbori , а Al eksandar је La kovi , одакле зак уqujemo да Al eksandar не мо е би ти победник. Dakle, ni ko од Mi l i ce, Al eksandra i Qede ni је победник, те једи но preostaje да је победник Nenad.

Zato је konaqn одговор:

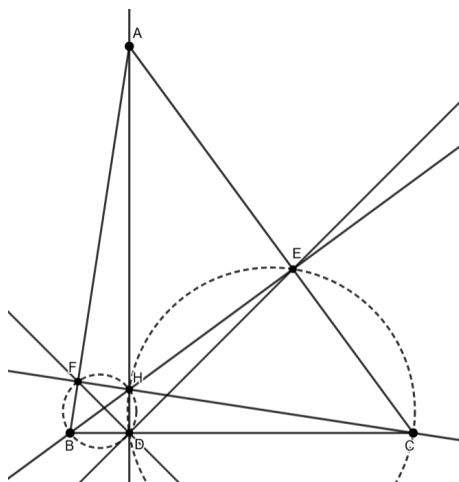
Победник је Ненад.

Pri tome,

Милица и Ненад су Истинозборићи, а Александар и Чеда су Лажковићи.

4. Neka је H ortocentar trougl a ABC i $\angle BAC = \alpha$. Tada su qetvorougl ovi $FHBD$ i $HECD$ tetivni (i maju po dva prava ugl a koji su nesusedni), pa је $\angle HBF = \angle HDF$ i $\angle HCE = \angle HDE$. Kako је trougao BEA pravougli , то је $\angle ABE = 90^\circ - \alpha$, а на основу prethodnog razmatra a, $\angle FDH = 90^\circ - \alpha$. Dokaz zavrшavaju две ekvi val enci je:

$$AF = CF \iff \angle FCA = \angle FAC = \alpha \iff \angle FDE = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ.$$



5. Pri meti mo najpre da je $|49^1 - 6^2| = |49 - 36| = 13$. Dakle, vrednost izraza mo e biti jednaka 13. Doka i mo da ne mo e biti ma a od 13.

Pretpostavi mo suprotno, tj. da postoje pri rodni brojevi a i b takvi da je $|49^a - 6^b| < 13$. S obzirom da je $49 \equiv 9 \pmod{10}$, va i $49^a \equiv 1$ ili $49^a \equiv 9 \pmod{10}$, dok je $6^b \equiv 6 \pmod{10}$. Zato je $49^a - 6^b \equiv 5$ ili $49^a - 6^b \equiv 3 \pmod{10}$.

Kako je $|49^a - 6^b| < 13$, broj $49^a - 6^b$ je jedan od cel i h brojeva i zmeđu 1 -12 do 12, uk uquju i iste. Me u tim cel im brojevi ma samo brojevi $-7, -5, 3$ i 5 jesu kongruentni sa 3 ili 5 po modul u 10. Zato mora va i ti $49^a - 6^b \in \{-7, -5, 3, 5\}$.

Sa druge strane, $49^a \equiv 0 \pmod{7}$, a $6^b \equiv (-1)^b \pmod{7}$, pa je $49^a - 6^b \equiv -(-1)^b \pmod{7}$. Dakle, broj $49^a - 6^b$ je kongruentan sa 1 ili 6 po modul u 7.

Me utim, brojevi $-7, -5, 3$ i 5 kongruentni su redom sa 0, 2, 3 i 5 po modul u 7, te ni jedan od i h ni je kongruentan sa 1 ili 6 po modul u 7. Dobi jena kontradi kcija pokazuje da ne mogu postojati pri rodni brojevi a i b za koje je $|49^a - 6^b| < 13$. Stoga, najma a vrednost izraza $|49^a - 6^b|$ jeste 13.

Други разред – Б категорија

1. Najpre odredi mo uslove defi ni sanosti jednaqine. Da bi logaritmi bili defi ni sani, mora va i ti $x > 0$. Pod ovim uslovom je i $\sqrt{x+1}$ defi ni san, a tako e je $\sqrt{x+1} - 1 \neq 0$, jer bi i z $\sqrt{x+1} - 1 = 0$ sledilo $x = 0$, x to ni je dozvoljeno. Dakle, oblast defi ni sanosti je interval $(0, +\infty)$.

Sada pojednostavi mo desnu stranu:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{(\sqrt{x+1}+1) - (\sqrt{x+1}-1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{2}{x}.$$

Zato je

$$\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}} = \frac{2}{2/x} = x.$$

Prema tome, pol azna jednaqina je ekvivalentna jednaqini

$$x^{\log_{10}^2 x + \log_{10} x^3 + 3} = x, \quad x > 0.$$

Kako je

$$\log_{10} x^3 = 3 \log_{10} x,$$

dobi jamo

$$x^{(\log_{10} x)^2 + 3 \log_{10} x + 3} = x.$$

Sada razmatramo dva sluqaja.

- (1) Ako je $x = 1$, onda je jednaži na oqi gl edno zadovo ena.
 (2) Ako je $x \neq 1$, onda su obe strane obl i ka x^α i x^1 , sa i stom pozi ti vnom bazom razl i qi tom od 1. Zato moraju bi ti jednaki eksponenti :

$$(\log_{10} x)^2 + 3 \log_{10} x + 3 = 1.$$

Odatl e sl edi

$$(\log_{10} x)^2 + 3 \log_{10} x + 2 = 0.$$

Uvedi mo smenu $t = \log_{10} x$. Tada dobi jamo kvadratnu jednaži nu $t^2 + 3t + 2 = 0$, tj. $(t + 1)(t + 2) = 0$. Dakl e,

$$t = -1 \quad \text{или} \quad t = -2.$$

Otuda je

$$\log_{10} x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{10},$$

i l i

$$\log_{10} x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{100},$$

odnosno sva rexe a pol azne jednaži ne su data sa

$$x \in \left\{ 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100} \right\}.$$

2. Jedan di jadski ni z du i ne 4 i ma obl i k $(a, b, 1 - b, 1 - a)$, gde su a i b proi zvo no i zabrani i z skupa $\{0, 1\}$. Prema tome, postoje taqno 4 di jadska ni za du i ne 4.

Ni z du i ne 16 koji se sastoji od 4 uzastopna di jadska ni za du i ne 4 dobi ja se tako xto nezavi sno i zaberemo svaki od ta 4 bl oka. Prema tome, ukupan broj takvi h ni zova jednak je $4^4 = 256$.

Sada treba oduzeti one me u i ma koji su i sami di jadski ni zovi du i ne 16. Neka su qeti ri bloka redom X_1, X_2, X_3, X_4 . Ako ceo ni z du i ne 16 treba da bude di jadski , onda prvi i posl ed i ql an moraju da daju zbi r 1, drugi i pretposl ed i tako e, i tako redom. I z toga sl edi da qetvrti blok mora bi ti jednak prvom, a tre i blok mora bi ti jednak drugom. Dakl e, takav ni z je u potpunosti odre en i zborom prva dva bl oka.

Poxto za svaki od bl okova X_1 i X_2 postoje po 4 mogu nosti , broj di jadski h ni zova du i ne 16 koji su sastav eni od qeti ri di jadska bl oka du i ne 4 jednak je $4 \cdot 4 = 16$. Dakl e, tra eni broj jednak je $256 - 16 = 240$.

3. Neka je a_n n -ti ql an datog ni za. Tada broj a_n i ma n ci fara, pri qemu su ci fre na neparni m mesti ma jednake 7, a ci fre na parni m mesti ma jednake 3. Poxto je $99 = 9 \cdot 11$, a brojevi 9 i 11 su uzajamno prosti , broj a_n je de i v sa 99 ako i samo ako je de i v i sa 9 i sa 11. Zato emo razmotri ti posebno sl uqajeve kada je n paran i kada je n neparan.

(1) $n = 2k$, gde je $k \in \mathbb{N}$: Tada broj a_n ima k neparnih mesta i k parnih mesta. Na neparnim mestima stoji cifra 7, a na parnim mestima cifra 3. Zato je zbir cifara broja a_n jednak $7k + 3k = 10k$. Da bi a_n bio deljiv sa 9, neophodno je i dovoljno da je

$$10k \equiv 0 \pmod{9}.$$

Kako je $10 \equiv 1 \pmod{9}$, dobijamo $k \equiv 0 \pmod{9}$. Sa druge strane, da bi a_n bio deljiv sa 11, potrebno je i dovoljno da razlika zbir cifara na neparnim i parnim mestima bude deljiva sa 11. Ovde je ta razlika $7k - 3k = 4k$. Dakle, mora važi ti

$$4k \equiv 0 \pmod{11}.$$

Pošto je 4 uzajamno prost sa 11, sledi

$$k \equiv 0 \pmod{11}.$$

Stoga, k mora biti deljiv sa 9 i sa 11, te je najmanja moguća vrednost

$$k = \text{H3C}(9, 11) = 99.$$

Tada je $n = 2k = 198$.

(2) $n = 2k + 1$, gde je k nenegativan ceo broj: Tada broj a_n ima $k + 1$ neparnih mesta i k parnih mesta. Zato je zbir cifara broja a_n jednak $7(k + 1) + 3k = 10k + 7$. Da bi a_n bio deljiv sa 9, mora važi ti

$$10k + 7 \equiv 0 \pmod{9}.$$

Kako je $10 \equiv 1 \pmod{9}$, dobijamo $k + 7 \equiv 0 \pmod{9}$, odnosno

$$k \equiv 2 \pmod{9}.$$

Da je razlika zbir cifara na neparnim i parnim mestima iznosi $7(k + 1) - 3k = 4k + 7$. Da bi a_n bio deljiv sa 11, potrebno je i dovoljno da važi

$$4k + 7 \equiv 0 \pmod{11}.$$

S obzirom da je $7 \equiv -4 \pmod{11}$, ovo je ekvivalentno sa

$$4k - 4 \equiv 0 \pmod{11},$$

te dobijamo

$$4(k - 1) \equiv 0 \pmod{11}.$$

Kako je 4 uzajamno prost sa 11, sledi

$$k \equiv 1 \pmod{11}.$$

Dakle, treba naći najmanji nenegativan ceo broj k takav da važi sistem kongruencija

$$k \equiv 2 \pmod{9}, \quad k \equiv 1 \pmod{11}.$$

Brojevi oblika $k = 9t + 2$ su

$$2, 11, 20, 29, 38, 47, 56, \dots$$

a prvi među njima koji je kongruentan sa 1 po modulu 11 jeste 56. Stoga, najmanje k je 56, pa je $n = 2k + 1 = 113$.

Dakle, u prvom slučaju dobili smo $n = 198$, a u drugom $n = 113$. Kako je $113 < 198$, sledi da se prvi član niz za $d = 99$ dobija za $n = 113$.

Zato je traženi broj

$$\underbrace{7373 \dots 37}_{113 \text{ цифара}}$$

tj. broj koji se nalazi na 113-tom mestu datog niza.

Први члан низа дељив са 99 јесте $\underbrace{7373 \dots 37}_{113 \text{ цифара}}$.
--

4. (a) Pri menimo nejednakost trougla na brojeve $y - a$ i $y - b$. Dobi jamo $|y - a| + |y - b| \geq |(y - a) - (y - b)|$. Kako je $(y - a) - (y - b) = b - a$, sledi

$$|(y - a) - (y - b)| = |b - a|.$$

Me uti m, iz uslova $a < b$, imamo $b - a > 0$, pa je $|b - a| = b - a$, tj.

$$|y - a| + |y - b| \geq b - a,$$

te je tvr e e dokazano.

Напомена. Jednakost va i ako i samo ako je $y \in [a, b]$.

(b) Nakon osloba a a od apsolutnih vrednosti, u zavisnosti od x , u izrazu $|x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2023| + |x - 2024|$, neki od sabiraka ostaju isti, dok neki menjaju znak. Zato e dati izraz imati oblik

$$S = z_1(x - 1) + z_2(x - 2) + \dots + z_{2023}(x - 2023) + z_{2024}(x - 2024),$$

gde su $z_1, z_2, \dots, z_{2023}, z_{2024} \in \{-1, 1\}$. Sada je

$$S = (z_1 + z_2 + \dots + z_{2023} + z_{2024})x - (z_1 \cdot 1 + z_2 \cdot 2 + \dots + z_{2023} \cdot 2023 + z_{2024} \cdot 2024). \quad (1)$$

Ako je zbir $z_1 + z_2 + \dots + z_{2023} + z_{2024} = 0$, onda je broj S racionalan, jer je jednak sa $z_1 \cdot 1 + z_2 \cdot 2 + \dots + z_{2023} \cdot 2023 + z_{2024} \cdot 2024$. Ako je zbir $z_1 + z_2 + \dots + z_{2023} + z_{2024} \neq 0$, onda broj S ne mo e biti racionalan, zato xto iz jednakosti (1) dobi jamo $x = \frac{S + (z_1 \cdot 1 + z_2 \cdot 2 + \dots + z_{2023} \cdot 2023 + z_{2024} \cdot 2024)}{z_1 + z_2 + \dots + z_{2023} + z_{2024}}$, pa ukoliko je S racionalan broj, broj x je tako e racionalan, kao kol i qnik dva racionalna broja, xto ni je mogu e. Dakle, broj S je racionalan jedino kada je $z_1 + z_2 + \dots + z_{2023} + z_{2024} = 0$.

Kako su brojevi $z_1, z_2, \dots, z_{2023}, z_{2024} \in \{-1, 1\}$ poslednja jednakost je zadovoljena ako i samo ako je među brojevima $z_1, z_2, \dots, z_{2023}, z_{2024}$ broj onih koji su jednaki 1 jednak broju onih koji su jednaki -1 , odnosno ako i samo ako je broj S jednak broju onih koji su jednaki -1 , odnosno ako i samo ako je broj x veći od tačno 1012 brojeva iz skupa $\{1, 2, \dots, 2023, 2024\}$, odnosno ako i samo ako je $x \in (1012, 1013)$. Tada je $z_1 = z_2 = \dots = z_{1012} = 1$ i $z_{1013} = \dots = z_{2023} = z_{2024} = -1$, pa je na osnovu (1)

$$S = \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{1012} - \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{1012} x - (1 + 2 + \dots + 1012 - 1013 - 1014 - \dots - 2024) =$$

$$= (1013 - 1) + (1014 - 2) + \dots + (2024 - 1012) = 1012 \cdot 1012 = 1012^2. \quad (2)$$

Ovim smo konačno dokazali da zadati uslovi u problemu zapravo znači da je

$$|x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2023| + |x - 2024| = 1012^2.$$

Da bi kompletirali dokaz datog tvrdjenja ostaje nam da dokažemo da za svaki realan broj y važi nejednakost

$$|y - 1| + |y - 2| + \dots + |y - 2023| + |y - 2024| \geq 1012^2. \quad (2)$$

U tom cilju, koristeći nejednakost iz dela (a) dobijamo:

$$\begin{aligned} & |y - 1| + |y - 2| + \dots + |y - 2023| + |y - 2024| = \\ & = (|y - 1| + |y - 2024|) + (|y - 2| + |y - 2023|) + \dots + (|y - 1012| + |y - 1013|) \geq \\ & \geq (2024 - 1) + (2023 - 2) + \dots + (1013 - 1012) = 2023 + 2021 + \dots + 1 = \\ & = (2023 + 1) + (2021 + 3) + \dots + (1013 + 1011) = 2024 \cdot 506 = 1012^2. \end{aligned}$$

Ovim smo dokazali nejednakost (2), čime smo upotpunili dokaz tvrdjenja.

5. Označimo $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle ACB$. Kako su O_b i O_c centri opisanih kružnica trouglova AHC i ABH , obe tačke pripadaju simetrali dužine AH . Pošto je $AH \perp BC$, ta simetrala je paralelna sa BC , pa je $O_b O_c \parallel BC$.

Dokažimo da je $O_b C \parallel O_c B$.

Pošto je O_b centar opisane kružnice trougla AHC , u jednakokrakom trouglu $O_b AC$ važi

$$\angle O_b CA = 90^\circ - \frac{\angle CO_b A}{2}.$$

Označimo sa H' pravičnu tačku na opisanom trouglu AHC koja se nalazi na luku AC na kom se nalazi tačka H . Tada je $\angle AH'C = 180^\circ - \angle AHC$, pa pošto je $\angle CO_b A$ centralni ugao nad CA , to je $\angle CO_b A = 2 \cdot \angle CH'A$ i $\angle O_b CA = 90^\circ - (180^\circ - \angle AHC) = \angle AHC - 90^\circ$.

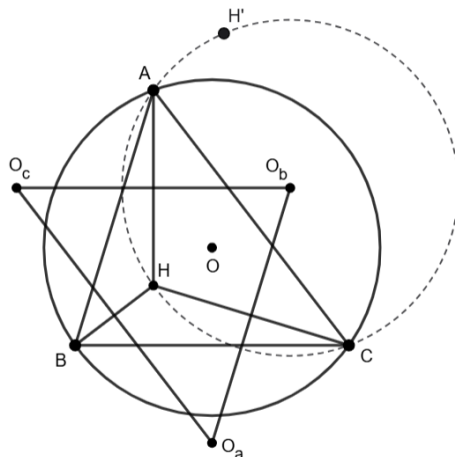
Jasno, $\angle HAC = 90^\circ - \gamma$ i $\angle HCA = 90^\circ - \alpha$, pa je $\angle AHC = \alpha + \gamma = 180^\circ - \beta$. Otuda dobijamo $\angle O_b CA = 90^\circ - \beta$.

Analognu dobijamo $\angle O_cBA = 90^\circ - \gamma$.

Sada je

$$\angle O_cBC + \angle O_bCB = 90^\circ - \gamma + \beta + 90^\circ - \beta + \gamma = 180^\circ,$$

odakle sledi $O_bC \parallel O_cB$. Prema tome, četvorougao O_cO_bCB je paralelogram, pa je $O_bO_c = BC$. Analogno se dokazuje $O_aO_b = AB$ i $O_aO_c = AC$, odakle sledi podudarnost trouglova ABC i $O_aO_bO_c$.



Трећи разред – Б категорија

1. Neka je c hipotenuza datog pravouglonog trougla. Pošto su a i b katete, važi

$$a > 0, \quad b > 0.$$

Pored toga, iz definisanosti logaritma na levoj strani sledi

$$\frac{a-b}{2} > 0,$$

pa je

$$a > b.$$

Neka su α i β ostri uglovi pravouglonog trougla, pri čemu je α ugao naspram katete a , a β ugao naspram katete b . Pošto je u trouglu uvek stranica naspram većeg ugla, iz $a > b$ sledi

$$\alpha > \beta.$$

Polaznu jednačinu pomnoži mo sa 2:

$$2 \log_8 \frac{a-b}{2} = \log_8 a + \log_8 b - \log_8 2.$$

Pri menom osobe na logaritama dobi jamao

$$\log_8 \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 = \log_8 \frac{ab}{2}.$$

Kako je logaritamska funkcija sa osnovom 8 injektivna na $(0, \infty)$, sledi

$$\left(\frac{a-b}{2} \right)^2 = \frac{ab}{2}.$$

Množenjem sa 4 dobi jamao

$$(a-b)^2 = 2ab,$$

odnosno

$$a^2 - 2ab + b^2 = 2ab.$$

Odatle sledi

$$a^2 + b^2 - 4ab = 0.$$

Kako je trougao pravougli, po Pitagorinoj teoremi važi

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

pa prethodna jednakost postaje

$$c^2 - 4ab = 0.$$

Pošto je $c > 0$, možemo podeliti sa c^2 , pa dobi jamao

$$1 - 4 \frac{ab}{c^2} = 0.$$

Sada, kako je α ugao naspram katete a , imamo $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ i $\cos \alpha = \frac{b}{c}$. Zato prethodna jednakost postaje

$$1 - 4 \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

odnosno

$$4 \sin \alpha \cos \alpha = 1.$$

S obzirom da važi

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

sledi $2 \sin 2\alpha = 1$, tj. $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$.

Me uti m, ugao α je oxtar, te je $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, tj. $0^\circ < 2\alpha < 180^\circ$. U tom intervalu jednaqi na

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$$

ima rexe a

$$2\alpha = 30^\circ \quad \text{или} \quad 2\alpha = 150^\circ.$$

Dakl e,

$$\alpha = 15^\circ \quad \text{или} \quad \alpha = 75^\circ.$$

Ali ve znamo da je $\alpha > \beta$, te kako je

$$\alpha + \beta = 90^\circ,$$

ve i od ova dva oxta ugla mora bi ti 75° . Stoga,

$$\alpha = 75^\circ, \quad \beta = 15^\circ.$$

I z svega navedenog, uglovi pol aznog pravougl og trougl a su dati sa:

$$\boxed{15^\circ, 75^\circ, 90^\circ.}$$

2. Posmatrajmo osni presek kupe. Dobi jamo jednakokraki trougao ABC , gde je B vrh kupe, a AC preqni k osnovu osnovog preseka. U taj trougao upi sana je kru ni ca, koja je osni presek upi sane l opte. Neka je O centar te kru ni ce i neka je en pol upreqni k R . Neka je D sredi xte du i AC . Tada je

$$BD = h$$

vi si na kupe, a

$$DC = r$$

pol upreqni k osnovu kupe.

Neka je

$$\angle DBC = \alpha.$$

Poxto je BD osa simetrije osnovog preseka, ugao pri vrhu trougl a ABC jednak je 2α , pa va i

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Neka je E podno je normale iz taqke O na krak BC . Poxto je O centar upi sane kru ni ce, va i

$$OD = R \quad \text{и} \quad OE = R.$$

Sada posmatrajmo pravougli trougao BOE . Kako je O na osi simetrije trougl a ABC , taqke B , O i D su kol i nearne. Zato je

$$\angle OBE = \angle DBC = \alpha.$$

Iz pravougl olog trougla BOE sledi

$$\sin \alpha = \frac{OE}{OB} = \frac{R}{OB},$$

pa je

$$OB = \frac{R}{\sin \alpha}.$$

Kako su B , O i D koliknearne itaqka O le i izme u B i D , dobi jamo

$$BD = BO + OD = \frac{R}{\sin \alpha} + R.$$

Dakl e,

$$h = BD = \frac{R(1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha}.$$

Da e, u pravougl om trougl u BDC va i

$$\tan \alpha = \frac{DC}{BD} = \frac{r}{h},$$

pa sledi

$$r = h \tan \alpha.$$

Ubaci va em izraza za h dobi jamo

$$r = \frac{R(1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha} \tan \alpha = \frac{R(1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha}.$$

Zapremi na kupe jednaka je

$$K = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Zamenom izraza za r i h dobi jamo

$$K = \frac{\pi}{3} \left(\frac{R(1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha} \right)^2 \left(\frac{R(1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha} \right).$$

Pox to je

$$\cos^2 \alpha = (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha),$$

sledi

$$K = \frac{\pi R^3 (1 + \sin \alpha)^2}{3 \sin \alpha (1 - \sin \alpha)}.$$

Sa druge strane, va ak opi san oko l opte i ma pol upreqni k osnove R i vi si nu $2R$, pa je egova zapremi na

$$V = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3.$$

Prema tome,

$$\frac{K}{V} = \frac{(1 + \sin \alpha)^2}{6 \sin \alpha (1 - \sin \alpha)}.$$

Oznaqi mo

$$s = \sin \alpha, \quad 0 < s < 1.$$

Tada dobi jamo

$$\frac{K}{V} = \frac{(1 + s)^2}{6s(1 - s)}.$$

Uporedi mo sada ovaj i zraz sa $\frac{4}{3}$:

$$\frac{K}{V} - \frac{4}{3} = \frac{(1 + s)^2}{6s(1 - s)} - \frac{4}{3} = \frac{(1 + s)^2 - 8s(1 - s)}{6s(1 - s)}.$$

Sre i va em broji oca dobi jamo

$$(1 + s)^2 - 8s(1 - s) = 1 + 2s + s^2 - 8s + 8s^2 = 9s^2 - 6s + 1 = (3s - 1)^2.$$

Zato je

$$\frac{K}{V} - \frac{4}{3} = \frac{(3s - 1)^2}{6s(1 - s)} \geq 0,$$

jer je $0 < s < 1$, pa je i meni l ac pozi ti van.

Otud sl edi

$$\frac{K}{V} \geq \frac{4}{3},$$

odnosno

$$K \geq \frac{4}{3}V.$$

Dakl e, za svaku takvu kupu va i $K \geq \frac{4}{3}V$, pa je kandi dat

$$m = \frac{4}{3}.$$

Sa druge strane, jednakost

$$\frac{K}{V} = \frac{4}{3}$$

va i ako i samo ako je

$$(3s - 1)^2 = 0,$$

tj. ako i samo ako je

$$s = \frac{1}{3}.$$

Poxto postoji ugao $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ takav da je

$$\sin \alpha = \frac{1}{3},$$

slеди da se vrednost $\frac{4}{3}$ zai sta dosti e. Prema tome, $m_{\max} = \frac{4}{3}$. Kako iz $K \geq \frac{4}{3}V$ i $\frac{4}{3} > 1$ sl edi $K > V$, jednakost $K = V$ ni je mogu a. Ti me je dokazan i deo (a). Stoga,

$$\boxed{K \neq V} \quad \text{и} \quad \boxed{m_{\max} = \frac{4}{3}}.$$

3. Posmatrajmo datu jednaq i nu po modul u 3. Tada va i $5^x \equiv 16 \equiv 1 \pmod{3}$, odnosno $(-1)^x \equiv 1 \pmod{3}$, pa zak uqujemo da je x paran broj. Dakl e, mo e mo pi sati $x = 2x_1$ za $x_1 \in \mathbb{N}$. Jednaq i na postaje

$$5^{2x_1} - 3^y = 16 \quad \Rightarrow \quad (5^{x_1} - 4)(5^{x_1} + 4) = 3^y.$$

Kako je desna strana stepen broja 3, sl edi da su i brojevi $5^{x_1} - 4$ i $5^{x_1} + 4$ tako e stepeni broja 3. Neka je zato

$$5^{x_1} - 4 = 3^a, \quad 5^{x_1} + 4 = 3^b,$$

gde je $a, b \in \mathbb{N}_0$ i $a < b$. Oduzi ma em ove dve jednaq i ne dobi jama $3^b - 3^a = 8$.

Poxto je leva strana de i va sa 3^a , a broj 8 ni je de i v sa 3, mora bi ti $a = 0$. Tada dobi jama $b = 2$ i $x_1 = 1$, pa je $x = 2$ i $y = 2$.

Dakl e, jedi no rexe e je $(x, y) = (2, 2)$.

4. Neka je u nekom trenutku rastoja e i zme u dva etona jednako d , gde pod rastoja em podrazumevamo broj prazni h po a i zme u i h. Na poqetku je $d = n - 2$.

(a) Neka je $n \equiv 2 \pmod{3}$. Tada je

$$d = n - 2 \equiv 0 \pmod{3},$$

pa je poqetno rastoja e obl i ka $3m$ za neki $m \in \mathbb{N}$.

Bojanova strategi ja je sl ede a: ako Ana u svom potezu pomeri eton za jedno po e, Bojan u svom narednom potezu pomera svoj eton za dva po a; ako Ana pomeri eton za dva po a, Bojan pomera svoj eton za jedno po e.

Na taj naq i n, posl e Ani nog i Bojanovog poteza zajedno, rastoja e se sma i za 3. Dakl e, ako je pre Ani nog poteza rastoja e de i vo sa 3, onda je i posl e Bojanovog poteza opet de i vo sa 3.

Prema tome, Bojan mo e da odr ava da posl e svakog egovog poteza rastoja e bude obl i ka $3m$. To znaq i da, kad god Ana i ma mogu nost da odi gra potez, i ma je i Bojan, jer on uvek odgovara kompl ementarni m potezom.

Kako se rastoja e pri svakom potezu smanjuje, igra se mora završiti ti posle konačno mnogo koraka. Pošto Bojan uvek ima odgovor na Ani n potez, sledi da e poslednji potez odigrati Bojan, pa Ana ostaje bez poteza.

(b) Neka je $n \equiv 0$ ili $n \equiv 1 \pmod{3}$.

Ako je $n \equiv 0 \pmod{3}$, tada je

$$d = n - 2 \equiv 1 \pmod{3},$$

pa je početno rastoja e oblika $3m+1$. Ana tada u prvom potezu pomeri svoj eton za jedno poe, pa novo rastoja e postaje oblika $3m$.

Ako je $n \equiv 1 \pmod{3}$, tada je

$$d = n - 2 \equiv 2 \pmod{3},$$

pa je početno rastoja e oblika $3m+2$. Ana tada u prvom potezu pomeri svoj eton za dva poa, pa novo rastoja e postaje oblika $3m$.

U oba sluqaja Ana svoji m prvim potezom dovodi igru u poziciju iz dela (a), samo sada je na potezu Bojan. Zato je Bojan u gubitni qkoj poziciji.

Напомена. U suxti ni , u rexe u smo izdvojili pobedni qke i gubitni qke pozicije. Primetimo da svakoj poziciji u igri , odre enoj rastoja em d izme u etona, mo emo pridru iti atribut *победничка* ili *губитничка*. Ka emo da je pozicija pobedni qka ako i graq koji je na potezu iz te pozicije mo e da odigra tako da sebi obezbedi pobedu uz optimalnu igru, dok je pozicija gubitni qka ako, xta god da i graq na potezu uradi , proti vni ku ostava pobedni qku poziciju.

Razmotri mo nekol iko vrednosti rastoja a d :

- $d = 1$ pozicija je pobedni qka, jer i graq na potezu pomeri svoj eton za jedno poe, etoni postaju susedni i proti vni k vi xe nema dozvo en potez;
- $d = 2$ pozicija je pobedni qka, jer i graq na potezu mo e da pomeri eton za dva poa i time završava igru;
- $d = 3$ pozicija je gubitni qka, jer i graq na potezu mo e da pre e samo u pozicije za koje je $d = 2$ ili $d = 1$, qi me (u oba sluqaja) ostava proti vni ku pobedni qku poziciju;
- $d = 4$ pozicija je pobedni qka, jer se jednim potezom mo e pre i u poziciju $d = 3$, qi me proti vni k ostaje u gubitni qkoj poziciji .

Ovakvi m razmatra em dol azi mo do sl ede i h zak uqaka (sa P je oznaqena pobe d ni qka, a sa G gubi t ni qka po zi ci ja):

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
тип позиције	П	П	Г	П	П	Г	П	П	Г	П	...

Doka i mo da su gubi t ni qke po zi ci je one u koji ma je d de i vo sa 3, dok su sve ostal e pobe d ni qke. To dokazujemo i ndukci jom po d . Ve smo proveri li tvr e e za $d = 1, 2, 3$. Pretpostavi mo sada da va i za sva rastoja a ma a od nekog d , i poka i mo da tada va i i za d .

I z po zi ci je sa rastoja em d , i graq na potezu mo e da pre e samo u po zi ci ju sa rastoja em $d - 1$ ili $d - 2$, jer svoj eton mo e pomeri ti za jedno ili dva po a ka proti vni qkom etonu.

- Ako je $d \equiv 0 \pmod{3}$, onda $d - 1$ i $d - 2$ ni su de i vi sa 3, pa su po i ndukti vnoj hi potezi obe odgovaraju e po zi ci je pobe d ni qke. Zato je po zi ci ja sa rastoja em d gubi t ni qka.
- Ako je $d \equiv 1 \pmod{3}$, onda je $d - 1 \equiv 0 \pmod{3}$, pa je po i ndukti vnoj hi potezi po zi ci ja sa rastoja em $d - 1$ gubi t ni qka. Dakl e, po zi ci ja sa rastoja em d je pobe d ni qka.
- Ako je $d \equiv 2 \pmod{3}$, onda je $d - 2 \equiv 0 \pmod{3}$, pa je po i ndukti vnoj hi potezi po zi ci ja sa rastoja em $d - 2$ gubi t ni qka. Dakl e, po zi ci ja sa rastoja em d je pobe d ni qka.

Ti me je i ndukci ja zavr xena, pa smo dokazal i da su gubi t ni qke po zi ci je upravo one za koje je $d \equiv 0 \pmod{3}$.

5. Nakon osl oba a a od apsolut ni h vrednosti , u zavi snosti od x , u izrazu $|x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2023| + |x - 2024|$, neki od sabi raka ostaju isti , dok neki me aju znak. Zato e dati i zrazi mati obl ik

$$S = z_1(x - 1) + z_2(x - 2) + \dots + z_{2023}(x - 2023) + z_{2024}(x - 2024),$$

gde je $z_1, z_2, \dots, z_{2023}, z_{2024} \in \{-1, 1\}$. Sada je

$$S = (z_1 + z_2 + \dots + z_{2023} + z_{2024})x - (z_1 \cdot 1 + z_2 \cdot 2 + \dots + z_{2023} \cdot 2023 + z_{2024} \cdot 2024). \quad (1)$$

Ako je zbi r $z_1 + z_2 + \dots + z_{2023} + z_{2024} = 0$, onda je broj S raci onal an, jer je jednak sa $z_1 \cdot 1 + z_2 \cdot 2 + \dots + z_{2023} \cdot 2023 + z_{2024} \cdot 2024$. Ako je zbi r $z_1 + z_2 + \dots + z_{2023} + z_{2024} \neq 0$, onda broj S ne mo e bi ti raci onal an, zato x to iz jednakosti (1) dobi jamo $x = \frac{S + (z_1 \cdot 1 + z_2 \cdot 2 + \dots + z_{2023} \cdot 2023 + z_{2024} \cdot 2024)}{z_1 + z_2 + \dots + z_{2023} + z_{2024}}$, pa ukol i ko je S raci onal an broj, broj x je tako e raci onal an, kao kol i qni k dva raci onal na broja, x to ni je mogu e. Dakl e, broj S je raci onal an jedi no kada je $z_1 + z_2 + \dots + z_{2023} + z_{2024} = 0$.

Kako su brojevi $z_1, z_2, \dots, z_{2023}, z_{2024} \in \{-1, 1\}$ posled a jednakost je zadovo ena ako i samo ako je me u brojevi ma $z_1, z_2, \dots, z_{2023}, z_{2024}$ broj oni h

koji su jednaki 1 jednak broju onih koji su jednaki -1 , odnosno ako ih ima po 1012. Prema tome, broj S je racionalan ako i samo ako je broj x veći od tačno 1012 brojeva iz skupa $\{1, 2, \dots, 2023, 2024\}$, odnosno ako i samo ako je $x \in (1012, 1013)$. Tada je $z_1 = z_2 = \dots = z_{1012} = 1$ i $z_{1013} = \dots = z_{2023} = z_{2024} = -1$, pa je na osnovu (1)

$$S = \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{1012} \underbrace{(-1 - 1 - \dots - 1)}_{1012} x - (1 + 2 + \dots + 1012 - 1013 - 1014 - \dots - 2024) =$$

$$= (1013 - 1) + (1014 - 2) + \dots + (2024 - 1012) = 1012 \cdot 1012 = 1012^2. \quad (2)$$

Ovim smo konačno dokazali da zadati uslovi u problemu zapravo znači da je

$$|x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2023| + |x - 2024| = 1012^2.$$

Da bi kompletirali dokaz datog tvrdjenja ostaje nam da dokažemo da za svaki realan broj y važi nejednakost

$$|y - 1| + |y - 2| + \dots + |y - 2023| + |y - 2024| \geq 1012^2. \quad (2)$$

Neka su sada a i b proizvoljni realni brojevi za koje važi $a < b$. Odredi mo najmanju vrednost izraza $|y - a| + |y - b|$. Razlikujemo tri slučaja:

1. $y > b$. Tada je $|y - a| + |y - b| = (y - a) + (y - b) > y - a > b - a$.
2. $b \geq y \geq a$. Sada je $|y - a| + |y - b| = (y - b) + (b - y) = b - a$.
3. $a > y$. U ovom slučaju imamo $|y - a| + |y - b| = (a - y) + (b - y) > b - y > b - a$.

Na ovaj način smo dokazali da za svaki realan broj y važi nejednakost

$$|y - a| + |y - b| \geq b - a. \quad (3)$$

Sada koristeći nejednakost (3) dobijamo

$$\begin{aligned} & |y - 1| + |y - 2| + \dots + |y - 2023| + |y - 2024| = \\ & = (|y - 1| + |y - 2024|) + (|y - 2| + |y - 2023|) + \dots + (|y - 1012| + |y - 1013|) \geq \\ & \geq (2024 - 1) + (2023 - 2) + \dots + (1013 - 1012) = 2023 + 2021 + \dots + 1 = \\ & = (2023 + 1) + (2021 + 3) + \dots + (1013 + 1011) = 2024 \cdot 506 = 1012^2. \end{aligned}$$

Ovim smo dokazali nejednakost (2), čime smo upotpunili dokaz tvrdjenja.

Четврти разред – Б категорија

1. Neka ta tri broja, u nekom poretku, qine aritmetički niz. Tada ih možemo zapisati kao $a - d$, a , $a + d$, gde je $d \neq 0$.

Pošto ti isti brojevi, možda u drugom poretku, qine i geometrijski niz, jedan od njih mora biti srednji član tog geometrijskog niza. Za geometrijski niz x , y , z važi $y^2 = xz$.

Razmotrimo sve mogućnosti.

Ako je srednji član geometrijskog niza broj a , onda bi važilo $a^2 = (a - d)(a + d) = a^2 - d^2$, odakle sledi $d = 0$, što je nemoguće jer su brojevi različiti.

Ako je srednji član geometrijskog niza broj $a - d$, onda važi $(a - d)^2 = a(a + d)$. Srećivo ćemo dobiti $a^2 - 2ad + d^2 = a^2 + ad$, odnosno $d^2 - 3ad = 0$. Pošto je $d \neq 0$, sledi $d = 3a$, pa je $a \neq 0$.

Tada su ta tri broja jednaka $a - d = -2a$, a i $a + d = 4a$. Oni zajedno mogu da obrazuju geometrijski niz, na primer u poretku a , $-2a$, $4a$, sa količnikom -2 . Ako ih uzmemo u obrnutom poretku, $4a$, $-2a$, a , dobiti ćemo količnik $-\frac{1}{2}$.

Ako je srednji član geometrijskog niza broj $a + d$, analogno dobiti ćemo $(a + d)^2 = a(a - d)$, odakle sledi $d = -3a$. To daje isti skup brojeva, samo u drugom poretku, pa ne dobiti ćemo ništa novo.

Prema tome, jedina moguća tri broja su, do zajedničkog nenulog množenja, oblika -2 , 1 , 4 . Zato su moguće vrednosti količnika geometrijskog niza samo -2 i $-\frac{1}{2}$.

Dakle, najveća moguća vrednost tog količnika je $-\frac{1}{2}$.

2. Iz jednakosti tangenata dobiti ćemo da važi $|AF| = |AE| = 3$, $|BF| = |BD| = x$ i $|CE| = |CD| = y$.

Neka je $r = |ES|$ poluprečnik upisane kružnice trougla ABC . Kako je AS simetrala ugla $\angle EAF$, važi $\angle EAS = 30^\circ$. Iz trougla AES sledi $r = 3 \operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3}$.

Primenom Pitagorine teoreme na trougao CSE dobiti ćemo $y = 5$, pa je $|AC| = 8$.

Prema tome, stranice trougla ABC su $a = 5 + x$, $b = 8$ i $c = 3 + x$, pa je njegov poluprim $s = 8 + x$.

Površinu trougla ABC možemo izraziti na tri načina:

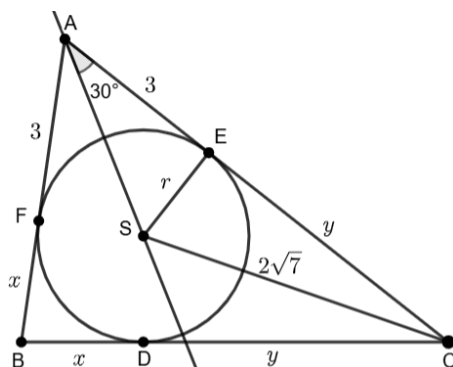
- Korišćenjem Heronovog obrazca dobiti ćemo

$$P = \sqrt{(8+x) \cdot 3 \cdot x \cdot 5} = \sqrt{15x(8+x)};$$

- Primenom formule $P = r \cdot s$ dobiti ćemo $P = \sqrt{3}(8+x)$;

- Iz $P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$ dobiti ćemo $P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (3+x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = (6+2x)\sqrt{3}$.

Izjednačavajući bilo koja dva od prethodna tri izraza za površinu dobiti ćemo $x = 2$, odakle je $P = 10\sqrt{3}$.



3. Rеше e zadatka je i dento qno rexe u 4. zadatka sa Dr avnog takmi qe a za tre i razred - B kategorija.

4. Jasno je da je $z \geq 1$. Neka je $L = 3^x + 6^y$ i $R = 2025^z$. Zapi xi mo jednaqi nu kao

$$3^x + 3^y \cdot 2^y = 3^{4z} \cdot 5^{2z}.$$

Razmotri mo sl ede e sl uqajeve:

1° $x > y$: Tada je L de iv sa 3^y , ali i nije de iv sa 3^{y+1} , a R je de iv sa 3^{4z} , ali i nije de iv sa 3^{4z+1} , te je $y = 4z$. De e em obe strane jednaqi ne sa 3^{4z} dobi jamo

$$3^{x-4z} + 2^{4z} = 5^{2z} \Rightarrow 3^{x-4z} = (5^z - 2^{2z})(5^z + 2^{2z}).$$

Sl edi da je $5^z - 2^{2z} = 3^a$ i $5^z + 2^{2z} = 3^b$, gde su $b > a \geq 0$ cel i brojevi i $a + b = x - 4z$. Me utim, $3^a + 3^b = 2 \cdot 5^z$ je broj koji nije de iv sa 3, a de iv je sa 3^a , pa je $a = 0$. Tada va i $5^z - 2^{2z} = 1$. Pri meti mo da $z = 1$ jeste rexe e, a za $z \geq 2$ je $5^z - 4^z = (5 - 4)(5^{z-1} + \dots + 4^{z-1}) > 1$. Dakl e, $z = 1$ i $y = 4$, odakl e je $x = 6$.

2° $x < y$: Tada je L de iv sa 3^x , ali i nije de iv sa 3^{x+1} , a R je de iv sa 3^{4z} , ali i nije de iv sa 3^{4z+1} , te je $x = 4z$. De e em obe strane jednaqi ne sa 3^{4z} dobi jamo

$$1 + 3^{y-4z} \cdot 2^y = 5^{2z} \Rightarrow 3^{y-4z} \cdot 2^y = (5^z - 1)(5^z + 1).$$

Pri meti mo da je razl i ka brojeva $5^z - 1$ i $5^z + 1$ jednaka 2, pa jedan od ih nije de iv sa 3. Da e, va i $5^z + 1 \equiv 2 \pmod{4}$, pa broj $5^z + 1$ nije de iv sa 4. Kako je $5^z + 1 > 5^z - 1$, jedi na mogu nost je

$$5^z - 1 = 2^{y-1} \quad \text{и} \quad 5^z + 1 = 2 \cdot 3^{y-4z}.$$

Oduzi ma em prethodne dve jednaqi ne i de e em sa 2 dobi jamo $1 = 3^{y-4z} - 2^{y-2}$. Oдавde je $2^{y-2} \equiv 2 \pmod{3}$, pa je y neparan. Zbog toga je

$y - 4z$ neparan, pa je $3^{y-4z} \equiv -1 \pmod{4}$.

Za $y \geq 4$ je $2^{y-2} \equiv 0 \pmod{4}$, pa dobi jamo $3^{y-4z} - 2^{y-2} \equiv -1 \pmod{4}$.

U sl uqajevi ma $y \in \{0, 1, 2, 3\}$ di rektnom proverom zak uqujemo da nema cel obrojnih rexe a.

3° $x = y$: Tada je $3^x + 6^x = 2025^z$. Zapi xi mo jednaqi nu kao

$$3^x(1 + 2^x) = 3^{4z} \cdot 5^{2z} \Rightarrow 1 + 2^x = 3^{4z-x} \cdot 5^{2z}.$$

Odavde je $x \geq 5$, pa je $L = 3^x + 6^x \equiv (-1)^x \pmod{4}$. S druge strane, $R = 2025^z \equiv 1 \pmod{4}$, pa je x parno. Tada je $1 + 2^x \equiv 1 + (-1)^x \equiv 2 \pmod{3}$. Me uti m, ovo je nemogu e poxtto je $3^{4z-x} \cdot 5^{2z}$ potpun kvadrat.

Dakl e, jedi no rexe e postav ene jednaqi ne je

$$(x, y, z) = (6, 4, 1).$$

5. (PRVO REX E E) Pretpostavi mo suprotno, tj. da va i $2 \in S$. Poka i mo da $2026^k \notin S$ za svako $k \geq 1$, i ndukcijom po k .

База $k = 1$: Pri meni mo uslov za $n = 2$. Taqno jedan od $\{2, 4, 2026\}$ pri pada S . Poxtto $2 \in S$, sl edi $2026 \notin S$.

Индуктивни корак: Pretpostavi mo $2026^k \notin S$. Pri meni mo uslov za $n = 2026^k$. Taqno jedan od $\{2026^k, 2 \cdot 2026^k, 1013 \cdot 2026^k\}$ pri pada S . Poxtto $2026^k \notin S$, taqno jedan od $2 \cdot 2026^k$ i $1013 \cdot 2026^k$ pri pada S .

U sl uqaju da $2 \cdot 2026^k \in S$, pri menom uslova za $n = 2 \cdot 2026^k$ na skup $\{2 \cdot 2026^k, 4 \cdot 2026^k, 2026^{k+1}\}$, sl edi $2026^{k+1} \notin S$. Sl i qno, ako $1013 \cdot 2026^k \in S$, pri menom uslova za $n = 1013 \cdot 2026^k$ na skup $\{1013 \cdot 2026^k, 2026^{k+1}, 1013^2 \cdot 2026^k\}$, opet, sl edi $2026^{k+1} \notin S$.

Dakl e $2026^{2026} \notin S$, xto je u proti vreqnosti sa uslovom zadatka. Pretpostavka $2 \in S$ je netaqna, te $2 \notin S$.

(DRUGO REX E E) Svaki pri rodan broj n se na jedi nstven naqi n mo e zapi sati u obl i ku $n = 2^a \cdot 1013^b \cdot k$, gde su $a, b \geq 0$, a broj k uzajamno prost sa 2 i 1013.

Za fi ksi rano k , uslov $|S \cap \{n, 2n, 1013n\}| = 1$ znaqi da je za svako (a, b) taqno jedan od brojeva

$$2^a \cdot 1013^b \cdot k, \quad 2^{a+1} \cdot 1013^b \cdot k, \quad 2^a \cdot 1013^{b+1} \cdot k$$

u skupu S .

Poxtto i broj 2 i broj $2026^{2026} = 2^{2026} \cdot 1013^{2026}$ odgovaraju sl uqaju $k = 1$, mo emo da se ograni qi mo samo na $k = 1$.

Pri dru imo broju $2^a \cdot 1013^b$ taqku (a, b) u celobrojnoj mre i (re-xetki). Tada uslov iz zadatka postaje: u svakom skupu taqaka obl i ka $\{(a, b), (a + 1, b), (a, b + 1)\}$, gde su $a, b \in \mathbb{N}_0$, i zabrana je taqno jedna taqka.

Pretpostavi mo $2 \in S$, tj. da je taqka $(1, 0)$ i zabrana (jer je $2 = 2^1 \cdot 1013^0$). Tada:

**19. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА**

7. април 2026. године

Први дан

1. Koliko najviše različitih ostataka pri deljenju sa 2026 mogu davati elementi skupa

$$\{\pi(1), 2\pi(2), 3\pi(3), \dots, 2026\pi(2026)\},$$

pri čemu je π proizvoljna permutacija skupa $\{1, 2, \dots, 2026\}$.

2. Dat je oxtrogl i trougao ABC , s tim da je $AB < AC$. Neka su D i E podnožja visina iz temena A i B , redom, H ortocentar trougla ABC i neka je F presečna tačka simetrale unutrašnjeg ugla u temenu A tog trougla sa pravom BC . Presek pravih AF i BE je tačka I . Ako se kružnice opisane oko trouglova BHC i DFI seku u tačkama M i P , dokazati da je četvorougao $AEMP$ tetivani.

3. Dat je pravilan $2n$ -ougao $A_1A_2 \dots A_{2n}$, $n \geq 3$, čiji su stranice obojene sa n boja tako da su svake dve naspramne stranice obojene istom bojom. Odredi ti najmanji prirodan broj m za koji je moguće u unutrašnjosti ovog mnogougla izabrati tačke B_1, B_2, \dots, B_m , zatim povući i izvesti me usobno nepresecajuće dužine, čiji su krajevi tačke iz skupa

$$\{A_1, A_2, \dots, A_{2n}\} \cup \{B_1, B_2, \dots, B_m\},$$

te svaku od tih dužina obojiti jednom od datih n boja, tako da se na taj način početni mnogougao podeli na konveksne četvorouglove sa osobinom da su u svakom od njih naspramne stranice obojene istom bojom.

Предвиђено време за израду задатака је 270 минута.

Сваки задатак вреди 7 бодова.

Решења задатака детаљно образложити.

**19. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА**

8. април 2026. године

Други дан

4. U ravni je dato $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, tačaka od kojih ni koje tri ni su kolinearne. Maja i Kosta igraju sledeću igru: na početku Maja spaja svake dve od ovih n tačaka dužima i svaku od dužina usmerava ka jednom od njenih dva temena, na koji god ona način eli. Nakon toga, njih dvoje igraju igru koja se sastoji od k uzastopnih rundi. U svakoj od rundi prvo Kosta bira jednu od tačaka koju nikome nije odabrao u ranijem toku igre, nakon čega i sto radi i Maja i tada rundu gubi onaj igrač koji joj tačku je usmerena dužina zmeću dve tačke i zabrane u toj rundi. Majinci je da dužina na početku usmeri tako da, ukoliko ona u nastavku igre igra optimalno, nezavisno od toga kako Kosta bira tačke, on ne može pobediti ni jednu od k rundi igre. Na kolikoznači ti h naqi na Maja može ispuniti svoj cilj?

5. Odredi ti sve funkcije $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ takve da važi $f\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}$, za sve $x, y \in (0, +\infty)$.

6. Neka su k i l nenegativni celobrojevi i neka su r i s prirodni brojevi. Označi mo sa S skup svih parova prirodnih brojeva (a, b) za koje važi

$$a \mid b^2 + kb + 1, \quad b \mid a^2 + al + 1.$$

Dokazati da par (r, s) pripada skupu S ako i samo ako je skup

$$G = \{\text{НЗД}(a - r, b - s) \mid (a, b) \in S\}$$

beskonačan.

Предвиђено време за израду задатака је 270 минута.

Сваки задатак вреди 7 бодова.

Решења задатака детаљно образложити.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - 19. СМО

Први дан

1. (PRVO REX E E) Za svako $r \in \mathbb{F}_{1013}$ neka su o_r i e_r , redom, jedini neparan i jedini paran broj iz skupa $\{1, 2, \dots, 2026\}$ koji su kongruentni sa $r \pmod{1013}$. Tada, za svaka dva $r, s \in \mathbb{F}_{1013}$ važi:

$$o_r o_s \equiv o_{rs}, \quad o_r e_s \equiv e_{rs}, \quad e_r e_s \equiv e_{rs} \pmod{2026}.$$

Konstruišemo permutaciju π skupa $\{1, 2, \dots, 2026\}$ na sledeći način:

$$\pi(o_0) = e_1, \quad \pi(o_x) = o_{-1-x^{-1}}, \text{ za } x \neq 0,$$

$$\pi(e_0) = e_0, \quad \pi(e_1) = o_{-1}, \quad \pi(e_x) = e_{1-x^{-1}}, \text{ za } x \neq 0, 1.$$

Sada računamo ostatke proizvoda $k\pi(k)$:

$$o_0\pi(o_0) = 1013 \cdot 1014 \equiv 0 \equiv e_0 \pmod{2026},$$

a za $x \neq 0$,

$$o_x\pi(o_x) \equiv o_x o_{-1-x^{-1}} \equiv o_{x(-1-x^{-1})} = o_{-x-1} \pmod{2026}.$$

Da li je

$$e_0\pi(e_0) = 2026 \cdot 2026 \equiv 0 \equiv e_0 \pmod{2026},$$

$$e_1\pi(e_1) = 1014 \cdot 2025 \equiv 1012 \equiv e_{-1} \pmod{2026},$$

dok za $x \neq 0, 1$,

$$e_x\pi(e_x) \equiv e_x e_{1-x^{-1}} \equiv e_{x(1-x^{-1})} = e_{x-1} \pmod{2026}.$$

Prema tome, među ostacima brojeva $k\pi(k)$ dobijamo:

- sve parne ostatke e_r , za $r \in \mathbb{F}_{1013}$,
- sve neparne ostatke o_r , osim ostatka $o_{-1} \equiv 2025 \pmod{2026}$.

Dakle, dobijamo tačno 2025 različitih ostataka pri deljenju sa 2026.

Jok treba pokazati da nije moguće dobiti svih 2026 ostataka pri deljenju sa 2026. Pretpostavimo suprotno, tj. da su brojevi

$$\pi(1), 2\pi(2), \dots, 2026\pi(2026)$$

međusobno nekongruentni po modulu 2026. Tada, među ostacima tačno 1013 neparnih ostataka. Kako je proizvod $k\pi(k)$ neparan ako i samo ako su i k i

$\pi(k)$ neparni, sledi da se svih 1013 neparnih brojeva mora preseliti u neparne brojeve. Mora biti $\pi(1013) = 1013$, jer bi smo u suprotnom dobili dva različita neparna broja deliva sa 1013, što je nemoguće. Prema tome, za svaki neparan $k \neq 1013$ brojevi k i $\pi(k)$ su neparni i različiti od 1013, te proizvodi

$$k\pi(k), \quad k \text{ непаран, } k \neq 1013,$$

daju taqno sve neparne ostatke različite od 1013. Međutim, ovo nije moguće. Zapravo, ako označimo sa

$$P = \prod_{\substack{k \text{ непаран} \\ k \neq 1013}} k,$$

otuda, s obzirom da π permutuje neparne brojeve različite od 1013, dobijamo

$$\prod_{\substack{k \text{ непаран} \\ k \neq 1013}} k\pi(k) \equiv P^2 \pmod{1013}.$$

Sa druge strane, brojevi $k\pi(k)$ daju taqno sve neparne ostatke različite od 1013, te je njihov proizvod kongruentan sa P po modulu 1013. Dakle, $P^2 \equiv P \pmod{1013}$, pa, kako je $P \not\equiv 0 \pmod{1013}$, sledi $P \equiv 1 \pmod{1013}$. Ali, $P \equiv 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 1012 = (1012)! \equiv -1 \pmod{1013}$ po Wilsonovoj teoremi, što je kontradikcija. Prema tome, broj različitih ostataka je najviše 2025.

(DRUGO REŠENJE) Dokazamo da za $n = 2p$, gde je p neparan prost broj postoji permutacija τ skupa $\{1, \dots, 2p\}$ tako da brojevi $i\tau(i) \pmod{2p}$ daju taqno $2p - 1$ različitih vrednosti. Za svaki $r \in \mathbb{F}_p$ neka su o_r i e_r jedini neparan, odnosno paran broj iz $\{1, \dots, 2p\}$ kongruentan sa $r \pmod{p}$. Tada važi

$$o_r o_s \equiv o_{rs}, \quad o_r e_s \equiv e_{rs}, \quad e_r e_s \equiv e_{rs} \pmod{2p}.$$

Neka je g primitivan koren po modulu p i $k = \frac{p-1}{2}$. Definišimo permutaciju $\sigma : \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p$ sa

$$\sigma(0) = 0, \quad \sigma(g^i) = g^{i+1} \quad (0 \leq i \leq k-1), \quad \sigma(g^k) = 1, \quad \sigma(g^i) = g^i \quad (k+1 \leq i \leq 2k-1).$$

Tada muliti skup $\{r\sigma(r) : r \in \mathbb{F}_p\}$ sadrži sve elemente skupa \mathbb{F}_p , osim 1, pri čemu se -1 javlja dva puta. Zato postoji jedinstven $a \neq -1$ takav da $a\sigma(a) = -1$. Neka je $u = \sigma(a)$. Sada definišemo τ sa

$$\tau(o_r) = \begin{cases} e_u, & r = a, \\ o_{\sigma(r)}, & r \neq a, \end{cases} \quad \tau(e_r) = \begin{cases} o_u, & -\sigma(r) = u, \\ e_{-\sigma(r)}, & -\sigma(r) \neq u. \end{cases}$$

Ovo je permutacija, jer sledi ke neparni daju sve o_t , osim što je o_u zamenjena sa e_u , a sledi ke parni daju sve e_t , osim što je e_u zamenjena sa o_u . Za $r \neq a$ i imamo $o_r \tau(o_r) \equiv o_{r\sigma(r)}$, dok za $r = a$ važi $o_a \tau(o_a) \equiv e_{au} = e_{-1}$. Dakle, iz

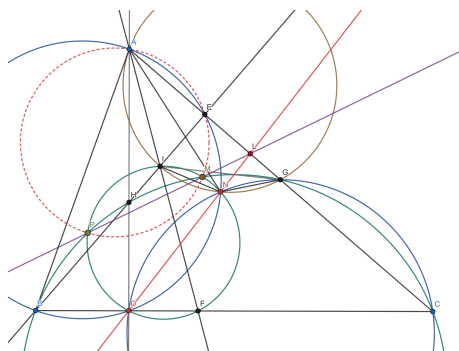
neparnih ostataka dobi jama sve neparne ostatke osim 1 i još e_{-1} . Da li je, za svako $r \in \mathbb{F}_p$ važi

$$e_r \tau(e_r) \equiv e_{-r\sigma(r)} \pmod{2p},$$

odakle zaključujemo da iz parnih ostataka dobi jama sve parne ostatke, osim e_{-1} . Zato, ukupno dobi jama sve parne ostatke i sve neparne ostatke osim 1, tj. tačno $2p - 1$ različitih ostataka modulom $2p$. Dokaz da ni je moguće postojati svih $2p$ ostataka je isti kao i u prvom rešenju.

Аутор задатка: Vukasin Pantelić

2. (PRVO REŠENJE) Označi mo sa G drugi presek kružnice opisane oko trougla BHC sa pravom AC i neka je tačka N drugi presek kružnice opisane oko trougla CGD i DFI . Takođe, neka je tačka L presek prave MP sa pravom AC . Unutrašnje uglove trougla ABC kod temena A , B i C označi mo sa α , β i γ , redom.

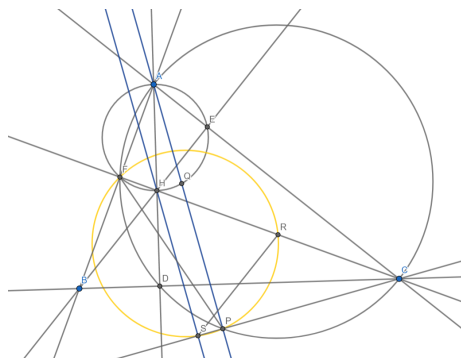


Tada, iz tetivnosti četvorougla $CGND$ i mamo da je $\angle GND = 180^\circ - \gamma$, dok iz tetivnosti četvorougla $DFNI$ i mamo da je $\angle DNI = \angle DFI = 90^\circ - \angle DAF = 90^\circ - (\frac{\alpha}{2} - (90^\circ - \beta)) = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \beta = \frac{\alpha}{2} + \gamma$. Sada i mamo da je $\angle ING = 360^\circ - \angle DNI - \angle GND = 360^\circ - (\frac{\alpha}{2} + \gamma) - (180^\circ - \gamma) = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - \angle GAI$, odakle sledi da je četvorougao $AING$ tetivan.

Stoga, dobijamo da je $\angle INA = \angle IGA = \frac{\alpha}{2}$, jer je tačka G simetrična slika tačke A pri centralnoj simetriji preko tačke E . Ovo znamo zato što je tačka E podnožje visine iz temena B na pravu AC , a iz tetivnosti četvorougla $BHGC$ i mamo da je $\angle BGC = \angle BHC = 180^\circ - \alpha$, pa je $\angle BGA = \angle BAG$, što dokazuje prethodno tvrđenje. Sada i mamo da je $\angle DNA = \angle DNI + \angle INA = \frac{\alpha}{2} + \gamma + \frac{\alpha}{2} = \alpha + \gamma = 180^\circ - \beta = 180^\circ - \angle ABD$, pa je četvorougao $ABDN$ tetivan. Kako znamo da je četvorougao $ABDE$ tetivan, to je i četvorougao $ADNE$ tetivan. Otuda, kako je tačka L presek pravih MP i CG , L je radijalni centar kružnice opisane oko trougla BHC , CGD i DFI , to su tačke D , N i L kolinearne.

Sada, posmatrajući potenciju tačke L u odnosu na kružnicu opisanu oko četvorougla $ADNE$, i mamo da je $LN \cdot LD = LE \cdot LA$, dok posmatrajući

potenciju tačke L u odnosu na kružnicu opisanu oko četvorougla $DFNI$, dobijamo da važi $LN \cdot LD = LM \cdot LP$. Konačno, imamo $LM \cdot LP = LE \cdot LA$, odakle sledi da je četvorougao $AEMP$ tetivni, što je i trebalo dokazati.



(DRUGO REŠENJE) Primeni moć inverziju u A sa poluprečnikom koji je jednak $(AH \cdot AD)^{\frac{1}{2}}$. Tada, problem postaje sledeći: Neka je ABC trougao. Označi moć sa D, E i F podnožja visina iz temena A, B i C , tim redom. Neka je H ortocentar polaznog trougla. Pretpostavi moć da si metrala unutrašnjeg ugla u temenu A seče kružnicu opisanu oko trougla AFE i četvorougla $AFDC$, drugi put, u tačkama Q i P , redom. Dokazati da se tačka C nalazi na radijalnoj osi kružnica PQH i DEF .

Stoga, neka je R središte duži CH i S podnožje normale iz tačke H na CP . Kako je $\angle HSP = 90^\circ = \angle HQP$, sledi da je S na kružnici opisanj oko trougla HQP . Zbog potencije, dovoljno je pokazati da je $RPSF$ cikličan. Imamo da je $\angle RFP = \angle RCS = \angle RSP$, pri čemu prva jednakost sledi, jer je P središte luka FDC , ali i druga, jer je HSC pravougli trougao i R je središte njegove hipotenuze. Time je dokaz završen.

Аутор задатка: Андрија Илић

3. Tvrdi moć da je traženi minimum jednak $m = \binom{n-1}{2}$. Dokazajmo, najpre, goru granicu. Zapravo, dokazajmo sledeće: Svaki centralno simetričan konveksan $2n$ -ougao, $n \geq 3$, čija su naspramne stranice obojene istim bojom može se podeliti na konveksne četvorouglove traženim vrstama tačno $\binom{n-1}{2}$ unutrašnjih tačaka.

Dokazajmo indukcijom po n . Baza indukcije je slučaj $n = 3$. Tada je dati mnogougao centralno simetričan konveksan šestougao $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, pri čemu su naspramne stranice iste boje. Neka je O njegov centar simetrije. Tada su duži OA_1, OA_3 i OA_5 međusobno nepresecajuće u unutrašnjosti mnogougla i dele šestougao na tri konveksna četvorougla: $A_1A_2A_3O, A_3A_4A_5O$ i $A_5A_6A_1O$. Oboji moć duži OA_3 bojom stranice A_1A_2 , duži OA_5 bojom stranice A_3A_4 , a duži OA_1 bojom stranice A_5A_6 . Tada u četvorouglu $A_1A_2A_3O$ naspramne stranice A_1A_2 i OA_3 imaju istu boju, a naspramne

stranice A_2A_3 i OA_1 tako e i maju istu boju, jer su stranice A_2A_3 i A_5A_6 naspramne u poqetnom xestouglu. Analogno va i za preostala dva qetvorouglu. Dakle, tvrdava va i za $n = 3$. Pri tome je upotrebljena taqno jedna unutrašnja taqka, tj. u ovom sluqaju je $m = \binom{3-1}{2} = 1$.

Pretpostavimo sada da je $n \geq 4$ i da tvrde va i za $2n - 2$. Neka je dat centralno simetriqan konveksan $2n$ -tougao $P = A_1A_2 \dots A_{2n}$, primemo u naspramne stranice iste boje. Indeksne posmatramo po modul $2n$, pa je $A_{2n+1} = A_1$. Oznaqimo sa $e_i = \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ vektor i -te stranice. Po centralnoj simetriji va i $\overrightarrow{e_{i+n}} = -e_i$ za svako i , pa posebno va i $e_{2n} = -e_n$. Neka je $v = e_{2n} = \overrightarrow{A_{2n}A_1}$. Za $i = n + 2, n + 3, \dots, 2n - 1$ defini ximo taqku $B_{i-(n+1)}$ sa osobinom $\overrightarrow{A_iB_{i-(n+1)}} = v$, a jox stavimo da je $C_0 = A_n$ i $C_{n-1} = A_1$. Tada za svako $i = n + 1, n + 2, \dots, 2n - 1$ qetvorougao Q_i defini san sa $Q_{n+1} = A_{n+1}A_{n+2}B_1C_0$, $Q_i = A_iA_{i+1}B_{i-n}B_{i-n-1}$, za $i = n + 2, \dots, 2n - 2$, $Q_{2n-1} = A_{2n-1}A_{2n}C_{n-1}B_{n-2}$, jeste paralelogram, jer va i $\overrightarrow{A_iB_{i-(n+1)}} = \overrightarrow{A_{i+1}B_{i+1-(n+1)}} = v$ i $\overrightarrow{B_{i-(n+1)}B_{i+1-(n+1)}} = \overrightarrow{A_iA_{i+1}} = e_i$ u svim sluqajevima u kojima obe taqke postoje, dok se graniqni sluqajevi $i = n + 1$ i $i = 2n - 1$ tumaqe preko $C_0 = A_n$ i $C_{n-1} = A_1$. Dakle, svaki Q_i je konveksan qetvorougao.

Posmatrajmo sada mnogougao $P' = A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_{n-2}$. egove uzastopne stranice i maju vektore $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}, e_{n+2}, \dots, e_{2n-1}$: zaista, stranice A_iA_{i+1} za $1 \leq i \leq n - 1$ i maju vektore e_i , zatim je $\overrightarrow{A_nB_1} = \overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}} = e_{n+1}$, da e je $\overrightarrow{B_{i-(n+1)}B_{i+1-(n+1)}} = e_i$ za $i = n + 2, \dots, 2n - 2$, a najzad je $\overrightarrow{B_{n-2}A_1} = \overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}} = e_{2n-1}$. Prema tome, niz smerova stranica mnogouglu P' dobija se i iz niz smerova stranica mnogouglu P izbacivanjem para naspramnih stranica sa vektorima e_n i $e_{2n} = -e_n$. Kako su smerovi stranica konveksnog mnogouglu ureeni strogo monotono oko grani ce, sledi da je i P' konveksan. S obzirom da se preostali vektori i daje javaju u naspramnim parovima $e_{i+n} = -e_i$, sledi da je i P' centralno simetriqan. Dakle, P' je centralno simetriqan konveksan $(2n - 2)$ -tougao. Pored toga, naspramne stranice mnogouglu P' i maju iste boje. Zaista, svaka stranica mnogouglu P' ili je neka od originalnih stranica A_iA_{i+1} , ili je ena translirana kopija, pa boju mo e naslediti od odgovaraju e stranice mnogouglu P . Kako su u P naspramne stranice iste boje, isto va i u P' .

Sada, obojimo svaki qetvorougao Q_i na slede i naqin: stranice A_iA_{i+1} i odgovaraju a suprotna stranica u Q_i obojimo istom bojom, a preostale dve stranice obojimo bojom stranice $A_{2n}A_1$. Tada, u svakom Q_i naspramne stranice i maju istu boju. Po konstrukciji, mnogougao P' i qetvorouglu $Q_{n+1}, Q_{n+2}, \dots, Q_{2n-1}$ i maju disjunktne unutrašnosti, a i hova unija ima istu granicu kao mnogougao P . Stoga je i hova unija upravo ceo mnogougao P . Dakle, na taj naqin dobijamo podelu mnogouglu P na mnogougao P' i $n - 1$ konveksnih qetvorouglu Q_{n+1}, \dots, Q_{2n-1} . Po induktivnoj pretpostavci, mnogougao P' mo e se dade deliti na tra ene konveksne qetvorouglu e uz taqno $\binom{n-2}{2}$ unutrašnih taqaka. U naxoj konstrukciji nove unutrašnje taqke su upravo B_1, B_2, \dots, B_{n-2} , koji h i ma $n - 2$.

Zato za mnogougao P dobijamo da je ukupan broj unutrašnjih tačaka jednak $\binom{n-2}{2} + (n-2) = \binom{n-1}{2}$. Time je dokazana gornja granica $m \leq \binom{n-1}{2}$.

Sada dokazujemo dobru granicu. Posmatrajmo proizvoljno dopunjeni podel u početnog pravilnog $2n$ -tougla na konveksne četvorouglove tražene vrste. Neka je b broj dobijenih četvorouglova, a m broj unutrašnjih tačaka.

U svakom dobijenom četvorouglu pojavljuju se najviše dve boje, jer su mu naspramne stranice iste boje. Za svaku boju koja se pojavljuje u tom četvorouglu spoji mo središne odgovarajuće para naspramnih stranica. Tako u svakom četvorouglu dobijamo najviše dve pomoćne dužine, pa se u njemu može pojaviti najviše jedno presecaće pomoćnih dužina različitih boja.

Fixirajmo sada jednu boju c . Posmatrajmo sve pomoćne dužine koje odgovaraju boji c . One obrazuju planarni graf G_c : njegovi vrhovi su središne svih stranica boje c koje se javljaju u podeli, a njegove grane su upravo pomenute pomoćne dužine. Svaka središna unutrašnja stranica boje c ima stepen 2, jer ta stranica pripada tačno dvama četvorouglovima i u oba se pojavljuje pomoćna dužina boje c . Sa druge strane, središna granična stranica početnog mnogougla boje c ima stepen 1, jer ta stranica pripada samo jednom četvorouglu. Po uslovu zadatka, na graničnoj početnog mnogougla postoje tačno dve stranice boje c i to naspramne. Dakle, graf G_c ima tačno dva vrha neparnog stepena, oba stepena 1. Otuda sledi da u G_c postoji jedinstvena povezana komponenta koja nije ciklus; ona je prosta poligonalna linija koja spaja središne upravo te dveju naspramnih graničnih stranica. Označimo tu liniju sa Γ_c .

Sada uzmi mo dve različite boje c i d . Krajevi linije Γ_c leže na središnim stranama boje c , a krajevi linije Γ_d na središnim stranama boje d . Na graničnoj početnog $2n$ -tougla ove četiri tačke se javljaju naimenja: između dve naspramne stranice boje c nalazi se tačno po jedna od dve stranice boje d sa svake strane, jer su stranice boje d međusobno naspramne. Stoga, prosta poligonalna linija Γ_c deli mnogougao na dve oblasti, a zbog naimenjog rasporeda krajeva tačke na kojima se završava Γ_d leže u različitim oblastima. Zato linija Γ_d mora preseći liniju Γ_c . Dakle, za svaki par različitih boja odgovarajuće dve linije seku se barem jednom. Sa druge strane, svako presecaće dve takve linije može se dogoditi samo unutar nekog od četvorouglova iz podele, dok se u svakom četvorouglu može pojaviti najviše jedno takvo presecaće. Dakle, ukupan broj četvorouglova b nije manji od broja parova boja, te važi $b \geq \binom{n}{2}$.

Konačno, posmatrajmo planarni graf dobijen od svih stranica četvorouglova u podeli. Neka je V broj njegovih vrhova, a E broj njegovih grana. Tada je $V = 2n + m$, jer su vrhovi upravo temena početnog mnogougla i unutrašnje tačke podele. Dale, kako je svaka od b unutrašnjih oblasti četvorouglova, ukupan broj ivica koje se pojavljuju na granicama svih tih oblasti, računajući ih multiplicitet, jednak je $4b$. Pri tome se

svaka unutrašnja grana broji dvaput, a svaka grana koja stranicama početnog mnogougla jednom. Kako grana koja stranicama ima $2n$, a ukupan broj grana je E , dobijamo

$$4b = 2(E - 2n) + 2n = 2E - 2n,$$

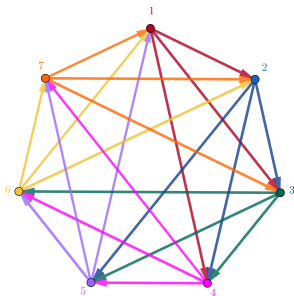
odnosno $E = 2b + n$. Otuda je, koristeći Eulerovu formulu, broj oblaka jednak je $b+1$, dok iz $V - E + (b+1) = 2$ dobijamo $(2n+m) - (2b+n) + (b+1) = 2$, odnosno $b = m + n - 1$. Kombinujući i ovo sa nejednakosti $b \geq \binom{n}{2}$, dobijamo $m = b - (n - 1) \geq \binom{n}{2} - (n - 1) = \binom{n-1}{2}$.

Dakle, analitički rješenje i prethodno, $m = \binom{n-1}{2}$, čime je dokaz završen.

Аутор задатка: Pavle Marti novi

Други дан

4. Traženi broj je $(n-1)!$. Tokom rešenja, posmatramo tačke zajedno sa usmerenim dužima i zmeđima ih kao usmeren graf sa n qvorova. Rešimo da qvor u pobeđuje qvor v ukoliko u grafu postoji grana usmerena od u ka v . Tokom igre, Kosta i Maja efektivno sklađaju qvorove iz grafa, jer se jednom zabrani qvorovi kasnije ne mogu birati.



Prvo pokažimo primer grafa koji Maja može nacrtati kako bi ispunila svoj cilj. Ukoliko qvorove obelježimo brojevima od 1 do $n = 2k + 1$, posmatrajmo graf u kom svaki qvor pobeđuje narednih k qvorova, a gubi od prethodnih k (ciklično, po modulu n). Primer ovog grafa za $n = 7$, odnosno $k = 3$, dat je na slici iznad. Indukcijom ćemo dokazati da ukoliko nacrtava ovaj graf, Maja može ispuniti svoj cilj u nastavku igre. U slučaju $n = 3$, imamo trougao u kom su grane usmerene ciklično, te Maja svakako može pobediti jedinu rundu koja se odigrava. U slučaju generalnog $n = 2k + 1$,

moemo bez uma e a opxtosti, zbog simetrije ovog grafa, pretpostavi ti da je Kosta u prvoj rundi odabrao qvor broj 1. U tom sluqaju, Maja mo e odabrati qvor $k + 2$. Kako je qvor $k + 2$ taqno k qvorova "pre" qvora 1, on ga pobe uje. Tako e, svi preostali qvorovi u grafu ili gube od qvora 1 i pobe uju qvor $k + 2$ (to su $2, \dots, k + 1$), ili pobe uju qvor 1 i gube od $k + 2$ (to su $k + 3, \dots, 2k + 1$), pa nakon bri sa a 1 i $k + 2$ i renumeracije preostalih qvorova dobi jamo isti graf za $k - 1$, na kome Maja pobe uje po induktivnoj pretpostavci.

Oqigledno, ukoliko se qvorovi originalnog grafa koji Maja nacrtala mogu renumerisati tako da novodobijeni graf bude upravo gore opisani graf, ona mo e ispuniti svoj cilj. Dokazamo sada da su to jedini grafovi koji joj ovo omoguavaju.

Prijeti mo prvo da je potreban uslov da bi graf koji Maja nacrtala ispunjavao enicijalno da bude regularan (svaki qvor ima jednak broj qvorova koje pobe uje i qvorova od kojih gubi), te da ostaje regularan nakon svakog enog poteza. Ukoliko graf u nekom trenutku vixe ni je regularan, kako je ukupan broj grana koje izlaze iz svih qvorova $\frac{n(n-1)}{2} = nk$, postoja e qvor v koji gubi od ma e od k qvorova. Tada Kosta ima sledeu porednu strategiju: dok je god to mogu e, bira qvor koji pobe uje v (nakon qega Maja ne sme da bira sam v jer bi izgubila), dok kad to vixe ni je mogu e, bira v , a Maji ostaju samo qvorovi koji gube od v . On ovo mo e da uqini, jer je pre toga morao najvi xe $k - 1$ put da bira qvor koji pobe uje v , pa je ostala bar jedna runda.

Pretpostavimo sada da je Maja nacrtala graf takav da ona mo e ispuniti svoj cilj. Po prethodnom, za svaki (Kostin) qvor v u tom grafu, postoji (Majin) qvor $f(v)$, tako da graf bez $v, f(v)$ ostaje regularan. Konkretno, za svako v postoji $f(v)$ takav da svaki od preostalih $2k - 1$ qvorova ili gubi od v i pobe uje $f(v)$, ili pobe uje v i gubi od $f(v)$ (*). U nastavku dokazujemo neka ključna zapažanja o preslikavanju f . Oznaqimo proizvoljan qvor sa 1 (ostale moemo oznaqiti u nastavku).

$f(v)$ je jedinstveno odreeno, tj. f je dobro defini sano: U suprotnom, neka i u i w zadovoljavaju dati uslov za neko v . Tada po (*), kako u pobe uje v , mora gubiti od w . Ali po simetriji w mora gubiti od u , kontradikcija.

f je injektivno: U suprotnom, $f(u) = f(w)$ za neke $u \neq w$. Ali tada w gubi od $f(u) = f(w)$, pa po (*) mora da pobe uje u . Simetriqno i u pobe uje w , što vodi do kontradikcije.

f je bijektivno: Ovo je sada direktno iz injektivnosti i toga da f preslikava konačan skup qvorova u samog sebe. Konkretno, postoji (najmanje) pozitivno m tako da je $f^m(1) := f(f^{m-1}(1)) = 1$.

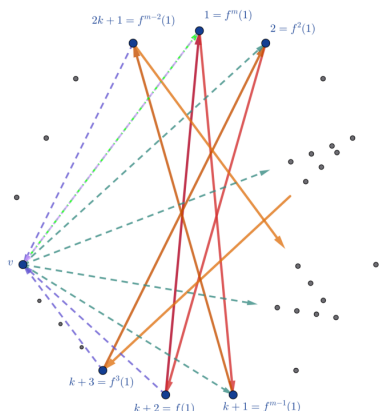
Za sve $0 < t < m$, $f^t(1)$ pobe uje 1 ako i samo ako je t neparno:

Koriste se indukcijom, gde za $t = 1$ sledi iz definicije, a da e iz induktivne pretpostavke i (*) primeno na $v = f^{t-1}(1)$, $f(v) = f^t(1)$ i 1. Konkretno, $f^{m-1}(1)$ gubi od $f^m(1) = 1$, pa m mora biti neparno.

f je ciklus, odnosno $m = n$: U suprotnom, postoji v koje ni je $f^t(1)$ ni

za jedno t . Ukoliko v pobe uje $1 = f(f^{m-1}(1))$, iz (*) sledi da gubi od $f^{m-2}(1)$, odnosno pobe uje $f^{m-3}(1), \dots$. Kako je m neparno, v pobe uje i $f(1)$ uz 1 , xto je u kontradikciji sa (*). Analogno se pokazuje i ako v gubi od 1 .

Konaqno mo emo da oznaqimo preostale qvorove. Neka je $f^{2i}(1)$ oznaqeno sa $1+i$ za $i = 0, 1, \dots, k$ i $f^{2i+1}(1)$ oznaqeno sa $k+2+i$ za $i = 0, 1, \dots, k-1$. Ostaje da poka emo da je ovako numerisan graf zaista graf s poqetka, xta je zbog cikl i qnosti f dovoljno da poka emo da 1 pobe uje $2, 3, \dots, k+1$ i gubi od $k+2, k+3, \dots, 2k+1$, xto sledi direktno iz definicije koja oznaqava a i pretposl ed eg svojstva f .



Pri meti mo da je za fiksiran qvor 1 odgovaraju e oznaqava e preostalih qvorova jedinstveno odre eno, jer je preslikava e f jedinstveno odre eno. Pri tom je qvor 1 odabran proizvoljno me u svih n qvorova u grafu, pa se me u svih $n!$ oznaqava a qvorova brojevima od 1 do n svaki graf nacrtatano n puta, xto znaqi da je ukupan broj grafova koje Maja mo e nacrtati na poqetku kako bi ispunila svojci $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

Аутор задатка: Андрија и ваднови

5. Pokazamo da su jedina rexea funkcije $f(x) = x$ i $f(x) = 2, x > 0$. Posmatrajmo dva sluqaja.

1° Neka je f injektivna funkcija.

Neka su $x > 0$ i $k > 1$. Pri menou sl ova zadatka na parove (x, xk) i $(x, x/k)$ dobijamo da je $f(k + \frac{1}{k}) = \frac{f(x)}{f(xk)} + \frac{f(xk)}{f(x)} = \frac{f(x)}{f(x/k)} + \frac{f(x/k)}{f(x)}$. Definiximo $u = \frac{f(xk)}{f(x)}$ i $v = \frac{f(x/k)}{f(x)}$. Tada je $u + \frac{1}{u} = v + \frac{1}{v}$, te je $(u - v)(1 - \frac{1}{uv}) = 0$. Dakle, ili je $u = v$, ili je $uv = 1$. Prva mogućnost je nemoguća, jer bi iz $u = v$ sledilo $f(xk) = f(x/k)$, odakle, zbog injektivnosti, va i $xk = x/k$, xto nije mogu e za $k > 1$. Zato mora va iti $uv = 1$, tj. $f(xk)f(x/k) = f(x)^2$, za svako $x > 0$ i svako $k > 1$.

Sada, neka su $y, z > 0$. Ako je $y \neq z$, uzmi mo $x = \sqrt{yz}$ i $k = \sqrt{y/z}$ ili $k = \sqrt{z/y}$, tako da je $k > 1$. Tada, iz prethodne relacije, dobijamo da je $f(y)f(z) = f(\sqrt{yz})^2$. Ova jednakost je oqigledno taqna i kada je $y = z$. Dakle, za sve $y, z > 0$ važi $f(y)f(z) = f(\sqrt{yz})^2$. Posebno, za $z = 1$ dobijamo $f(y)f(1) = f(\sqrt{y})^2$, za svako $y > 0$. Stavljajući i ovde $y = x^2$, dobijamo $f(x)^2 = f(1)f(x^2)$, za svako $x > 0$. Tako e, pri menom relacije $f(y)f(z) = f(\sqrt{yz})^2$ na brojeve $y = x^2$ i $z = y^2$ dobijamo da je $f(x^2)f(y^2) = f(xy)^2$. Kombinovanjem ovi h jednakosti sledi $f(1)^2 f(xy)^2 = f(x)^2 f(y)^2$, te zbog pozitivnosti funkcije dobijamo $f(1)f(xy) = f(x)f(y)$, za sve $x, y > 0$.

Da e, iz datog uslova sledi $f\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) = \frac{f(x)^2+f(y)^2}{f(x)f(y)}$. Kako je $f(x)^2 = f(1)f(x^2)$ i $f(x)f(y) = f(1)f(xy)$, to je $f\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) = \frac{f(x^2)+f(y^2)}{f(xy)}$. Mnogem em sa $f(xy)$, te korišćenjem relacije $f(1)f(uv) = f(u)f(v)$, za $u = xy$ i $v = \frac{x^2+y^2}{xy}$, dobijamo $f(1)f(x^2+y^2) = f(x^2) + f(y^2)$. Kako se svaki pozitivan broj može zapisati kao kvadrat nekog pozitivnog broja, zaključujemo da je za sve $u, v > 0$ i spušteno $f(1)f(u+v) = f(u) + f(v)$.

Sada za proizvoljne brojeve $x, y, z > 0$ raqunamo $f(1)^2 f(x+y+z)$ na dva naqina. Sa jedne strane, iz prethodne relacije, dobijamo $f(1)^2 f(x+y+z) = f(1)(f(x+y) + f(z)) = f(x) + f(y) + f(1)f(z)$. Sa druge strane, isto tako dobijamo $f(1)^2 f(x+y+z) = f(1)(f(x) + f(y+z)) = f(1)f(x) + f(y) + f(z)$. Poređenjem, nalazimo da je $(f(1)-1)f(x) = (f(1)-1)f(z)$, za sve $x, z > 0$. Ako bi bilo $f(1) \neq 1$, sledilo bi $f(x) = f(z)$, za sve $x, z > 0$, tj. funkcija f bila bi konstantna, što je nemoguće jer je f i nekativna. Dakle, mora biti $f(1) = 1$. Prema tome, prethodne relacije se svode na $f(xy) = f(x)f(y)$ i $f(u+v) = f(u) + f(v)$, za sve $x, y, u, v > 0$. Dakle, funkcija f je i multiplikativna i aditivna na $(0, \infty)$. Iz aditivnosti i pozitivnosti sledi da je f strogo rastuća (ako je $y > x > 0$, tada je $f(y) - f(x) = f(y-x) > 0$). Za svaki pozitivan ceo broj n i aditivnosti sledi $f(n) = nf(1) = n$, a zatim, za svaki pozitivan racionalan broj $q = \frac{m}{n}$, dobijamo $nf(q) = f(nq) = f(m) = m$, te je $f(q) = q$.

Neka je sada $x > 0$ proizvoljno. Ako su (q_n) i (r_n) nizovi pozitivni h racionalnih brojeva takvi da $q_n \uparrow x$ i $r_n \downarrow x$, $n \rightarrow +\infty$, tada zbog monotoniosti važi $q_n = f(q_n) \leq f(x) \leq f(r_n) = r_n$, za svako n , odakle, prelaskom na graničnu vrednost kad $n \rightarrow +\infty$ dobijamo da je $f(x) = x$, $x > 0$. Dakle, u i nekativnom sluqaju jedino rešenje jeste $f(x) = x$, za svako $x > 0$.

2° Neka f nije i nekativna.

Tada postoje brojevi $a, b > 0$, $a \neq b$, takvi da je $f(a) = f(b)$. Bezuma e a optosti možemo pretpostaviti da je $b > a$. Stavimo da je $k = \frac{b}{a} > 1$. Pri menom uslova zadatka na par (b, a) dobijamo $f(k + \frac{1}{k}) = \frac{f(b)}{f(a)} + \frac{f(a)}{f(b)} = 2$. Sada, za proizvoljno $x > 0$, pri menom uslova na par (kx, x) dobijamo $f(k + \frac{1}{k}) = \frac{f(kx)}{f(x)} + \frac{f(x)}{f(kx)}$. Leva strana je jednaka 2, odakle nalazimo da je $\frac{f(kx)}{f(x)} + \frac{f(x)}{f(kx)} = 2$. Kako za svaki pozitivan broj t važi $t + \frac{1}{t} \geq 2$, sa jednakostu akko je $t = 1$, sledi $\frac{f(kx)}{f(x)} = 1$, tj. $f(kx) = f(x)$, za svako $x > 0$.

Uporedi mo sada usl ov zadatka za parove (x, y) i (kx, y) . Desne strane su jednake, jer je $f(kx) = f(x)$, pa je $f\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{kx}{y} + \frac{y}{kx}\right)$, za sve $x, y > 0$. Ako stavi mo $t = \frac{x}{y}$, posled e postaje $f\left(t + \frac{1}{t}\right) = f\left(kt + \frac{1}{kt}\right)$, za sve $t > 0$. Neka je sada $t > \frac{1}{\sqrt{k}}$. Tada su brojevi $u = t + \frac{1}{t}$ i $v = kt + \frac{1}{kt}$ razli qi ti i zadovo avaju $f(u) = f(v)$. Pri tom je $v > u$, jer je $v - u = (k - 1)\left(t - \frac{1}{kt}\right) > 0$. Pri mena prethodnog argumenta na par (v, u) pokazuje da za broj $\lambda = \frac{v}{u} > 1$ va i $f(\lambda x) = f(x)$, za svako $x > 0$. Da e, i mamo da je $\lambda = \frac{kt + \frac{1}{kt}}{t + \frac{1}{t}} = \frac{k^2 t^2 + 1}{k(t^2 + 1)}$. Funkcija $\phi(t) = \frac{k^2 t^2 + 1}{k(t^2 + 1)}$ je nepreki dna i strogo rastu a na intervalu $\left(\frac{1}{\sqrt{k}}, \infty\right)$, jer je $\phi'(t) = \frac{2t(k^2 - 1)}{k(t^2 + 1)^2} > 0$, a pri tom va i $\phi\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = 1$ i $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = k$. Dakl e, kada t prol azi kroz interval $\left(\frac{1}{\sqrt{k}}, \infty\right)$, broj $\lambda = \phi(t)$ prol azi kroz ceo interval $(1, k)$. Prema tome, za svako $\lambda \in (1, k)$ i svako $x > 0$ va i $f(\lambda x) = f(x)$.

Sada neka je $r > 1$ proizvo no. I zaberimo toli ko vel i ki pri rodan broj n sa osobinom $r^{1/n} < k$. Tada je $r^{1/n} \in (1, k)$, odakl e, za svako $x > 0$, nal azi mo $f(r^{1/n}x) = f(x)$. Pri menom ove jednakosti n puta dobi jamo $f(rx) = f(x)$. Dakl e, za svako $r > 1$ i svako $x > 0$ va i $f(rx) = f(x)$. Zamenom r sa $\frac{1}{r}$ dobi jamo isto i za svako $0 < r < 1$. Zato, za proizvo ne real ne brojeve $x, y > 0$, uzi maju i $r = \frac{y}{x}$, dobi jamo $f(y) = f(x)$, te je f konstantna na $(0, \infty)$.

Stoga, neka je $f(x) = c$, za sve $x > 0$, gde je $c > 0$. Uvrxtava em u zadati usl ov dobi jamo $c = \frac{c}{c} + \frac{c}{c} = 2$. Dakl e, u nei njekti vnom sl uqaju jedi no rexe e jeste $f(x) = 2$, za svako $x > 0$.

Аутор задатка: Ми І ан Гел і

6. Pri meti mo da $\text{HЗД}(a, b) \mid a \mid b^2 + kb + 1$, odakl e sl edi da $\text{HЗД}(a, b) = 1$. Tako e, pri meti mo da $a \mid a^2 + la + b^2 + kb + 1$ i $b \mid b^2 + kb + a^2 + la + 1$, odakl e sl edi da $ab \mid a^2 + b^2 + la + kb + 1$, odnosno postoji pri rodan broj M takav da je

$$a^2 + b^2 + la + kb + 1 - Mab = 0. \quad (1)$$

Ako $d = \text{HЗД}(a - r, b - s)$, sl edi da $a \equiv r, b \equiv s \pmod{d}$, odnosno $r^2 + s^2 + lr + ks + 1 - Mrs \equiv 0 \pmod{d}$.

Doka i mo da ako va i $(r, s) \notin S$, onda je G konaqn. Kako $(r, s) \notin G$, znamo da za svako $M \in \mathbb{N}$ va i $r^2 + s^2 + lr + ks + 1 - Mrs \neq 0$ i da za odre eno M postoji samo konaqno mnogo d takvi h da $d \mid r^2 + s^2 + lr + ks + 1 - Mrs$. Ukol i ko doka emo da za odre eno k, l postoji i konaqno mnogo vrednosti M koje zadovo avaju ovaj usl ov, dokaza emo cel okupno tvr e e. Zai sta, uzmi mo rexe e (x, y) sa mi ni mal ni m $x + y$. Bez uma e a opxtosti , pretpostavi mo da je $x \geq y$.

Posmatraju i (1) kao kvadratnu jednaqi nu po x , vi di mo da je za $x' = My - l - x = \frac{y^2 + ky + 1}{x}$, (x', y) ponovo rexe e i ste jednaqi ne, jer $x' \in \mathbb{N}$. I z mi ni mal nosti sl edi $x' \geq x$. Znamo da va i $x' = \frac{y^2 + ky + 1}{x} \leq \frac{y^2 + ky + 1}{y} \leq y + k + 1$,

iz teorema proizilazi da $My - l = x + x' \leq 2x' \leq 2y + 2k + 2$, te je $M \leq \frac{2y+2k+l+2}{y} \leq 4 + 2k + l$, odakle sledi da ih zai sta ima konaqno mnogo.

Doka i mo da ako $(r, s) \in S$, onda za svako $N \in \mathbb{N}$ postoji par pri rodni h brojeva $(a, b) \in S$ tako da $N \mid \text{HЗД}(a - r, b - s)$, odakle se mo e zak uqi ti da e va i ti da je skup G beskonaqan. Stoga, bez uma e a opxtosti, pretpostavi mo da je $r \leq s$. Defi ni xi mo ni z parova (a_n, b_n) poqetni m uslovom $(a_0, b_0) = (r, s)$ i rekurentnom rel acijom

$$a_{n+1} = Mb_n - l - a_n = \frac{b_n^2 + kb_n + 1}{a_n}, \quad b_{n+1} = Ma_{n+1} - k - b_n = \frac{a_{n+1}^2 + la_{n+1} + 1}{b_n}.$$

Po Vi jetovi m formul ama, ako (a_n, b_n) zadovoljava jednaqnu (1), u e zadovoljavati i par (a_{n+1}, b_n) , pa samim tim i (a_{n+1}, b_{n+1}) , odakle sledi da svaki par (a_n, b_n) pripada skupu S . Kori ste i uslov $a_n \leq b_n$ dobijamo $a_{n+1} = \frac{b_n^2 + kb_n + 1}{a_n} \geq \frac{b_n^2 + kb_n + 1}{b_n} > b_n$. Zatim, kako je $a_{n+1} > b_n$, sledi $b_{n+1} = \frac{a_{n+1}^2 + la_{n+1} + 1}{b_n} > \frac{a_{n+1}^2}{b_n} > a_{n+1}$, tj. $a_n < b_n < a_{n+1} < b_{n+1}$, za svako $n \geq 1$, xto fi nal no pokazuje da je ovo beskonaqni ni z me usobno razli qi ti h parova skupa S .

Fi ksi rajmo proizvo an poziti van ceo broj N . Kako ostataka parova (a_n, b_n) pri de e u sa N ima najvi xe N^2 , po Di ri hl eovom pri nci pu me u prvi h $N^2 + 1$ parova moraju postojati i ndeksi $i < j$ takvi da

$$(a_j, b_j) \equiv (a_i, b_i) \pmod{N}.$$

Pri me ujemo da iz rekurentni h rel acija mo emo di rektno i zrazi ti prethodne ql anove ni za:

$$b_{n-1} = Ma_n - k - b_n, \quad a_{n-1} = Mb_{n-1} - l - a_n = M(Ma_n - k - b_n) - l - a_n.$$

Dakle, ako za bi lo koja dva i ndeksa va i kongruencija modul o N , i sta kongruencija mora va i ti i za i hove prethodne ke. Ponav aju i ovo tvr e e i puta, dobijamo

$$(r, s) = (a_0, b_0) \equiv (a_{j-i}, b_{j-i}) \pmod{N},$$

odnosno $N \mid a_{j-i} - r, N \mid b_{j-i} - s$, odakle proizilazi $N \mid \text{HЗД}(a_{j-i} - r, b_{j-i} - s)$.

Аутор задатка: Stevan Radi vojevi

17. Румунски мастер из математике

Дан 1: 25. фебруар 2026. - Букурешт, Румунија

Јези к: Српски

Задатак 1. Нeka је n природан број. Даница на табли црта trouгоа поврхине 1. Затим, она изводи n poteза, редом. У сваком poteзу бира један ве нацртани trouгоа Δ који у својој unутраx ости нема означених таqака, означи таqку P у еговој unутраx ости и повлачи дужи које спajају таqку P са свакиm теменом trouгла Δ , qиме добија три маа trouгла.

Након извршених n poteза, Вукaхин бира три разлиqита trouгла Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 који у својој unутраx ости немају означених таqака, тако да Δ_2 има једну заједниqку страницу са Δ_1 , а другу са Δ_3 . У зависности од n одреди ти највећу могућу константу c такву да Вукaхин може да направи poteз такав да збир површина trouглова Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 буде најмање c , без обзира на poteзе које је извела Даница.

Задатак 2. Нeka је $p \geq 11$ прост број. Претпостави мо да ако су a и b цели бројеви такви да важи $1 \leq a < b \leq p - 3$, онда број $b! - a!$ није делив са p . Докazати да је број $p - 5$ делив са 8.

Задатак 3. Нeka је \mathcal{S} коначан подскуп скупа \mathbb{R}^3 . Докazати да постоје три полинома $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$, са реалним коефицијентима, таква да уређена тројка реалних бројева (a, b, c) припада скупу \mathcal{S} ако и само ако си stem једнаqи на

$$P(x, y, z) = a,$$

$$Q(x, y, z) = b,$$

$$R(x, y, z) = c$$

нema рехеа (по x , y и z) у скупу \mathbb{R}^3 .

Сваки задатак вреди 7 поена.
Време за израду задатака: $4\frac{1}{2}$ qасова.

17. Румунски мастер из математике

Дан 2: 26. фебруар 2026. - Букурешт, Румунија

Јези к: Српски

Задатак 4. За сваки природан број m нека $\varphi(m)$ означава број природних бројева мањих или једнаких од m који су узajамно прости са m . Дефинишимо $\varphi_0(m) = m$ и

$$\varphi_k(m) = \varphi(\varphi_{k-1}(m)),$$

за сваки природан број k . Доказати да за сваки природан број $n \geq 3$ проишод

$$\varphi_0(2^n - 3) \cdot \varphi_1(2^n - 3) \cdot \varphi_2(2^n - 3) \cdot \dots \cdot \varphi_n(2^n - 3)$$

има највише n различитих простих делилаца.

Задатак 5. Нека је O средиште описане крунице trouгла ABC , за који важи $AB < AC$, и нека је четворougao $XYZT$ паралелограм unutar trouгла ABC такав да је

$$\sphericalangle AXB = \sphericalangle AZC, \quad \sphericalangle AZB = \sphericalangle AXC,$$

$$\sphericalangle AYB = \sphericalangle ATC, \quad \sphericalangle ATB = \sphericalangle AYC.$$

Доказати да се дијagonале XZ и YT паралелограма $XYZT$ секу у тачки која лежи на описаној круници trouгла BOC .

Задатак 6. Нека је $k > 1$ природан број. Означи мо са S skup свих $(k+1)$ -торки природних бројева $X = (x_1, \dots, x_{k+1})$ таквих да важи $1 \leq x_1 < \dots < x_{k+1} \leq k^2 + 1$. Нека је σ пермутација бројева $1, 2, \dots, k^2 + 1$. За елемент $X \in S$ кажемо да је σ -лепа ако је низ $\sigma(x_1), \sigma(x_2), \dots, \sigma(x_{k+1})$ монотон. Нека је $X = (x_1, \dots, x_{k+1}) \in S$. Доказати да важи

$$\min_{1 \leq i \leq k} \left\lfloor \frac{x_i}{i} \right\rfloor + \min_{2 \leq i \leq k+1} \left\lfloor \frac{k^2 + 2 - x_i}{k + 2 - i} \right\rfloor \geq k + 1$$

ако и само ако постоји пермутација σ за коју је X јединствена σ -лепа $(k+1)$ -торка у скупу S .

Сваки задатак вреди 7 поена.
Време за израду задатака: $4\frac{1}{2}$ часова.

САДРЖАЈ

Predgovor	1
Opšti nsko takmičenje	4
Okružno takmičenje	9
Državno takmičenje, A kategorija	14
Državno takmičenje, B kategorija	17
Rешења zadataka opštinškog takmičenja	21
Rешења zadataka okružnog takmičenja	44
Rешења zadataka državnog takmičenja, A kategorija	71
Rешења zadataka državnog takmičenja, B kategorija	86
19. Srpska matematička olimpijada	107
Rешења zadataka sa 19. SMO	109
17. RMM - Bukurext, Rumunija	121

* * * * *

Urednik: doc. dr Mićan Knežević, Matematički fakultet, Beograd

* * * * *

