ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА

СРБИЈЕ

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА СРЕДЊОШКОЛАЦА ШГ: 2025/2026.

Универзитет у Београду, Математички факултет
- април 2026. -

Организацију 67. Државног такмичења из математике за ученике средњих школа у Републици Србији – Б категорија, су помогли:

- Министарство просвете Републике Србије
- Друштво математичара Србије (ДМС)
- Универзитет у Београду, Математички факултет

Организациони одбор Државног такмичења:

- доц. др Драган Ђокић, Математички факултет, Београд
- Вељко Ћировић, Друштво математичара Србије, потпредседник ДМС
- Радослав Божић, Друштво математичара Србије, члан ИО ДМС
- Данијела Живојиновић, Универзитет у Београду, Математички факултет
- Огњен Тешић, Универзитет у Београду, Математички факултет
- доц. др Миљан Кнежевић, Математички факултет, Београд

Почасни одбор Државног такмичења:

- проф. др Зоран Каделбург, Универзитет у Београду, Математички факултет, професор емеритус
- проф. др Драгољуб Кечкић, Универзитет у Београду, Математички факултет - в.д. декана Факултета
- проф. др Мирослав Марић, Универзитет у Београду, Математички факултет - председник ДМС

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
- МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ -

Београд је главни град Републике Србије и њено највеће научно, образовно и културно средиште. Као универзитецки центар са дугом традицијом, он окупља бројне значајне установе које имају важну улогу у развоју науке, образовања и друштва у целини. Међу њима посебно место припада Универзитету у Београду, најстаријој и најугледнијој високошколској установи у нашој земљи.

У оквиру Универзитета у Београду истакнуто место заузима Математички факултет, установа чији корени сежу до 1873. године, када је основана прва катедра за математику на тадашњој Великој школи. Током дугог историјског развоја, ова традиција је расла и јачала, а Математички факултет је 1995. године постао самостална високошколска установа. Данас он представља један од најзначајнијих центара за проучавање и развој математике, информатике, астрономије и астрофизике у Србији.

На Факултету данас студира око 2400 активних студената на основним, мастер и докторским студијама, док наставу и научноистраживачки рад изводи преко 130 наставника, сарадника и асистената. Поред стицања темељних знања, студенти развијају прецизност у мишљењу, логичко расуђивање и способност решавања сложених проблема, што их чини веома успешним у различитим професијама. Бивши студенти Математичког факултета данас раде у школама, на универзитетима, у научним установама, ИТ сектору и бројним компанијама у земљи и иностранству.

Посебан углед Факултета потврђују и значајна научна достигнућа његових наставника и истраживача. Из његове академске средине потекло је и десет чланова Српске академије наука и уметности - САНУ, што сведочи о високом нивоу научног рада који се на Факултету негује деценијама. Истовремено, Факултет остаје окренут савременим токовима, унапређивању наставе, развоју међународне сарадње и повезивању са привредом.

Захваљујући споју богате традиције и савременог приступа образовању и науци, Математички факултет Универзитета у Београду данас је препознат као једна од водећих институција у области математичких наука у Србији и ширем региону, а његова диплома ужива углед и признање и у земљи и у иностранству.

МАТФ
Универзитет у Београду
Математички факултет

У Београду, 26. априла 2026. године

*

* * *

* * * * *

РЕПУБЛИЧКА КОМИСИЈА

за такмичења из математике ученика средњих школа

- школска година 2025/2026. -

1. Драган Аздејковић, Економски факултет, Београд
2. Јован Аризановић, Математички факултет, Београд
3. Владимир Балтић, ВИШЕР, Београд
4. Војин Бојић, Математички факултет, Београд
5. Теодор вон Бург, Математичка гимназија, Београд
6. Александар Вишњић, Математички факултет, Београд
7. Немања Вучићевић, ПМФ, Крагујевац
8. Милан Гелић, Математички факултет, Београд
9. Страхиња Гвоздић, ЕТХ - Цирих, Швајцарска
10. Вукашин Ђиновић, ПМФ, Нови Сад
11. Андрија Живадиновић, Универзитет у Кембрицу, Велика Британија
12. Даница Зечевић, Математичка гимназија, Београд
13. Александар Јовић, Математички факултет, Београд
14. Енес Качапор, ДУНП, Нови Пазар
15. Милутин Којић, Гимназија „Урош Предић”, Панчево
16. Миљан Кнежевић, Математички факултет, Београд - председник
17. Петар Марковић, ПМФ, Нови Сад
18. Павле Мартиновић, Математички факултет, Београд
19. Милош Милићев, Математички факултет, Београд
20. Александра Милосављевић, ПМФ, Крагујевац
21. Милош Милосављевић, Гимназија „Светозар Марковић”, Ниш
22. Данка Мириловић, ЕТШ „Никола Тесла”, Панчево
23. Вукашин Пантелић, Математички факултет, Београд
24. Невена Петровић, ПМФ, Крагујевац
25. Иван Пешић, Математичка гимназија, Београд
26. Стеван Радивојевић, Математички факултет, Београд
27. Марек Светлик, Математички факултет, Београд
28. Ђорђе Стакић, Економски факултет, Београд
29. Борис Станковић, Математички факултет, Београд
30. Милош Стојаковић, ПМФ, Нови Сад
31. Иља Узелац Бујишић, Математички институт - САНУ, Београд
32. Огњен Тешић, Математички факултет, Београд
33. Урош Цоловић, Универзитет у Оксфорду, Велика Британија
34. Владимир Шарић, Математичка гимназија, Београд

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, 31. 01. 2026.

Први разред – А категорија

1. Нека су a, b, c, d и e цели бројеви за које важи $a \neq b \neq c \neq d \neq e \neq a$. Одредити најмању могућу вредност израза $I = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$.

2. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ различити бројеви из скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је

$$(a_1 - 1) + (a_2 - 2)^2 + \ldots + (a_n - n)^n$$

увек паран број.

3. Две кружнице k_1 и k_2, које се секу у две различите тачке, имају заједничку тетиву AB. Нека је тачка P изабрана на кружници k_1 и нека се налази у спољашности кружнице k_2. Праве PA и PB секу по други пут кружницу k_2, редом, у тачкама X и Y. Показати да је, без обзира на избор тачке P, дужина дужи XY константна.

4. Наћи све природне бројеве, који су степени броја 3 и који се у бази са основом 12 записују само уз помоћ цифара 6 и 9.

5. Бројеви $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ и 8 су подељени у три дисјунктна и непразна скупа. Нека су P_1, P_2 и P_3 производи бројева у првом, другом и трећем скупу, редом, и нека је P највећи од та три броја. Одредити најмању могућу вредност броја P.

Други разред – А категорија

1. Дат је број $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[4]{2}$.
(а) Да ли је број α рационалан?
(б) Доказати да постоји неконстантан полином $P(x)$, са целим коефицијентима, такав да је $P(\alpha) = 0$.

2. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n за које је

$$\sin(n^\circ) = \sin(\sqrt{n}^{\,\circ}).$$

3. На шаховском турниру играју n играча, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Сваки такмичар игра са сваким такмичарем на турниру тачно по један пут. За сваку партију

сваки такмичар добија 0 поена за сваки пораз, 0.5 поена за сваки реми и 1 поен за сваку победу. Одредити највећи могући број нерешених партија, тако да сваки такмичар има цео број поена.

4. Дат је троугао ABC чији је центар уписане кружнице тачка I. Та кружница додирује праве AB и AC у тачкама E и F, редом. Права EF сече праву BC у тачки H. Кружнице k_1 и k_2 пролазе кроз тачку H и додирују поменуту уписану кружницу у тачкама E и F, редом. Ако је O други пресек кружница k_1 и k_2, доказати да је $\angle HOI = 90^\circ$.

5. На табли је написан број 2. Након сваког минута са табле се брише број x, који је у том тренутку написан на табли, и записује тачно један од бројева $x+7$, x^{10} или $x+1001$. Да ли је могуће да у неком тренутку на табли буде написан број:
(а) $2024^{2024}+2025$?
(б) 2025?

Трећи разред – А категорија

1. Нека је A квадратна матрица, са целим бројевима, димензија 2023×2023. Доказати да је детерминанта матрице $A + 2024 \cdot A^T$ дељива са 2025, где је са A^T означена транспонована матрица матрице A.

2. Одредити све комплексне бројеве z, $z \neq 0$, такве да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\mid z^n + \frac{1}{z^n} \mid = \mid z + \frac{1}{z} \mid .$$

3. Решити једначину $10^x + 2^y = 5202^z$ у скупу природних бројева.

4. Дат је троугао ABC и произвољна тачка D на његовој описаној кружници, различита од темена тог троугла. Са M, N и P означимо, редом, средишта дужи AB, BC и CA, а са E означимо средиште дужи CD. Уколико је тачка F таква да је четвороугао $MDEF$ паралелограм, доказати да је четвороугао $MNPF$ тетиван.

5. Нека је дато k, $k \in \mathbb{N}$, не нужно различитих природних бројева $a_1, a_2, ..., a_k$, који су већи од 1. Са n означимо производ $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$. За свако $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ партиционишимо скуп $\{1, 2, ..., n\}$ на a_i скупова једнаких величина (сви скупови који учествују у партиционисању су међусобно дисјунктни и сваки има по $\frac{n}{a_i}$ елемената). Доказати да је могуће извршити партиционисања тако да, како год одабрали по тачно један скуп из сваког

од поменутих k партиционисања, постоји тачно један елемент који се налази у свим одабраним скуповима.

Четврти разред – А категорија

1. На случајан начин се бирају три различита темена дате коцке. Колика је вероватноћа да изабрана темена представљају уједно и темена правоуглог троугла?

2. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви такви да важи $a + b + c = 1$. Наћи највећу могућу вредност израза

$$S(a, b, c) = a \log(1 + b) + b \log(1 + c) + c \log(1 + a).$$

3. Решити једначину $n! + n = n^m$ у скупу природних бројева.

4. Дат је троугао ABC са центром описане кружнице у тачки O. Тачка D, која припада правој BC, је таква да су тачке A, O и D колинеарне, а различите тачке E и F су одабране на правој BC тако да је $DE = DA = DF$. Ако је тачка G други пресек кружница описаних око троуглова ABE и ACF, а тачка H други пресек кружница описаних око троуглова ABF и ACE, доказати да је $GH \perp BC$.

5. Нека је $n \geqslant 2$ природан број. На кружници се налази n различитих тачака. Изломљена линија је *добра* уколико се састоји од $n - 1$ дужи и садржи сваку од n тачака на кружници, а не пресеца саму себе. У зависности од n, одредити број добрих изломљених линија.

Први разред – Б категорија

1. Нека су a, b и c цели бројеви за које важи $a \neq b \neq c \neq a$. Одредити најмању могућу вредност израза $I = a^2 + b^2 + c^2$.

2. За функцију f дефинишимо $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$, за свако $n \in \mathbb{N}$, при чему је $f^1(x) = f(x)$. Ако је $f(x) = -\dfrac{4}{x+2}$, $x \neq -2$, одредити $f^{2025}(2025)$.

3. Да ли постоји цифра $a \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ тако да је број $\overline{2a0a2a5}$ барем други степен неког природног броја?

4. Доказати да права дели дати правоугаоник на два дела једнаких површина ако и само ако пролази кроз пресек дијагонала тог правоугаоника.

5. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_{2025}$ различити бројеви из скупа $\{1, 2, \ldots, 2025\}$. Доказати да је

$$(a_1 - 1)^2 + (a_2 - 2)^2 + \ldots + (a_{2025} - 2025)^2$$

увек паран број.

Други разред – Б категорија

1. Одредити све вредности реалног параметра a за које једначина $(a-1)x^2 + ax + 2 = 0$ има оба решења у интервалу (1,2).

2. У скупу комплексних бројева решити једначину

$$z^3 + |z|^2 + \operatorname{Re} z = 0.$$

3. Познато је да је $n! = 2432902008176640000$, за неко $n \in \mathbb{N}$. Одредити n.

4. Две кружнице k_1 и k_2, које се секу у две различите тачке, имају заједничку тетиву AB. Нека је тачка P изабрана на кружници k_1 и нека се налази у спољашности кружнице k_2. Праве PA и PB секу кружницу k_2, редом, у тачкама X и Y. Ако је $AB = 6$, $PA = 5$, $PB = 7$ и $AX = 16$, одредити дужину дужи XY.

5. Да ли се бројеви $1, 2, 3, \ldots, 9$ могу распоредити на кружници тако да међу збировима свака два суседна броја нема дељивих ни са 3, ни са 5, ни са 7?

Трећи разред – Б категорија

1. Одредити минималну вредност функције f, где је

$$f(x) = (3\sin x - 4\cos x - 10)(3\sin x + 4\cos x - 10),\ x \in \mathbb{R}.$$

2. Решити систем једначина

$$\begin{array}{ccccc} x^{\ln y} & + & y^{\ln x} & = & 2 \\ x^{\ln x} & + & y^{\ln y} & = & e+1, \end{array}$$

при чему је $x > 0$ и $y > 0$ $(\ln a = \log_e a,\ a > 0)$.

3. Наћи све просте бројеве p, q и r такве да важи $p^2 + q^3 = r^4$.

4. Дат је правоугли троугао ABC са правим углом код темена C. Нека су $ABPQ$, $BCRS$ и $CATU$ квадрати конструисани над страницама датог троугла са његове спољашње стране. Ако је $PS = 58$, а $QT = 59$, израчунати дужину дужи AB.

5. На нека поља табле величине 88×88 постављени су жетони. Жетон се може уклонити са табле ако је најмање половина поља у његовој врсти или његовој колони празна. Колики је минималан (позитиван) број жетона потребан да буде на табли, тако да ниједан жетон не може бити уклоњен са табле?

Четврти разред – Б категорија

1. Одредити једначину праве која садржи дату тачку $A\,(2,1)$, која сече обе координатне осе са позитивне стране и са њима гради троугао најмање могуће површине.

2. Представити скупове A и B у комплексној равни, при чему је

$$A = \{z \mid z - \overline{z} + i = 0\} \text{ и } B = \{z \mid \mathrm{Im}(\frac{1}{z-1}) = 1\}.$$

Одредити, затим, сва решења система једначина $z - \overline{z} + i = 0$ и $\mathrm{Im}(\dfrac{1}{z-1}) = 1$.

3. У скупу природних бројева решити једначину $n! + n = n^n$.

4. У разностраничном троуглу ABC симетрала унутрашњег угла код темена A сече страницу BC у тачки D. Ако симетрала дужи AD сече праву BC у тачки E, доказати да је права AE уједно и тангента на описану кружницу око троугла ABC.

5. На шаховском турниру играју n играча, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Сваки такмичар игра са сваким такмичарем на турниру тачно по један пут. За сваку партију сваки такмичар добија 0 поена за сваки пораз, 0.5 поена за сваки реми и 1 поен за сваку победу. Одредити највећи могући број нерешених партија, тако да сваки такмичар има цео број поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, 28. 02. 2026.

Први разред – А категорија

1. Дата је релација $\varrho = \{(a,b) \in A \times A : (a^2 - b^2)(ab - 1) = 0\}$ на скупу A, где је $A = \{0, 1, -1, 2, \frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}\}$.

(а) Да ли је релација ϱ рефлексивна, симетрична, антисиметрична или транзитивна?

(б) Испитати да ли је ϱ релација еквиваленције. У случају да није, одредити барем један скуп $\varrho_1 \subset A \times A$ такав да је релација $\varrho \cup \varrho_1$ релација еквиваленције.

2. Дат је троугао ΔABC и тачка X у његовој равни. Тачке A,B и C су пресликане централном симетријом у односу на тачку X у тачке A', B' и C', редом. Нека су M, N и P средишта дужи AB', BC' и CA', редом. Доказати да је тачка X тежиште троугла ΔMNP.

3. На табли је записан број 2025. Ана и Бојан играју следећу игру, наизменично вукући потезе: Потез се састоји од брисања написаног броја и замењивања истог са разликом тог броја и неке његове цифре која није нула (играч сам бира цифру). Победник је онај који напише 0 на табли. Ако Ана игра прва, одредити који играч има победничку стратегију.

4. Перица је за сваки природан број на табли написао остатак при дељењу тог броја са збиром својих цифара у декадном запису. Да ли је на овај начин Перица на табли написао сваки природан број?

5. Одредити све парове $(a,b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, где је $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, за које важи

$$1 + 3^a + 2025^b = 2027^b.$$

Други разред – А категорија

1. Нека су x, y и z позитивни реални бројеви такви да је $xy + yz + zx = 3$. Доказати неједнакост:

$$\frac{2^{x^2+yz}}{zx+xy} + \frac{2^{y^2+zx}}{xy+yz} + \frac{2^{z^2+xy}}{yz+zx} \geqslant 6.$$

Када важи знак једнакости?

2. Дат је тетиван четвороугао $ABCD$ са угловима $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$. Тачке E и F су средишта страница AB и CD, редом. Нека постоји тачка G на дужи EF таква да је $\frac{EG}{GF} = \frac{AB}{CD}$, као и $AG = CG$. Одредити величину $\angle AGC$.

3. Нека је n природан број. Одредити најмање k са следећим својством: Из произвољног низа $a_1, ..., a_n$, где $a_i \in \{0, 1\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, је могуће, избацивањем највише k чланова, добити низ којем је збир чланова на парним позицијама једнак збиру чланова на непарним позицијама.

4. Нека је $A = \{1, 2, \ldots, 2025\}$ дати скуп и $f : A \to A$ дата функција. Дефинишимо $f^0(x) = x$ и $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$, за $k \in \mathbb{N}$, $x \in A$. Доказати једнакост скупова $\{f^{2024}(1), f^{2024}(2), \ldots, f^{2024}(2025)\} = \{f^{2025}(1), f^{2025}(2), \ldots, f^{2025}(2025)\}$.

5. Доказати да 20-оцифрени природан број, који почиње са 11 јединица слева, не може бити квадрат неког природног броја.

Трећи разред – А категорија

1. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи $f(x(x+y)) = x^2 + yf(x)$.

2. Дат је тетиван четвороугао $ABCD$. Дијагонале AC и BD се секу у тачки E, а праве AD и BC се секу у тачки F. Нека је G средиште лука CD кружнице описане око четвороугла $ABCD$, који не садржи тачке A и B. Ако су тачке E, F и G колинеарне, доказати да је четвороугао $ABCD$ једнакокраки трапез.

3. Нека је (a_n) низ реалних бројева за који је $a_0 = 0$ и

$$a_{n+1} = 45a_n + \sqrt{2024a_n^2 + 1}, \ \ n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Доказати да је сваки члан низа (a_n) цео број и да 90 дели a_{2n}, за све природне бројеве n.

4. Нека је $p > 2$ прост број и $(a_1, a_2, ..., a_{p-1})$ пермутација бројева $\{1, 2, ..., p-1\}$. Колико највише од бројева $a_1a_2, a_2a_3, ..., a_{p-2}a_{p-1}, a_{p-1}a_1$ може да даје исти остатак при дељењу са p?

5. У мору Енморе, налази се n острва, при чему се на i-том острву налази град са именом i-град. Сви ови градови заједно чине државу Ентију. Превозник Ентранспорт организује поласке из i-града до j-града ако и само ако важи $(i + j, n) > 1$ (где са (x, y) означавамо највећи заједнички делилац бројева x и y). Одредити све природне бројеве n за које важи да се из било ког града може доћи у било који други град.

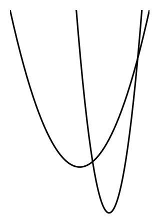
Четврти разред – А категорија

1. Постоје ли различити $m, n \in \mathbb{N}$, при чему је:
(а) $m^{\tau(m)} = n^{\tau(n)}$?
(б) $m^{\tau(n)} = n^{\tau(m)}$?
Са $\tau(a)$ смо означили укупан број позитивних делилаца природног броја a.

2. (а) Доказати да за сваки полином $P(x)$, са реалним коефицијентима, постоји одговарајући полином $Q(x)$ такав да је $P(x) = Q(x+1) - Q(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
(б) Доказати да је за свака два полинома $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ који одговарају полиному $P(x)$, тј. за које је испуњено $P(x) = Q_1(x+1) - Q_1(x) = Q_2(x+1) - Q_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$, важи да је полином $Q_2(x) - Q_1(x)$ константан.

3. Дат је троугао ABC. Његова уписана кружница, са центром у тачки I, додирује страницу AB у тачки D. Нека је F тачка на висини из темена A, таква да је $AF = AD$. Доказати да се права кроз I паралелна са правом BC и права DF секу на уписаној кружници троугла ABC.

4. Перица је одабрао реалне бројеве a, b и c и скицирао графике функција $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, које су задате са $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = cx^2 + bx + a$, за свако $x \in \mathbb{R}$. Након тога избрисао је координатне осе (видети слику) равни у којој су ти графици скицирани.



Конструисати координатне осе.

5. Никола и Марко играју игру са гомилом од N новчића. У i-том потезу, играч може да узме највише i новчића (мора бар 1). Побеђује онај који узме последњи новчић. Ако Никола игра први, одредити ко има победничку стратегију у зависности од N.

Први разред – Б категорија

1. Дата је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, која је дефинисана са

$$f(x) = \begin{cases} |x+1|, & x \leqslant -1, \\ -2x + a, & x > -1. \end{cases}$$

(а) Да ли постоји реалан број a такав да је f бијекција?

(б) Ако постоји такво a, одредити f^{-1}.

2. Релација ρ, на скупу природних бројева $\mathbb{N}$, дефинисана је са: $x \ \rho \ y \iff x + y \in P$, где смо са P обележили скуп свих простих бројева. Доказати да не постоји 2027 различитих природних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_{2026}, a_{2027}$ таквих да важи $a_1 \ \rho \ a_2 \ \rho \ a_3 \ \rho \ \ldots \ \rho \ a_{2026} \ \rho \ a_{2027} \ \rho \ a_1$.

3. Дат је троугао ABC. Нека су тачке D и E средишта страница AB и AC, редом, а h_a висина из темена на A на праву BC. Означимо са F пресек описане кружнице троугла ADE са висином h_a, а са H пресек праве која пролази кроз тачке D и F са правом BC. Доказати да тачке A, F, H и C леже на једној кружници.

4. Наћи максималан број елемената скупа $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ које можемо изабрати тако да међу изабранима не постоје нека два елемента, рецимо a и b, тако да је НЗД$(a, b) = 1$.

5. Перица је добио бесконачне количине картона на којима пише број 20 и бесконачне количине картона на којима пише број 25. Спајањем ових картона на произвољан начин, он може добити различите природне бројеве, нпр. 25, 2025, 202520 итд. Може ли Перица спајањем коначно много картона добити број који је куб неког природног броја?

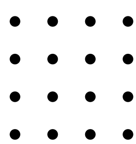
Други разред – Б категорија

1. Нека су a, b и c цели бројеви и $a \neq 0$. Које све вредности може имати дискриминанта квадратне функције

$$f(x) = ax^2 + bx + c\,?$$

2. Одредити све парове целих бројева (x, y) који представљају решења једначине $y = 2x^2 + 5xy + 3y^2$.

3. Дата је квадратна решетка 4×4 сачињена од 16 тачака (видети слику). Колико има троуглова са теменима у овим тачкама?



4. Нека су P и Q средишта краћих лукова AB и AC кружнице описане око троугла ABC, а s_α симетрала унутрашњег угла $\angle BAC$. Доказати да важи $PQ \perp s_\alpha$.

5. За природан број n означимо са $n!_0$ природан број који се добија одбацивањем свих нула које се налазе на крају декадног записа броја $n!$ (нпр. $4!_0 = 24$, $7!_0 = 504$). Решити једначину

$$a!_0 = 12 + b!_0$$

у скупу природних бројева.

Трећи разред – Б категорија

1. У троуглу ABC углови код темена A, B и C означени су са α, β и γ, редом. Ако важи

$$\cos\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta - 1,$$

доказати да је тај троугао једнакокраки.

2. Доказати да су вектори $\vec{x} = (1, a, a^2)$, $\vec{y} = (1, b, b^2)$ и $\vec{z} = (1, c, c^2)$ линеарно независни ако и само ако су a, b и c по паровима различити (тј. $a \neq b \neq c \neq a$).

3. Дат је тетиван четвороугао $ABCD$. Праве AC и BD се секу у тачки E, а праве AD и BC се секу у тачки F. Нека је G средиште лука CD кружнице описане око $ABCD$ који не садржи тачке A и B. Ако су тачке E, F и G колинеарне, доказати да је четвороугао $ABCD$ једнакокраки трапез.

4. Одредити све тројке $(x, y, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ за које важи

$$x^{2024} + 2025^y = 2026^z.$$

5. Да ли је могуће сваку тачку координатне равни обојити у једну од 2025 боја, тако да постоји тачка у свакој од ових боја и да је график сваког полинома са целобројним коефицијентима једнобојан?

Четврти разред – Б категорија

1. Одредити све $a, b \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ такве да је број $1 + 2^a + 2025^b$ степен неког парног природног броја, при чему је тај степен природан број већи од 1.

2. Дата је функција $f_k(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + k(\sin^4 x + \cos^4 x)$, где је k неки реалан број.

(а) Одредити домен функције f.

(б) Одредити све k такве да је $f_k(x) \leqslant 0$ на целом домену.

(в) Одредити све k за које је $f_k(x)$ константна функција на целом домену и за тако добијено k одредити $f_k(2026)$.

3. Дужине страница троугла ABC су $BC = 4$ и $AC = 5$, а дужина дела симетрале угла $\angle ACB$, који се налази унутар троугла, је $s = \dfrac{10}{3}$. Израчунати дужину странице AB.

4. Да ли је могуће сваку тачку координатне равни обојити у једну од 2026 боја, тако да постоји тачка у свакој од ових боја и да је график сваког полинома са целобројним коефицијентима једнобојан?

5. Нека су $a = \log_6 30$ и $b = \log_{15} 24$ дати позитивни реални бројеви. Познато је да важи

$$\frac{2ab + 2a - 1}{ab + b + 1} = \log_m n,$$

где су m и n природни бројеви. Ако је $n = 3600$, одредити вредност израза $2m + n$.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ,
А категорија, Математичка гимназија - Београд, 28. 03. 2026.

Први разред

1. Да ли постоји полином $P(x)$ са целобројним коефицијентима такав да за четири, по паровима различита, цела броја a, b, c и d важи $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 2024$, као и:

(а) $P(e) = 2028$, за неки цео број e?

(б) $P(e) = 2026$, за неки цео број e?

2. Дат је троугао ABC. Означимо са k његову описану кружницу са центром у тачки O. Конструисати тачку D на кружници k тако да су тежишта троуглова ABC и ABD тачке колинеарне са тачком O.

3. Нека је $S(x)$ збир цифара природног броја x у декадном запису.

(а) Одредити најмањи елемент скупа $\{S(11n^2 + n + 1) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

(б) Доказати да се за бесконачно много природних бројева n достиже тражена најмања вредност (која је одређена у првом делу задатка).

4. Посматрамо коначан низ од укупно n бројева, $n \in \mathbb{N}$, где је сваки 1 или 0. У једном потезу, узимамо два суседна броја, рецимо x и y, обришемо их, и на њихова места упишемо само један број, $x + y \pmod 2$. За које највеће k (у функцији од n) можемо да гарантујемо, да након примене неколико оваквих потеза, можемо да добијемо барем k узастопних међусобно једнаких бројева?

Други разред

1. Нека су a, b и c реални бројеви и $a^2 + b^2 + c^2 > 0$. Доказати да постоји реалан број d такав да је

$$(ad^2 + bd + c)(bd^2 + cd + a) > 0.$$

2. Дат је троугао ABC са центром описане кружнице у тачки O. Означимо са M средиште странице BC и изаберимо произвољну тачку D са описане кружнице троугла ABC, која је различита од темена тог троугла. Праве DB и DC секу кружницу AOD у тачкама E и F редом, не нужно различитим од тачке D . Ако је средиште дужи EF тачка G, доказати да је $AG = MG$.

3. Нека је $S = \{\text{НЗД}(a^n+b^n+c^n, a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}, a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2}) \mid a, b, c, n \in \mathbb{N},\ \text{НЗД}(a, b, c) = 1\}$. Одредити, ако постоји, највећи елемент скупа S.

4. Дат је природан број n. Једнакостранични троугао странице n подељен је на n^2 јединичних једнакостраничних троуглова правама паралелним са страницама оригиналног троугла. Два јединична једнакостранична троугла су суседна ако деле заједничку страницу. Пут је низ неколико суседних једнакостраницних троуглова у којем се сваки једнакостранични троугао појављује највише једном. Наћи све природне бројеве n за које постоји n путева који сви садрже тачно n једнакостраничиних троуглова и за које важи да се сваки од n^2 јединичних једнакостраничних троуглова налази у тачно једном од њих.

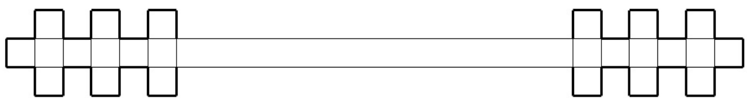
Трећи разред

1. (a) Ако је $z \in \mathbb{C}$ комплексан број јединичног модула, доказати да је $z^{2020} + z^3 + 1 \neq 0$.

(б) Одредити све природне бројеве n такве да за сваки комплексан број z, за који је $|z| = 1$, важи једнакост

$$\left| \frac{z^{2020} + z^n + 1}{z^{2020} + z^3 + 1} \right| = 1.$$

2. Дата је табла која садржи по 1011 јединичних поља у ,,горњем" и ,,доњем" реду, а 2023 поља у ,,средњем" (видети слику). Кенгур у једном потезу скаче са једног јединичног поља табле на неко друго јединично поље табле. Потез AB, којим кенгур скаче са неког поља A на поље B, подударан је потезу CD, којим кенгур скаче са поља C на поље D табле, ако и само ако је вектор од центра поља A до центра поља B једнак вектору од центра поља C до центра поља D. Да ли постоји низ потеза $A_1A_2,\ A_2A_3, A_3A_4, ..., A_{4044}A_{4045}$, при чему су свака два од поља $A_1, A_2, A_3, ..., A_{4044}$ и A_{4045} различита, такав да никоја два потеза нису подударна?



3. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева m који се не могу представити у облику збира $m = n + \varphi(n)$, за неки природан број n, где је $\varphi(n)$ укупан број природних бројева, не већих од n, који су узајамно прости са n.

4. Дат је троугао ABC са ортоцентром у тачки H. Праве BH и CH секу симетралу спољашњег угла у темену A тог троугла у тачкама D и E, редом. Нека је M средиште странице BC, а K подножје висине из тачке H на праву AM. Доказати да су тачке D, K, H и E концикличне.

Четврти разред

1. Одредити све вредности позитивних реалних параметара a и b за које неједнакост

$$4^x + a^x + b^x \geq 6^x + 3^x + 2^x$$

важи за сваки реалан број x.

2. Одредити све уређене парове $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ за које важи једнакост

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdots 2024! = x^2 \cdot n!\,.$$

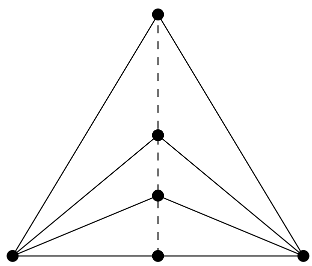
3. Дат је троугао ABC са центром описане кружнице у тачки O. Тачке E и F су одабране на правама AB и AC, редом, тако да је четвороугао $AEOF$ паралелограм. Тачка D је произвољна тачка са дужи BC, а симетрала дужи BD сече праву OE у тачки P, а праву AB у тачки Q, док симетрала дужи CD сече праву OF у тачки R и праву AC у тачки S. Доказати да се праве QR и PS секу на правој EF.

4. Дати су природни бројеви m и n. Правоугаона табла димензија $m \times n$ подељена је на mn јединичних поља (квадрата) и попуњена је природним бројевима од 1 до mn (у сваком пољу је различит број). Правоугаоник чије су обе странице веће од 1 и паралелне страницама табле, а сва четири темена су му нека од темена јединичних квадрата, називамо *лошим* ако му је збир бројева у горњем левом ћошку и доњем десном ћошку различит од збира бројева у доњем левом ћошку и горњем десном ћошку. Ако је познато да постоји барем један лош правоугаоник, одредити највеће k за које можемо тврдити да постоји k лоших правоугаоника.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ,
Б категорија, Математички факултет - Београд, 26. 04. 2026.

Први разред

1. На следећој слици све централне тачке леже на једној правој, а доње три тачке су колинеарне. Тачно је 2024 троуглова чија су темена дате тачке, при чему свака три колинеарна темена не образују троугао.



Колико укупно има тачака на слици?

2. За природан број n, са $S(n)$ означавамо збир његових цифара. На пример, $S(327) = 3 + 2 + 7 = 12$. Израчунати вредност израза $A = S(1) - S(2) + S(3) - S(4) + \cdots + S(2025) - S(2026)$.

3. Милица, Александар, Чеда и Ненад живе на острву на коме постоје два племена: Лажковићи и Истинозборићи. Као што им називи кажу,

Лажковићи увек говоре неистину, док Истинозборићи увек говоре истину. Они су се такмичили у решавању логичких задатака и познато је да је победник тог такмичења припадник племена Истинозборића. После такмичења дали су следеће изјаве:
Милица: Ни ја ни Чеда нисмо победили.
Александар: Ако је бар један од Чеде и Ненада припадник племена Лажковић, онда је Милица победила.
Чеда: Александар је победник и Ненад је Лажковић.
Ненад: Ако је Милица Лажковић, онда је Чеда победник.
Одредити победника такмичења и утврдити ком племену припада свако од ово четворо острвљана.

4. Нека је ABC оштроугли троугао. Означимо са D, E и F подножја висина из темена A, B и C, редом. Доказати да је $AF = CF$ ако и само ако су дужи DE и DF међусобно нормалне.

5. Наћи најмању вредност израза $|49^a - 6^b|$, где су a и b произвољни природни бројеви.

Други разред

1. Решити једначину:

$$x^{\log_{10}^2 x + \log_{10} x^3 + 3} = \frac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}}.$$

2. Запис $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, који је састављен само од нула и јединица, називамо *бинарним* записом дужине $n+1$, односно записом са $n+1$ места, при чему је n природан број. Посматрајмо произвољан бинарни запис $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ дужине $n+1$. Рећи ћемо да је тај запис *дијадски* ако има паран број места и ако је збир првог и последњег броја једнак 1, збир другог и претпоследњег једнак 1, збир трећег и трећег отпозади, такође, једнак 1 и тако редом, тј. важи $a_0 + a_n = a_1 + a_{n-1} = a_2 + a_{n-2} = \cdots = 1$. На пример, запис $(1, 0, 0, 1, 1, 0)$ је дијадски, јер има 6 места ($n = 5$), а притом је $1 + 0 = 0 + 1 = 0 + 1 = 1$. Колико има бинарних записа дужине 16 који нису дијадски, али се могу поделити на 4 узастопна дијадска записа, од којих сваки има дужину 4?

3. Нека је n природан број и a_n број који се у декадном запису састоји од n цифара које су наизменично 7 и 3, почевши од цифре 7 слева. На пример, $a_3 = 737$ и $a_6 = 737373$. Одредити најмање n такво да $99 \mid a_n$.

4. (а) Нека су a и b реални бројеви такви да је $a < b$. Доказати да за свако $y \in \mathbb{R}$ важи

$$|y-a| + |y-b| \geq b-a.$$

(б) Нека је x ирационалан број, такав да је број

$$|x-1| + |x-2| + ... + |x-2023| + |x-2024|$$

рационалан. Доказати да за произвољан реалан број y важи неједнакост

$$|y-1|+|y-2|+...+|y-2023|+|y-2024| \geq |x-1|+|x-2|+...+|x-2023|+|x-2024|.$$

5. Дат је оштроугли троугао ABC. Нека је H ортоцентар тог троугла. Нека су O_a, O_b и O_c центри описаних кружница троуглова HBC, HCA и HAB, редом. Доказати да су троуглови ABC и $O_aO_bO_c$ подударни.

Трећи разред

1. Нека су a и b катете правоуглог троугла. Ако важи

$$\log_8 \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2}\big(\log_8 a + \log_8 b - \log_8 2\big),$$

одредити углове тог троугла.

2. У праву кружну купу уписана је лопта. Око те лопте описан је прав кружни ваљак чија основа припада равни основе дате купе. Нека је K запремина купе, а V запремина ваљка.

(а) Доказати да је $K \neq V$.

(б) Одредити најмањи реалан број m такав да за сваку такву купу важи $K \geq mV$.

3. Одредити све парове $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, где је $\mathbb{N}$ скуп природних бројева, за које важи $5^x - 3^y = 16$.

4. Ана и Бојан играју игру на траци од $n \geqslant 3$ поља са по једним жетоном. На почетку, Анин жетон се налази на првом пољу, а Бојанов жетон на последњем пољу. Играчи играју наизменично. У сваком потезу, играч помера свој жетон за једно или два поља у правцу противниковог жетона. Жетон мора да стане на празно поље и није дозвољено прескакање противниковог жетона. Ана игра прва. Играч који не може да одигра потез губи. Доказати:

(а) Ако n даје остатак 2 при дељењу са 3, Бојан има победничку стратегију.

(б) Ако n даје остатак 0 или 1 при дељењу са 3, Ана има победничку стратегију.

5. Нека је x ирационалан број, такав да је број

$$|x-1|+|x-2|+...+|x-2023|+|x-2024|$$

рационалан. Доказати да за произвољан реалан број y важи неједнакост

$$|y-1|+|y-2|+...+|y-2023|+|y-2024| \geq |x-1|+|x-2|+...+|x-2023|+|x-2024|.$$

Четврти разред

1. Три различита реална броја, у неком поретку, чине аритметички низ од три члана, а такође, можда у другом поретку, чине геометријски низ од три члана. Одредити највећу могућу вредност количника тог геометријског низа.

2. Дат је троугао ABC чији је центар уписане кружнице означен са S. Кружница додирује странице троугла у тачкама $D \in BC$, $E \in AC$ и $F \in AB$. Ако је $|AE| = 3$, $|CS| = 2\sqrt{7}$, а мера угла $\angle BAC = 60^\circ$, израчунати површину троугла ABC.

3. Ана и Бојан играју игру на траци од $n \geqslant 3$ поља са по једним жетоном. На почетку, Анин жетон се налази на првом пољу, а Бојанов жетон на последњем пољу. Играчи играју наизменично. У сваком потезу, играч помера свој жетон за једно или два поља у правцу противниковог жетона. Жетон мора да стане на празно поље и није дозвољено прескакање противниковог жетона. Ана игра прва. Играч који не може да одигра потез губи. Доказати:

(а) Ако n даје остатак 2 при дељењу са 3, Бојан има победничку стратегију.

(б) Ако n даје остатак 0 или 1 при дељењу са 3, Ана има победничку стратегију.

4. Одредити све тројке $(x, y, z) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, где је $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, при чему је $\mathbb{N}$ скуп природних бројева, за које важи $3^x + 6^y = 2025^z$.

5. Нека је S скуп позитивних целих бројева такав да за сваки позитиван цео број n важи

$$|S \cap \{n,\, 2n,\, 1013n\}| = 1.$$

Познато је да $2026^{2026} \in S$. Доказати да $2 \notin S$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

1. Уколико је $(a, b, c, d, e) = (1, 0, 1, 0, -1)$ тада је $I = 3$. Докажимо да је под наведеним условима увек $I \geq 3$. Претпоставимо супротно. Тада је $I \leq 2$, па су међу бројевима a, b, c, d и e бар три једнака нули (пошто је квадрат целог броја који је различит од нуле не мањи од 1). Сада због цикличности услова $a \neq b \neq c \neq d \neq e \neq a$, без умањења општости можемо претпоставити да је $a = 0$. Тада је $b \neq 0$ и $e \neq 0$, па како су бар три броја међу бројевима a, b, c, d и e једнака нули, мора бити $c = d = 0$. Контрадикција.

Овим је доказано да је најмања вредност израза I једнака 3.

2. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ различити бројеви из скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$. Посматрајмо збир

$$S = (a_1 - 1) + (a_2 - 2)^2 + \cdots + (a_n - n)^n = \sum_{i=1}^{n} (a_i - i)^i.$$

За сваки цео број x и сваки $i \geq 1$ важи

$$x^i \equiv x \pmod{2},$$

јер степен не мења парност датог броја. Отуда,

$$(a_i - i)^i \equiv a_i - i \pmod{2},$$

одакле следи

$$S \equiv \sum_{i=1}^{n} (a_i - i) \pmod{2}.$$

С обзиром да је $(a_1, \ldots, a_n)$ пермутација скупа $\{1, \ldots, n\}$, имамо

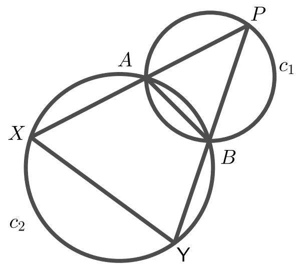
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} i,$$

те је

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - i) = 0.$$

Дакле, S је паран број.

3. Приметимо да је тетива AB константне дужине, тј. не зависи од избора тачке P. На кружницама k_1 (на слици је означена са c_1) нека је $\angle APB = \alpha$, а на k_2 (на слици је означена са c_2) нека је $\angle AXB = \angle AYB = \beta$.



Такође, ови углови су константне величине јер је тетива AB константна. Отуда важи да је $\angle XBP = \angle PAY = \pi - (\alpha+\beta)$ па је $\angle XAY = \angle YBX = \alpha + \beta$. Како су ова два последња угла константне вредности, без обзира на позицију тачке P, тада је и дуж XY такође константне величине.

4. Одговор су бројеви 9_{12} и 69_{12}. Докажимо да су то једина решења. Нека је $x = \overline{c_n ... c_3 c_2 c_1 c_0}, c_i \in \{6, 9\}$ решење. Број x мора бити непаран, па је $c_0 = 9$ и $x = 9 + c_1 \cdot 12^1 + \cdots + c_n \cdot 12^n$. Ако је $c_1 = 9$ онда $9 \mid x$, али $27 \nmid x$, што је немогуће, па је $c_1 = 6$. Дакле, $x = 81 + c_2 \cdot 12^2 + \cdots + c_n \cdot 12^n$. Ако је $c_2 = 6$, онда $27 \mid x$, али $81 \nmid x$, јер једино члан $12^2 \cdot 6$ није дељив са 81. Зато је $c_2 = 9$ и $x = 1377 + c_3 \cdot 12^3 + \cdots + c_n \cdot 12^n$. Ако је $c_3 = 9$ онда $81|x$, али $243 \nmid x$, јер једино број 1377 није дељив са 243. Закључујемо да је $c_3 = 6$. Коначно, сада је $x = 11745 + c_4 \cdot 12^4 + \cdots + c_n \cdot 12^n$. Међутим, сада опет $81|x$, а $243 \nmid x$, јер $243 \nmid 11745$, чиме је доказ завршен.

5. Приметимо да је $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = 8! = 40320$. Даље, $40320 = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \leqslant P \cdot P \cdot P$, па је $P \geqslant 35$.

Размотримо случај $P = 35$. Како је $35 = 5 \cdot 7$, то се у једном скупу налазе само бројеви 5 и 7 (и евентуално 1). Како међу бројевима од 1 до 8 имамо тачно један број дељив са 5 и тачно један дељив са 7, то је у остала два скупа производ бројева мањи од 35. Такође, ни у једном скупу производ бројева не може да буде $34 = 2 \cdot 17$ јер $17 \notin \{1, 2, \ldots, 8\}$. Из истог разлога ни у једном скупу производ бројева не може да буде $33 = 3 \cdot 11$, па је производ у сва три скупа не већи од $35 \cdot 32 \cdot 32 = 35840 \leqslant 40320$, па $P \neq 35$. Са друге стране, подела на скупове $\{1, 5, 7\}$, $\{2, 3, 6\}$ и $\{4, 8\}$ даје $P_1 = 35$, $P_2 = 36$ и $P_3 = 32$, односно $P = 36$, што је и решење задатка.

Други разред – А категорија

1. (a) Пребацивањем $\sqrt{2}$ на другу страну добијамо: $\alpha - \sqrt{2} = \sqrt[4]{2}$, те квадрирањем налазимо да је $(\alpha - \sqrt{2})^2 = \sqrt{2}$, $\alpha^2 + 2 - 2\alpha\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$,

$\sqrt{2} = \frac{\alpha^2+2}{1+2\alpha}$ $(1+2\alpha > 0)$. Лева страна је ирационална, а ако је α рационалан, десна страна је такође рационална, те долазимо до контрадикције. Дакле, α није рационалан.

(б) Од раније је $\sqrt{2} = \frac{\alpha^2+2}{1+2\alpha}$. Квадрирањем имамо $2 = \frac{(\alpha^2+2)^2}{(1+2\alpha)^2}$, $2(1+2\alpha)^2 = (\alpha^2+2)^2$, $(\alpha^2+2)^2 - 2(1+2\alpha)^2 = 0$, па полином $P(x) = (x^2+2)^2 - 2(1+2x)^2$ задовољава тражени услов.

2. Нека је $x = \sqrt{n}$ и $x^2 = x + 360k$, за $k \in \mathbb{N}$. Важи $\sin((x^2)^\circ) = \sin(x^\circ)$. Докажимо да се природан број x може изабрати на бесконачно много начина. Решавамо квадратну једначину $x^2 - x - 360k = 0$. За $x > 1$, решење је облика $x = \dfrac{1+\sqrt{1+1440k}}{2}$.

Преостало је доказати да постоји бесконачно много квадрата природних бројева облика $1+1440k$. Напоменимо да ако је $1+\sqrt{1+1440k}$ цео број, онда је и паран због непарности броја $1+1440k$. Записујемо $m^2 = 1+1440k \iff 1440k = (m-1)(m+1)$. Могуће је изабрати $m-1 = 1440t$ и $m+1 = 1440t+2$, за било које $t \in \mathbb{N}$.

3. За сваког такмичара, број поена је $\frac{1}{2}a+b$, где је a број нерешених партија које је играч одиграо, а b број победа, одатле следи да такмичар има цео број поена ако и само ако је број нерешених партија паран. Даље решење зависи од парности броја n, тј. броја играча.

1° n је непаран: Тада сваки играч игра укупно $n-1$ партија, а број $n-1$ је паран. Зато је могуће да све партије на турниру буду нерешене. У том случају, сваки играч има паран број ремија, па самим тим и цео број поена. Како нема више партија од $\frac{n(n-1)}{2}$, што је укупан број партија на турниру, овај број, тј. $\frac{n(n-1)}{2}$, представља највећи могући број нерешених партија у овом случају.

2° n је паран: Аналогно, сваки играч игра тачно $n-1$ партија, што је непаран број. Стога, играч не може имати све партије нерешене, јер би тада имао непаран број ремија. Са друге стране, највећи паран број који је мањи од $n-1$ јесте $n-2$, те сваки играч може имати највише $n-2$ нерешене партије.

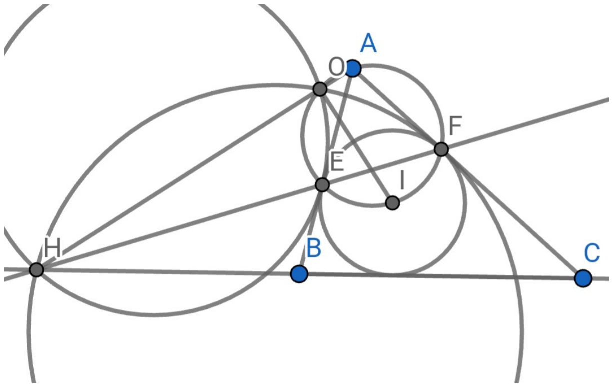
Ово се може остварити тако што, на пример, играче упаримо:

$$(1,2), (3,4), \ldots, (n-1, n),$$

и нека у сваком од ових парова партија буде одлучена (није нерешено), док су све остале партије нерешене. Тада сваки играч има тачно једну одлучену партију (победа или пораз) и $n-2$ нерешене партије, што је паран број, те сви играчи имају цео број поена. Дакле, у овом случају добијамо да је $\frac{n(n-2)}{2}$ највећи могући број нерешених партија.

4. Пошто се k_1 и уписани круг додирују у тачки E то је права AB тангента

на круг k_1. Слично, права AC је тангента на круг k_2. Тачка A има једнаке потенције у односу на кругове k_1 и k_2 и оне износе $AE^2 = AF^2$.



Зато се A налази на радикалној оси ових кругова, односно на правој HO. Остаје да докажемо да је $\angle AOI = 90$. Како је $\angle AEO = \angle OHE = \angle OHF = \angle AFO$ (тангентни и периферијски углови) четвороугао $OAFE$ је тетиван. Пречник његовог описаног круга је AI, те је $\angle AOI = 90$, чиме је доказ завршен.

5. (а) Приметимо да се након сваког потеза, остатак броја на табли при дељењу са 7 не мења. Заиста, $x + 7 \equiv x \pmod 7$, $x + 1001 \equiv x \pmod 7$ и $2^{10} = 1024 \equiv 2 \pmod 7$. Са друге стране, $2024^{2024} + 2025 \equiv 1^{2024} + 2 \equiv 3 \pmod 7$, те је одговор не.

(б) Да! На пример, након прве минуте уместо броја 2 запишемо $2^{10} = 1024$, те након друге минуте записујемо $1024 + 1001 = 2025$.

Трећи разред – А категорија

1. Нека је $B = A + 2024A^T$, $B = [b_{ij}]_{2023\times 2023}$, $B^T = [b^t_{ij}]_{2023\times 2023}$. Тада је $B + B^T = 2025(A + A^T)$, одакле добијамо да је $b_{ij} \equiv -b^t_{ij} \pmod{2025}$, $i, j = 1, 2, \ldots, 2023$. На основу особина детерминанти, ако посматрамо све елементе матрица по модулу 2025, следи да је $\det B = \det(-I)\det(B^T) = (-1)^{2023}\det B = -\det B$, односно да је $2\det B \equiv 0 \pmod{2025}$. Дакле, $\det B$ је дељиво са 2025.

2. Доказаћемо да су бројеви $z = \pm 1$ једина решења. Посматрајмо најпре бројеве са наведеном особином код којих је $|z| > 1$. Из неједнакости троугла имамо

$$|z|^n + \frac{1}{|z|^n} \geq |z^n + \frac{1}{z^n}| = |z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}| \geq |z|^{n+1} - \frac{1}{|z|^{n+1}},$$

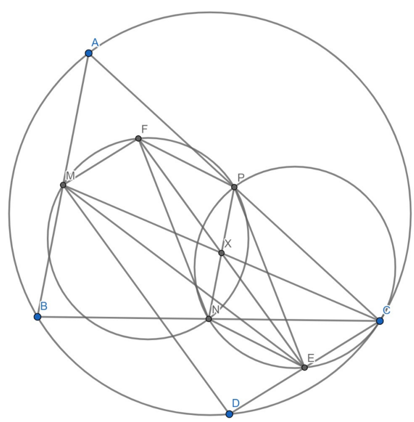
одакле због $|z| > 1$ важи $|z|^{n+1} \leq |z|^n + \frac{1}{|z|^n} + \frac{1}{|z|^{n+1}} < |z|^n + 2$. Дакле, за сваки природан број n важи

$$|z|^n < \frac{2}{|z| - 1}. \tag{1}$$

Како је $|z| > 1$, то величина $|z|^n$, када n пролази скупом природних бројева није одозго ограничена, што је у супротности са (1). Овим смо добили да не постоје бројеви z са наведеном особином код којих је $|z| > 1$. Приметимо да је неки број z решење задатка акко је $\frac{1}{z}$ решење задатка. Зато, ако би неки број z за који је $|z| < 1$ био решење задатка, онда би и број $\frac{1}{z}$ био решење и за њега би важило $|\frac{1}{z}| > 1$. Међутим, како смо већ доказали да нема решења међу бројевима којима је модуо већи од 1, одавде закључујемо да нема решења ни међу бројевима којима је модуо мањи од 1. Размотримо још случај $|z| = 1$. Тада је $\overline{z} = \frac{|z|^2}{z} = \frac{1}{z}$, те је $|z^n + \frac{1}{z^n}| = |z^n + \overline{z^n}| = 2|Re(z^n)|$. Нека је $z = a+bi,\ a, b \in \mathbb{R}$, при чему је $a^2+b^2 = 1$. Сада из једнакости $|z + \frac{1}{z}| = |z^2 + \frac{1}{z^2}| = |z^3 + \frac{1}{z^3}|$ лако добијамо да је $|a| = |2a^2 - 1| = |4a^3 - 3a|$. Решавањем последњег система налазимо да је $a = \pm 1$, чиме је $b = 0$, односно $z = \pm 1$. Бројеви $z = \pm 1$ очигледно јесу решења задатка, а из свега наведеног закључујемо и да су једина.

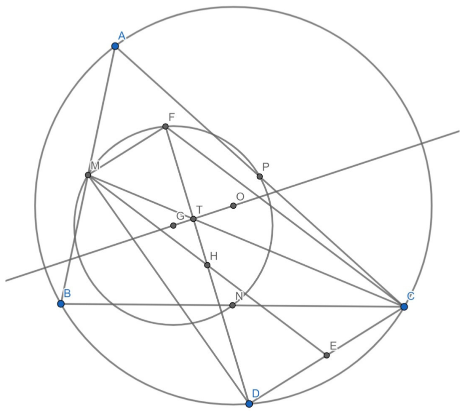
3. По модулу 9 имамо $1 + 2^y \equiv 0 \pmod 9$, $2^y \equiv 8 \pmod 9$. Степен броја 2 при дељењу са 9 даје остатке, периодично, 2, 4, 8, 7, 5, 1, па 3 дели y. По модулу 7 имамо да је $5202 \equiv 1 \pmod 7$, $10^x + 1 \equiv 1 \pmod 7$, те добијамо да 7 дели 10^x, што је контрадикција.

4. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Приметимо да је и четвороугао $MECF$ паралелограм, и пресек његових дијагонала обележимо са X. Како је MN и MP средње линије троугла $\triangle ABC$, знамо да је и четвороугао $MNCP$ паралелограм, односно X је такође средиште и дужи NP. Сада знамо да је и четвороугао $NEPF$ паралелограм.



Да бисмо доказали тврђење задатка довољно је да докажемо да је $\angle NMP = \angle NFP$, односно да је $\angle NEP = \angle NCP$. Последња једнакост важи јер је четвороугао $CPEN$ тетиван, са описаним кругом који је хомотетичан са описаним кругом троугла $\triangle ABC$ кроз C са коефицијентом $\frac{1}{2}$ (E, N и P су редом средишта дужи CD, CB и CA). Овиме је тврђење задатка доказано.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Са H обележимо пресек дијагонала паралелограма $MDEF$. Знамо да права DF пролази кроз средиште тежишне дужи троугла $\triangle MDC$, па зато сече његову страницу MC у тачки T таквој да је $CT : MT = 2 : 1$. Дакле, тачка T је тежиште троугла $\triangle ABC$.



Даље, из сличности троуглова $\triangle FMT$ и $\triangle DCT$ добијамо да је $DT : FT = 2 : 1$, односно тачка F је слика тачке D при хомотетији са центром у T и коефицијентом $-\frac{1}{2}$. Како је познато да ова хомотетија слика описани круг троугла у његов Ојлеров круг, F се налази на Ојлеровом кругу троугла $\triangle ABC$, чиме смо доказали тврђење задатка.

5. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Конструисаћемо тражена партиционисања индукцијом по k. У случају базе ($k = 1$), имамо a_1 једночланих скупова, па који год изабрали, постојаће тачно 1 елемент у њему. Претпоставимо сада да постоје тражена партиционисања за неко $k \in \mathbb{N}$. Ако је $n_0 = a_1 a_2 ... a_k$, тада је $n = n_0 a_{k+1}$. Да бисмо од старих партиционисања направили нова, у сваки од претходно конструисаних скупова треба да додамо још по $a_{k+1} - 1$ елемената, и треба да одрадимо још једно партиционисање на a_{k+1} скупова. То ћемо једноставно урадити: у сваки од претходних скупова ћемо свуда где се налазио неки елемент између 1 и n_0 додати све елементе који су са њим једнаки по модулу n_0, а у новом партиционисању ћемо скуп $\{1, 2, ..., n\}$ поделити на скупове облика $\{m \cdot n_0 + 1, m \cdot n_0 + 2, ..., (m+1) \cdot n_0\}$ за $m = \overline{0, a_{k+1} - 1}$. Сада, за било којих одабраних k скупова из првих k партиционисања, због индукцијске хипотезе и наше конструкције имамо тачно одређену вредност по модулу n_0 коју узимају сви елементи у њиховом пресеку, а када додамо и последњи скуп, пресек постаје једночлан, јер у сваком од скупова из новог

партиционисања имамо по тачно један елемент који даје сваки остатак по модулу n_0. Тиме је доказ завршен.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Уочимо n k-торки природних бројева, где i-ти елемент k-торке узима вредности из скупа $\{1, 2, ..., a_i\}$ за свако $i = \overline{1, k}$. Приметимо да елемената са фиксном i-том координатом има $\frac{n}{a_i}$, за свако $i = \overline{1, k}$, те можемо ове k-торке делити у скупове по њиховим координатама. Дакле, у i-том партиционисању j-ти скуп ће садржати све k-торке које на i-тој позицији имају број j, за све $i = \overline{1, k}$ и $j = \overline{1, a_i}$. Сада, за сваки одабир скупова, знамо тачно које координате мора имати k-торка у пресеку свих тих скупова, па је по конструкцији јасно да постоји тачно једна таква k-торка за сваки одабир скупова. Како је k-торки n, сваком броју ћемо доделити по тачно једну k-торку и уместо k-торки ћемо посматрати бројеве. Овиме је тврђење задатка доказано.

Четврти разред – А категорија

1. Укупно има $\binom{8}{3} = 56$ начина да се изаберу три различита темена коцке.

Показаћемо да су сви тако добијени троуглови правоугли, осим оних који су сачињени од три дијагонале страна коцке. Заиста, нека су изабрана три различита темена A, B, C дате коцке. Посматрајмо троугао ABC.

Ако је једна од дужи AB, BC, CA ивица коцке, рецимо да је то дуж AB, тада су тачке A и B суседна темена коцке. Треће теме C се налази у једној од страна коцке које садрже ивицу AB, или у некој од преосталих страна које са њом немају заједничку ивицу.

У оба случаја, једна од дужи AC или BC лежи у правцу ивице коцке која је нормална на ивицу AB. Пошто су све ивице коцке које излазе из истог темена међусобно нормалне, следи да је један од углова троугла ABC прав.

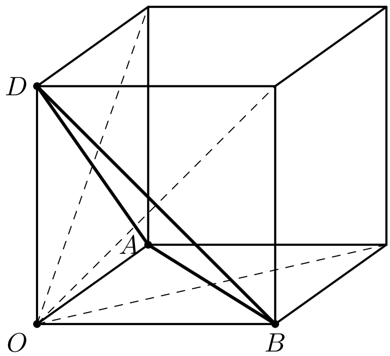
Према томе, ако троугао ABC има бар једну страну која је ивица коцке, онда је тај троугао правоугли.

Једини преостали случај је када ниједна од дужи AB, BC, CA није ивица, тј. када су све три дужи дијагонале неких страна. То се дешава управо када су A, B, C три темена суседна неком темену коцке. Тада су AB, BC, CA три дијагонале трију страна које се секу у поменутом темену коцке, те добијени троугао није правоугли (он је једнакостраничан). Стога, за свако теме коцке постоји тачно један такав троугао, па их има тачно 8. Дакле, неповољних избора је 8, па је тражена вероватноћа

$$P = 1 - \frac{8}{\binom{8}{3}} = 1 - \frac{8}{56} = \frac{6}{7}.$$

2. ПРВО РЕШЕЊЕ:) Почетни израз можемо написати у облику

$$a\log(1+b) + b\log(1+c) + c\log(1+a) = \log\big((1+b)^a(1+c)^b(1+a)^c\big).$$



Како је функција $f(x) = \log x$ растућа, довољно је наћи највећу могућу вредност израза унутар логаритма. Применимо на тај израз тежинску аритметичко–геометријску неједнакост:

$$(1+b)^a(1+c)^b(1+a)^c \leq \frac{a(1+b)+b(1+c)+c(1+a)}{a+b+c} = 1+ab+bc+ca.$$

Највећа могућа вредност израза $ab+bc+ca$ је $\frac{1}{3}$. Заиста,

$$1 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca+3(ab+bc+ca)$$

$$= \frac{1}{2}\big((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\big)+3(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca).$$

Одавде добијамо

$$S(a,b,c) \leq \log(1+ab+bc+ca) \leq \log\left(\frac{4}{3}\right),$$

при чему се обе неједнакости постижу управо када је $a=b=c=\frac{1}{3}$. Дакле, највећа могућа вредност израза је

$$\log\left(\frac{4}{3}\right).$$

(ДРУГО РЕШЕЊЕ:) Приметимо да је функција $f(x) = \log(1+x)$ конкавна на интервалу дефинисаности, тј. за $x \in (-1,+\infty)$. Пошто је $a+b+c = 1$, можемо применити Јенсенову неједнакост на почетни израз (за случај конкавне функције):

$$S(a,b,c) = af(b)+bf(c)+cf(a) \leq f(ab+bc+ca) = \log(1+ab+bc+ca).$$

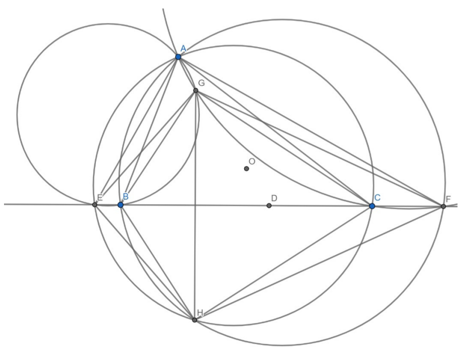
Једнакост се постиже за $a=b=c$, те је наставак исти као и у првом решењу.

3. Из неједнакости $n^m = n!+n \geqslant 1+1 = 2$ закључујемо да је $n \geqslant 2$. Дељењем обе стране са n, добијамо $(n-1)!+1 = n^{m-1}$, па како је $n^{m-1} > 1$,

то је $m \geqslant 2$. Из овог записа видимо да $n \nmid (n-1)!$, па ако би n био облика $n = ab$, за неке $a \neq b$, при чему су оба већа од 1 и мања од n, имали бисмо $ab \mid (n-1)!$, што је контрадикција, па $n = a^2$ или је n прост број.
1° Нека је $n = a^2$: Имамо $a \mid n^{m-1}$ и $a \mid (n-1)!$, па $a \mid 1$, тј. $a = 1$ и $n = 1$. Међутим, показали смо да мора да важи $n \geqslant 2$, па у овом случају нема решења.
2° Нека је n прост број: За $n = 2$ добијамо $m = 2$, за $n = 3$ имамо $m = 2$, док за $n = 5$ добијамо $m = 3$.
Нека је сада $n \geqslant 7$ прост број. Тада је $(n-1)! = 2 \cdot 3 \cdots (n-1) < n^{n-2}$, па $(n-1)!+1 \leqslant n^{n-2}$. Како важи и $n^{m-1} \leqslant n^{n-2}$, то је $m < n$. Како је $n \geqslant 7$, то је $2 < \frac{n-1}{2} < n-1$, па $(n-1)^2 \mid (n-1)!$. Сада $(n-1)^2 \mid n^{m-1}-1$, тј. $(n-1)^2 \mid ((n-1)+1)^{m-1} - 1$. Из биномне формуле одавде следи $(n-1)^2 \mid (m-1)(n-1)$, тј. $n-1 \mid m-1$. Међутим, како смо већ показали да важи $n > m \geqslant 2$, закључујемо да је немогуће да важи $n-1 \mid m-1$.

Дакле, задатак има три решења: $(m,n) \in \{(2,2),(2,3),(3,5)\}$.

4. Доказаћемо да је тачка H заправо тачка G пресликана преко праве BC, одакле директно следи тврђење задатка. Израчунајмо прво пар углова. Знамо да је $\angle AGB = 180^\circ - \angle AEB$, као и $\angle AGC = 180^\circ - \angle AFC$, па како је $\angle EAF = 90^\circ$ (тачка A је на кругу са пречником EF), лако добијамо да је и $\angle BGC = 90^\circ$.



Из тетивности четвороугла $AEBG$ добијамо $\angle EGB = \angle EAB = \angle EAD - \angle BAD = (90^\circ - \frac{\angle ADB}{2}) - (90^\circ - \frac{\angle AOB}{2}) = \frac{\angle AOB - \angle ADB}{2} = \frac{\angle OBC}{2} = \theta$. Слично добијамо и $\angle CGF = \angle CAF = \frac{\angle OCB}{2} = \theta$. Обележимо сада са H' тачку добијену пресликавањем тачке G преко BC. Знамо да је $\angle BH'F = \angle BGF = \angle BGC + \angle CGF = 90^\circ + \theta$, док је с друге стране $\angle BAF = \angle EAF - \angle EAB = 90^\circ - \theta$. Дакле, $\angle BAF + \angle BH'F = 180^\circ$, па је четвороугао $ABH'F$ тетиван. Слично је и четвороугао $AEH'C$ тетиван, па је $H \equiv H'$, чиме смо доказали тврђење задатка.

5. Фиксирајмо почетак изломљене линије (постоји n начина да то урадимо). Исту ћемо правити итеративно почев од датог почетка. У сваком од

наредних $n-2$ корака потребно је спојити тренутни крај изломљене линије са новом тачком преко дужи. Кандидати за нови крај су две суседне тачке од крајева скупа тачака које смо до сада обишли. Напомињемо да је тај скуп повезан. Уколико тај скуп није повезан, односно нису сви његови елементи суседни, онда наш процес мора направити изломљену линију која сече саму себе. У последњем $n-1$-ом кораку, спајамо тренутни крај са једином преосталом тачком. Број начина да извршимо поменути процес је $n \cdot 2^{n-2}$. Приметимо да одређена линија не разликује свој почетак и последњи крај, те смо сваку избројали двапут. Коначан резултат је $n \cdot 2^{n-3}$.

Први разред – Б категорија

1. Узмимо $(a, b, c) = (-1, 0, 1)$. Тада је

$$I = a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 0 + 1 = 2.$$

Докажимо да је увек $I \geq 2$. Како су a, b, c различити цели бројеви, највише један од њих може бити нула. Према томе, бар два од бројева a, b, c су ненула, те су њихови квадрати најмање 1. Отуда,

$$I = a^2 + b^2 + c^2 \geq 1 + 1 = 2.$$

Дакле, најмања могућа вредност је $\boxed{2}$, и постиже се за $(a, b, c) = (-1, 0, 1)$ (и за било коју његову пермутацију).

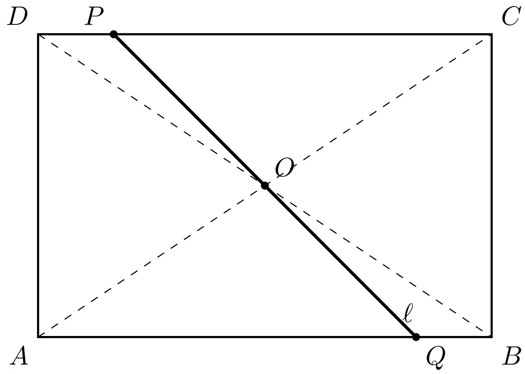
2. Кренимо са прерачунавањем самих композиција да бисмо уочили правило. Имамо: $f^2(x) = \dfrac{-2x-4}{x}$. Једноставно се добија

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = x.$$

Сада је $f^4(x) = f(f^3(x)) = f(x)$, што имплицира следеће: $f^5(x) = f^2(x), f^6(x) = f^3(x), f^7(x) = f(x), \ldots$. Како је 2025 дељиво са 3, следи да је

$$f^{2025}(2025) = f^3(2025) = 2025.$$

3. Видимо да 5 дели дати број, те 25 дели могући степен, па $25 \mid \overline{a5}$, па је $a \in \{2, 7\}$. Следи, ако је у питању барем трећи степен, 125 ће делити дати број, тј. $125 \mid \overline{2a5}$, те a не може бити нити један од претходних. Стога, тражени број може бити само потпун квадрат, те ће дати остатак 0 или 1 при дељењу са 4. Следи, $a = 7$ не испуњава услов (75 не даје остатак 0 или 1 при дељењу са 4), те може бити само $a = 2$. Испитујемо да ли је број 2202225 квадрат неког природног броја. Збир цифара му је 15, што значи да је дељив са 3, али не и са 9. Дакле, не постоји таква цифра a.

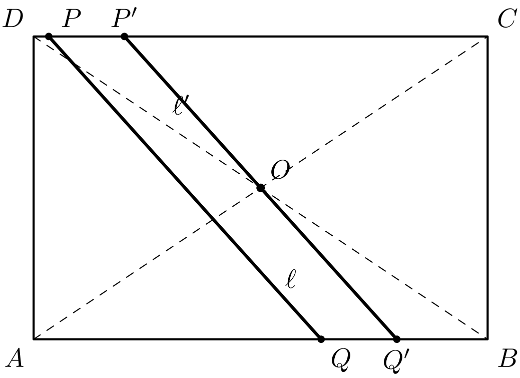


4. Нека је $ABCD$ дати правоугаоник и нека је O пресек његових дијагонала. Означићемо са ℓ дату праву. С обзиром да се у формулацији задатка јасно истичу речи - ако и само ако, решење спроводимо у два смера.

($\Leftarrow$) Претпоставимо да права ℓ пролази кроз тачку O и, без ограничења општости, претпоставимо да сече ивице правоугаоника у тачкама P и Q, које су различите од темена датог правоугаоника (видети слику). У осталим случајевима, тј. уколико права ℓ, која садржи тачку O, заузме неки други положај, тврђење у овом смеру постаје тривијално.

Јасно је да су троуглови BOQ и DOP подударни, јер је $BO = DO$, $\angle BOQ = \angle DOP$ (унакрсни), $\angle QBO = \angle PDO$ (наизменични), одакле закључујемо да су дужи BQ и DP подударне, а самим тим и AQ и CP. Стога, трапези $AQPD$ и $CPQB$ су подударни, те имају једнаке површине. Напоменимо да бисмо исти закључак добили да смо оба трапеза поделили одговарајућим нормалама из тачака P и Q на праве AB и CD, редом, на по један троугао и правоугаоник, који су подударни (троугао настао деобом првог трапеза са одговарајућим троуглом другог трапеза, односно, правоугаоник настао деобом првог трапеза са одговарајућим правоугаоником који настаје деобом другог трапеза).

($\Rightarrow$) Нека сада права ℓ дели правоугаоник на два дела једнаких површина. Претпоставимо супротно, тј. да права ℓ не пролази кроз тачку O. Означимо са ℓ' праву која садржи тачку O и паралелна је са правом ℓ (видети слику испод). Праве ℓ и ℓ' су различите, јер ℓ не садржи тачку O, па је део праве ℓ, тј. отворена дуж PQ, унутар једног од трапеза $AQ'P'D$ или $CP'Q'B$. На основу првог дела решења (први смер), права ℓ' дели полазни правоугаоник на два дела једнаких површина. Међутим, и права ℓ има то својство, одакле ће следити да фигура која припада појасу између две паралелне праве ℓ и ℓ' и која се налази унутар правоугаоника $ABCD$, што може бити паралелограм $QQ'P'P$ или петоугао $QQ'P'DP$ (ово ће се десити када P припада отвореној дужи AD) има површину једнаку нула, што је немогуће. Дакле, супротна претпоставка доводи до контрадикције, одакле закључујемо да права ℓ садржи тачку O.



5. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Бројеви $(a_i-i)^2$ су исте парности као и a_i-i, за свако $1 \leqslant i \leqslant 2025$. Како је збир свих ових других бројева нула (паран), јер је

$$S=(a_1-1)+(a_2-2)+\cdots+(a_{2025}-2025)=\sum_{i=1}^{2025}(a_i-i)=\sum_{i=1}^{2025}a_i-\sum_{i=1}^{2025}i=0,$$

то је полазни израз паран број.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Из једнакости

$$(a_1-1)^2+(a_2-2)^2+\cdots+(a_{2025}-2025)^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{2025}a_i^2-2\sum_{i=1}^{2025}ia_i+\sum_{i=1}^{2025}i^2=2(\sum_{i=1}^{2025}i^2-\sum_{i=1}^{2025}ia_i),$$

јер је $(a_1,a_2,\ldots,a_{2025})$ пермутација од $(1,2,\ldots,2025)$, добијамо да је полазни број паран.

Други разред – Б категорија

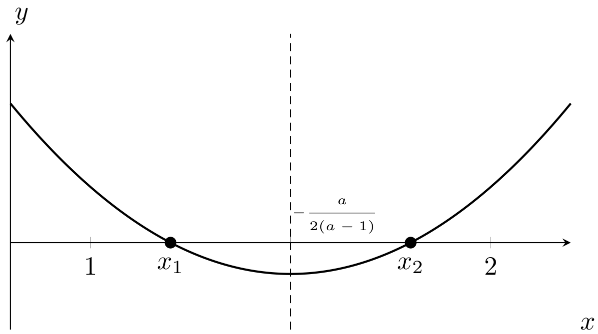
1. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Разликоваћемо три случаја:

1° Нека је $a=1$. Тада једначина није квадратна, тј. постаје линеарна, те не може имати два решења (за оне који то не примете, случај би свакако отпао, јер у истом је решење $x=-2\notin(1,2)$).

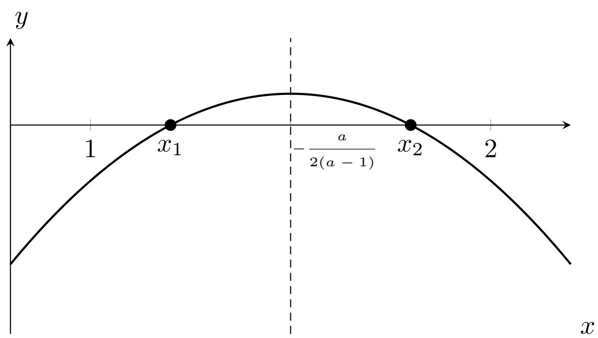
Нека је $a\neq 1$. У даљем подразумевамо да у случају квадратне једначине, уколико је дискриминанта исте једнака нула, да она има два реална решења, која су једнака. Разматрамо квадратну функцију

$$f(x)=(a-1)x^2+ax+2,\ x\in\mathbb{R},\ a\neq 1.$$

Да би полазна једначина имала два реална решења мора бити $D \geq 0$, где је $D = a^2 - 8(a-1) = a^2 - 8a + 8$ дискриминанта те једначине. Дакле, услови задатка, за сада, су $D \geq 0$ и $a \neq 1 \iff a^2 - 8a + 8 \geq 0$ и $a \neq 1 \iff$ ($a \leq 4 - 2\sqrt{2}$ или $a \geq 4 + 2\sqrt{2}$) и $a \neq 1$.



2° Нека је сада $a > 1$. Да би у овом случају једначина имала оба решења у интервалу $(1, 2)$ мора бити $f(1) > 0$, $f(2) > 0$, $1 < -\frac{a}{2(a-1)} < 2$ (x координата темена параболе мора припадати интервалу (1,2)) и $f(-\frac{a}{2(a-1)}) \leq 0$, тј. $a > -\frac{1}{2}$, $a > \frac{1}{3}$, $a \in \emptyset$ и $-\frac{D}{4(a-1)} \leq 0$, тј. $a \in \emptyset$, јер неједначина $1 < -\frac{a}{2(a-1)} < 2$ нема решења за $a > 1$.



3° Нека је сада $a < 1$. Да би у овом случају једначина имала оба решења у интервалу $(1, 2)$ мора бити $f(1) < 0$, $f(2) < 0$, $1 < -\frac{a}{2(a-1)} < 2$ и $f(-\frac{a}{2(a-1)}) \geq 0$, тј. $a < -\frac{1}{2}$, $a < \frac{1}{3}$, $a \in (\frac{2}{3}, \frac{4}{5})$ и $-\frac{D}{4(a-1)} \geq 0$, односно, $a < -\frac{1}{2}$, $a < \frac{1}{3}$, $a \in (\frac{2}{3}, \frac{4}{5})$ и $a < 1$, тј. $a \in \emptyset$.

Коначно, полазна једначина ни за једно реално a неће имати два реална решења у интервалу $(1, 2)$ (укључујући она, дупла, која су једнака).

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Ако је $a = 1$, једначина има једно решење $x = -2$. У супротном, за нуле квадратне функције $f(x) = (a-1)x^2 + ax + 2$, на основу

Вијетових формула, важи

$$x_1x_2 = \frac{2}{2(a-1)}.$$

Како је услов задатка да обе нуле припадају интервалу $(1,2)$, то је њихов производ позитиван број, па $a > 1$ (заправо, неопходно је да производ припада интервалу $(1,4)$, одакле добијамо јачу оцену: $a \in \left(\frac{5}{4}, 2\right)$, што ће се испоставити да није неопходно у овом задатку).

Јасно је да x-координата темена квадратне функције f мора припадати интервалу $(1,2)$. Стога, једноставно добијамо да је x-координата темена квадратне функције f једнака $x_T = -\frac{a}{2\cdot(a-1)}$. Како је $a > 1$, то је $x_T < 0$. Контрадикција!

Дакле, ниједан реалан број a не испуњава услове задатка.

2. Стандардно, ставимо да је $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Заменом у полазну једначину и груписањем сабирака добијамо

$$\begin{aligned}(x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3) + (x^2 + y^2) + x = 0\\ (x^3 - 3xy^2 + x^2 + y^2 + x) + (3x^2y - y^3)i = 0,\end{aligned}$$

одакле је $x^3 - 3xy^2 + x^2 + y^2 + x = 0$ и $3x^2y - y^3 = 0$. Друга једначина је еквивалентна са $y(3x^2 - y^2) = 0$, односно $y = 0$ или $y^2 = 3x^2$. У првом случају, заменом у једначину реалног дела добијамо $0 = x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1)$, одакле је $x = 0$ или $x^2 + x + 1 = 0$. Но, последња једначина нема реалних решења, па остаје једино $x = 0$. У другом случају, заменом у једначину реалног дела налазимо $0 = x^3 - 9x^3 + x^2 + 3x^2 + x = -8x^3 + 4x^2 + x$, одакле је $x = 0$ (и $y = 0$) или $8x^2 - 4x - 1 = 0$. Решења последње квадратне једначине су $x = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$ и $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$. Коначно, услов $y^2 = 3x^2$ нам даје $y = \pm x\sqrt{3} = \pm\frac{1\pm\sqrt{3}}{4}\sqrt{3} = \frac{\pm 3\pm\sqrt{3}}{4}$. Дакле, сва решења једначине су дата паровима:

$$\begin{aligned}(x,y) \in \{(0,0), (\frac{1+\sqrt{3}}{4}, \frac{3+\sqrt{3}}{4}), (\frac{1+\sqrt{3}}{4}, -\frac{3+\sqrt{3}}{4}),\\ (\frac{1-\sqrt{3}}{4}, \frac{3-\sqrt{3}}{4}), (\frac{1-\sqrt{3}}{4}, -\frac{3-\sqrt{3}}{4})\}.\end{aligned}$$

3. Ако би важило $n \geqslant 25$, тада би $5^5 \mid n!$ и $2^5 \mid n!$, па би се број завшавао са бар 5 нула, што није случај. Са друге стране, за $n < 20$ имамо $5^4 \nmid n!$, што такође није случај. Дакле, $20 \leqslant n < 25$.

Приметимо да $n!$ можемо записати као

$$n! = x \cdot \prod_{0\leqslant i\leqslant 3} (5i+1)(5i+2)(5i+3)(5i+4)(5i+5),$$

где је $x = \frac{n!}{20!}$ природан број. Даље,

$$n! = x \cdot 5^4 (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot \prod_{0 \leqslant i \leqslant 3} (5i+1)(5i+2)(5i+3)(5i+4).$$

По модулу 5^6 имамо да је $2432902008176640000 \equiv 640000 \pmod{5^6}$, те је

$$640000 \equiv 5^4 \cdot 24 \cdot x \cdot \prod_{0 \leqslant i \leqslant 3} (5i+1)(5i+2)(5i+3)(5i+4) \pmod{5^6}.$$

Како је $640000 = 64 \cdot 10^4 = 2^4 \cdot 5^4 \cdot 64$, па

$$5^6 \mid 5^4 \left(64 \cdot 16 - 24 \cdot x \cdot \prod_{0 \leqslant i \leqslant 3} (5i+1)(5i+2)(5i+3)(5i+4) \right),$$

па 5^2 дели израз у загради.

Са друге стране важи

$$(5i+1)(5i+2)(5i+3)(5i+4) \equiv 24 + 5 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot i \equiv 24 \pmod{25},$$

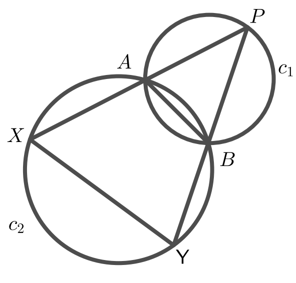
те је $\prod_{0 \leqslant i \leqslant 3} (5i+1)(5i+2)(5i+3)(5i+4) \equiv 24^4 \equiv 1 \pmod{25}$, па је

$$64 \cdot 16 - 24 \cdot x \cdot \prod_{0 \leqslant i \leqslant 3} (5i+1)(5i+2)(5i+3)(5i+4) \equiv 14 \cdot 16 + x \equiv x - 1 \pmod{25}.$$

Према томе, мора да важи $25 \mid x - 1$. С друге стране, $x \in \{1, 21, 21 \cdot 22, 21 \cdot 22 \cdot 23, 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24\}$. Ови бројеви су, редом, конгруентни са $1, -4, 12, -24, 24$ по модулу 25. Дакле, $n = 20$ или $n = 23$.

Ако би важило $n = 23$, тада би важило $3 \cdot 10^{18} > 23! > 7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10^{10} \cdot 20^4 = 5040 \cdot 72 \cdot 10^{14} \cdot 16$, што је еквивалентно са $3 \cdot 10^4 > 5040 \cdot 72 \cdot 16$, а ово није тачно. Дакле, $n = 20$.

4. Нека је $\angle PAB = \alpha$. Тада $\angle XAB = \pi - \alpha$, као и $\angle XYB = \alpha$, јер је четвороугао $XYBA$ тетиван (збир наспрамних унутрашњих углова у том четвороуглу је π).



Отуда је $\triangle PAB$ сличан са троуглом $\triangle PYX$. Следи да је $\frac{XY}{BA} = \frac{PX}{PB}$, тј. $XY = \frac{BA \cdot PX}{PB} = 18$.

Напоменимо да смо на слици кружнице k_1 и k_2 означили са c_1 и c_2, редом.

5. Збир два различита броја из скупа $A = \{1, 2, \dots, 9\}$ може бити било који цео број из скупа $\{3, 4, 5, \dots, 17\}$. Забрањени су збирови који су дељиви са 3, или са 5, или са 7, тј. $3, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 15$. Према томе, дозвољени збирови суседних бројева су тачно:

$$4,\ 8,\ 11,\ 13,\ 16,\ 17.$$

Одредимо сада дозвољене суседности (за број $x \in A$ тражимо број $y \in A$ тако да је $x + y \in \{4, 8, 11, 13, 16, 17\}$):

$$\begin{aligned}
&1 \sim 3, 7,\\
&2 \sim 6, 9,\\
&3 \sim 1, 5, 8,\\
&4 \sim 7, 9,\\
&5 \sim 3, 6, 8,\\
&6 \sim 2, 5, 7,\\
&7 \sim 1, 4, 6, 9,\\
&8 \sim 3, 5, 9,\\
&9 \sim 2, 4, 7, 8.
\end{aligned}$$

Кључна три броја која имају тачно два могућа суседа су:

1 мора бити суседан са 3 и 7;

2 мора бити суседан са 6 и 9; 4 мора бити суседан са 7 и 9.

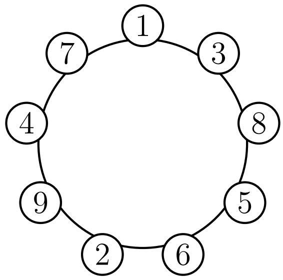
Дакле, у кружном распореду нужно важе везе:

$$(1, 3),\ (1, 7),\ (2, 6),\ (2, 9),\ (4, 7),\ (4, 9).$$

Отуда, бројеви 7 и 9 већ имају по два суседа (наиме, 7 има суседе 1 и 4, а 9 суседе 2 и 4), па више не могу бити суседни ни са једним другим бројем. Зато 6 не може бити суседан са 7 (јер је 7 већ "попуњен"), па 6 мора бити суседан са 5. Како 8 мора имати два суседа из скупа $\{3, 5, 9\}$, а број 9 већ има два суседа (то су бројеви 2 и 4), следи да број 8 мора бити суседан са 3 и 5. Стога, кружница се јединствено затвара, те добијамо распоред:

$$1,\ 3,\ 8,\ 5,\ 6,\ 2,\ 9,\ 4,\ 7$$

(у смеру супротном од казаљке на сату).



На крају, лако се проверава да су збирови суседних парова у том распореду: $1+3=4$, $3+8=11$, $8+5=13$, $5+6=11$, $6+2=8$, $2+9=11$, $9+4=13$, $4+7=11$, $7+1=8$, те ниједан није дељив са 3, 5 или 7. Дакле, такав распоред постоји (видети слику).

Трећи разред – Б категорија

1. Најпре уочимо да је дати производ облика $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$, где је

$$A=3\sin x-10, \qquad B=4\cos x, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

Зато важи

$$f(x)=(3\sin x-10)^2-(4\cos x)^2=(3\sin x-10)^2-16\cos^2 x,\ x\in\mathbb{R}.$$

Како је $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, добијамо

$$f(x)=(3\sin x-10)^2-16(1-\sin^2 x).$$

Нека је $t=\sin x$, $x\in\mathbb{R}$. Тада је $t\in[-1,1]$. Стога,

$$f(x)=(3t-10)^2-16(1-t^2)=(9t^2-60t+100)-16+16t^2=25t^2-60t+84,\ t\in[-1,1].$$

Дакле, минимизација функције f своди се на минимизацију квадратне функције

$$g(t)=25t^2-60t+84, \qquad t\in[-1,1].$$

Допуном до квадрата бинома добијамо

$$g(t)=25t^2-60t+84=(5t-6)^2+48,$$

те, да нема ограничења $t\in[-1,1]$, минимум би био 48 и постизао би се за $t=\frac{6}{5}>1$, али то није могуће, јер је $|\sin x|\le 1$, тј. $t\in[-1,1]$. Стога, како је график функције g парабола отворена навише и како је x координата темена исте већа од 1, то на сегменту $[-1,1]$ она опада, те минимум се постиже у тачки $t=1$. Зато је

$$\min_{t\in[-1,1]} g(t)=g(1)=25-60+84=49.$$

Дакле, $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 49$ и исти се постиже тачно када је $\sin x = 1$, тј. за $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Дати систем једначина је дефинисан за $x > 0$ и $y > 0$. Како важи $x^{\ln y} = y^{\ln x} = e^{\ln x \ln y}$, то из прве једначине добијамо $e^{\ln x \ln y} = 1$. Логаритмовањем обе стране последње једнакости добија се $\ln x \ln y = 0$, одакле је $x = 1$ или $y = 1$.

Уколико је $x = 1$, тада из друге једначине система имамо $1^{\ln 1} + y^{\ln y} = e + 1$, одакле је $y^{\ln y} = e$. Логаритмовањем добијамо $(\ln y)^2 = 1$, односно $\ln y = \pm 1$, одакле су решења $y = e$ или $y = e^{-1}$. Случај $y = 1$ даје аналогна решења $(e, 1)$ и $(e^{-1}, 1)$.

Дакле, решења су: $(1, e), (1, e^{-1}), (e, 1), (e^{-1}, 1)$.

3. Приметимо да не могу сва три броја p, q и r бити непарна. Заиста, тада би $p^2 + q^3$ био паран број, а r^4 непаран. Како је 2 једини паран прост број, барем један од p,q и r мора бити једнак 2. Дискутујемо три случаја.

1. $p = 2$: Важи $(r^2 - 2)(r^2 + 2) = r^4 - 4 = q^3$. Како је q прост број, следи $\{r^2-2, r^2+2\} = \{q, q^2\}$ или $\{r^2-2, r^2+2\} = \{1, q^3\}$. Одавде следи $q^2-q = 4$ или $q^3 - 1 = 4$. За $q = 2$ не важи ниједно од наведеног. За $q \geq 3$ се доказује $q^2 - q > 4$ и $q^3 - 1 > 4$. У овом случају нема решења.

2. $q = 2$: Важи $(r^2 - p)(r^2 + p) = r^4 - p^2 = 8$. Одавде је $r^2 + p \leq 8$, што даје могућности $p \in \{2, 3, 5, 7\}$ и $r \in \{2\}$. Директном провером видимо да ниједна комбинација не даје решење.

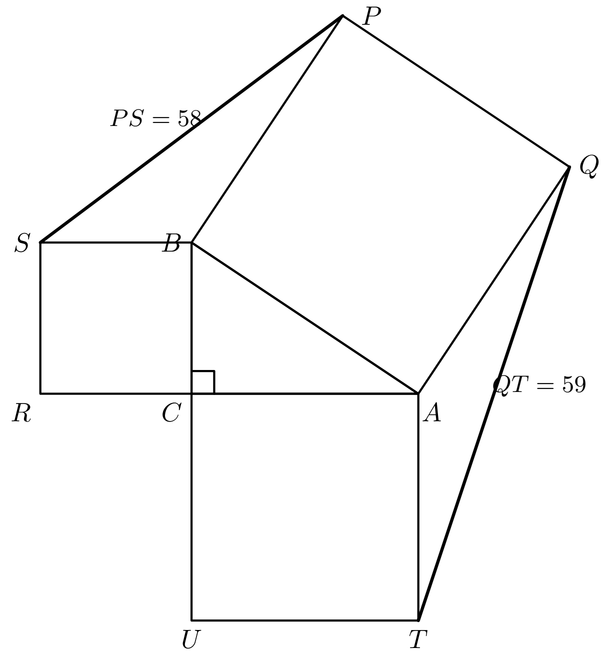
3. $r = 2$: Имамо $p^2 + q^3 = 16$. Како је $p^2 < 16$ и $q^3 < 16$, остају могућности $p \in \{2, 3\}$ и $q \in \{2\}$. Директном провером видимо да ниједна комбинација не даје решење.

4. Нека су дужине страница полазног троугла $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$. Користећи косинусну теорему, коју примењујемо на $\triangle TAQ$ и на $\triangle PBS$, добијамо:
(1) $\triangle TAQ$: Имамо

$$TA = b, \quad AQ = c, \quad \angle TAQ = 180^\circ - \angle CAB = 180^\circ - \alpha,$$

где је $\alpha = \angle CAB$, па је

$$\cos(\angle TAQ) = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{b}{c}.$$



Косинусна теорема нам даје:

$$QT^2 = TA^2 + AQ^2 - 2 \cdot TA \cdot AQ \cdot \cos(\angle TAQ).$$

$$59^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \left(\frac{b}{c}\right).$$

$$3481 = 3b^2 + c^2. \quad (1)$$

(2) $\triangle PBS$: Имамо

$$PB = c, \quad BS = a, \quad \angle PBS = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \beta,$$

где је $\beta = \angle ABC$, те је

$$\cos(\angle PBS) = \cos(180^\circ - \beta) = -\cos\beta = -\frac{a}{c}.$$

Косинусна теорема нам, тада, даје:

$$PS^2 = PB^2 + BS^2 - 2 \cdot PB \cdot BS \cdot \cos(\angle PBS).$$

$$58^2 = c^2 + a^2 + 2 \cdot c \cdot a \cdot \left(\frac{a}{c}\right).$$

$$3364 = c^2 + 3a^2. \quad (2)$$

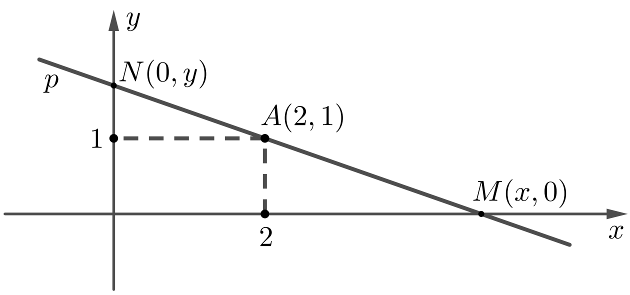
Коначно, сабирањем једнакости (1) и (2) налазимо да је $3(a^2 + b^2) + 2c^2 = 3c^2 + 2c^2 = 5c^2 = 6845$, тј. $c^2 = 1369$, тј. $c = AB = 37$.

5. Одговор: $2025 = 45^2$. Претпоставимо да су жетони тако постављени да се ниједан не може уклонити са табле. Посматрајмо произвољан жетон са табле. С обзиром на то да се он не може уклонити, закључујемо да у његовом реду постоји барем 45 жетона. Како се ниједан од тих 45 жетона не може уклонити, то у колони сваког од тих 45 жетона постоји бар 45 жетона. Према томе, на табли је не мање од $45 \cdot 45 = 2025$ жетона.

Са друге стране, попуњавањем било које подтабле величине 45×45 са 2025 жетона (остатак је празан), лако видимо да нити један од њих не можемо уклонити.

Четврти разред – Б категорија

1. Нека права p сече осе Ox и Oy у тачкама $M(x,0)$ и $N(0,y)$, редом, при чему је према поставци $x > 0$ и $y > 0$. Површина таквог троугла је $P = \dfrac{xy}{2}$. Из односа $x : y = (x-2) : 1$ добијамо $y = \frac{x}{x-2}$, а како је $y > 0$, то мора бити $x > 2$. Површина је сада $P = P(x) = \frac{x^2}{2(x-2)}$, а како је $P'(x) = \frac{x(x-4)}{2(x-2)^2}$ и $P'(x) < 0$, за $x \in (2,4)$, односно $P'(x) > 0$, за $x > 4$, то је тачка $x = 4$ минимум функције P. Површина троугла је тада $P(4) = 4$, а тражена права, која пролази кроз тачке $A(2,1)$ и $M(4,0)$, има једначину $x + 2y - 4 = 0$.



Напомена. Минимум функције $P(x)$ се могао одредити и применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине. Наиме, јасно је да мора да важи $x > 2$ и $y > 1$. Приметимо да важи

$$\frac{x^2}{2(x-2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 4 + 4}{(x-2)} = \frac{1}{2}\left(x + 2 + \frac{4}{x-2}\right) = \frac{1}{2}\left(4 + (x-2) + \frac{4}{x-2}\right).$$

За $x > 2$ је $x - 2 > 0$, те, на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине, важи

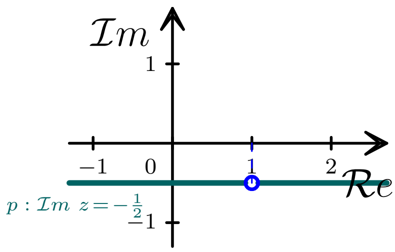
$$(x-2) + \frac{4}{x-2} \geqslant 2\sqrt{4} = 4.$$

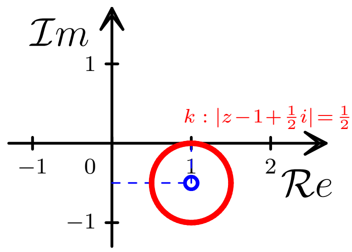
Одатле следи

$$\frac{x^2}{2(x-2)} \geqslant \frac{1}{2}(4+4) = 4,$$

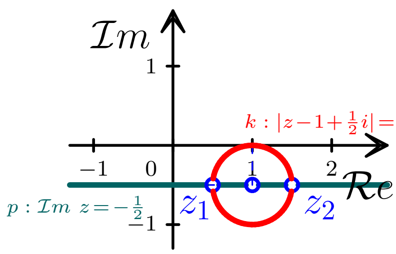
при чему једнакост важи за $x - 2 = \frac{4}{x-2}$, тј. $x = 4$ (решење једначине је и $x = 0$ које не узимамо у разматрање због услова $x > 2$).

2. Нека је $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Тада, из $z \in A = \{z : z - \overline{z} + i = 0\}$ добијамо да је $y = -\frac{1}{2}$, тј. добијамо да су у питању комплексни бројеви облика $z = t - \frac{1}{2}i$, $t \in \mathbb{R}$. Они представљају праву p: $\mathcal{I}m\ z = y = -\frac{1}{2}$ (паралелну са реалном осом) у комплексној равни (видети слику).





Аналогно, из $z \in B = \{z : \mathrm{Im}(\dfrac{1}{z-1}) = 1\}$ добијамо да је $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(x-1)+iy} \cdot \frac{(x-1)-iy}{(x-1)-iy} = \dfrac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + i\dfrac{-y}{(x-1)^2+y^2}$. Стога, једначина $\mathcal{I}m\ \dfrac{1}{z-1} = 1$ се своди на $\dfrac{-y}{(x-1)^2+y^2} = 1$, тј. $(x-1)^2 + y^2 = -y$, тј. $(x-1)^2 + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, односно $(x-1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, што значи да скуп $B = \{z \mid \mathcal{I}m\ \dfrac{1}{z-1} = 1\}$ у комплексној равни одређује кружницу k са центром у тачки $1 - \frac{1}{2}i$ и полупречника $\frac{1}{2}$ (видети слику изнад).



Дакле, решење полазног система једначина $z - \overline{z} + i = 0$ и $\mathcal{I}m\ \dfrac{1}{z-1} = 1$ је скуп $A \cap B$, а то су комплексни бројеви $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ и $z_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$.

3. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Дељењем обе стране једначине са n добијамо:

$$(n-1)! + 1 = n^{n-1}.$$

Прво, приметимо да $n = 1$ није решење, а $n = 2$ јесте решење. Даље, за $n \geqslant 3$ имамо

$$(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) < (n-1) \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdots (n-1) = (n-1)^{n-1}.$$

Са друге стране важи и

$$n^{n-1} - (n-1)^{n-1} = n^{n-2} + n^{n-3}(n-1) + \cdots + n(n-1)^{n-3} + (n-1)^{n-2}.$$

Јасно је да је за $n \geqslant 3$ овај израз већи од 1, па других решења нема. Напоменимо да смо овде користили познати идентитет:

$$a^k - b^k = (a-b)\big(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}\big),\ a,\ b \in \mathbb{R},\ k \geq 2.$$

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Као у првом решењу, једначина је еквивалентна са $(n-1)! + 1 = n^{n-1}$. Докажимо принципом математичке индукције да за $n \geqslant 3$ важи

$$(n-1)! + 1 < n^{n-1}.$$

База: за $n = 3$ тврђење је тачно јер је $(3-1)! + 1 < 3^2$.
Индуктивна хипотеза: Нека за неко $n \geqslant 3$ важи

$$(n-1)! + 1 < n^{n-1}.$$

Индуктивни корак: Користећи индуктивну хипотезу добијамо је

$$n! + 1 = n(n-1)! + 1 < n(n^{n-1} - 1) + 1 = n^n - n + 1.$$

Како је $n \geqslant 3$, то је $-n + 1 < 0$, па је $n^n - n + 1 < n^n$. Коначно, како је $n^n < (n+1)^n$, то спајањем претходних неједнакости добијамо

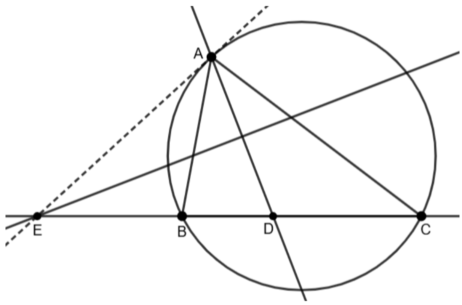
$$n! + 1 < n^n - n + 1 < n^n < (n+1)^n.$$

Дакле, на основу принципа математичке индукције закључујемо да за $n \geqslant 3$ важи

$$(n-1)! + 1 < n^{n-1}.$$

Провером случајева $n = 1$ и $n = 2$ установљавамо да је $n = 2$ једино решење задатка.

4. Уведимо стандардне ознаке за углове троугла ABC: $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ и $\angle ACB = \gamma$. Тада је $\angle ADE = \angle DAC + \angle DCA = \dfrac{\alpha}{2} + \gamma$, као спољашњи угао троугла ADC. С друге стране, како је E на симетрали дужи AD, то је $AE = DE$, па је $\angle DAE = \angle ADE = \dfrac{\alpha}{2} + \gamma$. Сада лако добијамо $\angle EAB = \angle DAE - \angle BAD = \gamma$. Коначно, како је $\angle EAB = \angle ACB = \gamma$, то је AE тангента описаног круга око троугла ABC.



5. За сваког такмичара, број поена је $\frac{1}{2}a+b$, где је a број нерешених партија које је играч одиграо, а b број победа, одатле следи да такмичар има цео број поена ако и само ако је број нерешених партија паран. Даље решење зависи од парности броја n, тј. броја играча.

1° n је непаран: Тада сваки играч игра укупно $n-1$ партија, а број $n-1$ је паран. Зато је могуће да све партије на турниру буду нерешене. У том случају, сваки играч има паран број ремија, па самим тим и цео број поена. Како нема више партија од $\frac{n(n-1)}{2}$, што је укупан број партија на турниру, овај број, тј. $\frac{n(n-1)}{2}$, представља највећи могући број нерешених партија у овом случају.

2° n је паран: Аналогно, сваки играч игра тачно $n-1$ партија, што је непаран број. Стога, играч не може имати све партије нерешене, јер би тада имао непаран број ремија. Са друге стране, највећи паран број који је мањи од $n-1$ јесте $n-2$, те сваки играч може имати највише $n-2$ нерешене партије.

Ово се може остварити тако што, на пример, играче упаримо:

$$(1,2),(3,4),\ldots,(n-1,n),$$

и нека у сваком од ових парова партија буде одлучена (није нерешено), док су све остале партије нерешене. Тада сваки играч има тачно једну одлучену партију (победа или пораз) и $n-2$ нерешене партије, што је паран број, те сви играчи имају цео број поена. Дакле, у овом случају добијамо да је $\frac{n(n-2)}{2}$ највећи могући број нерешених партија.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

1. Очигледно важи

$$(a^2-b^2)(ab-1)=0 \iff (a-b)(a+b)(ab-1)=0,$$

одакле закључујемо да је

$$a\,\rho\,b \iff a=b \quad \text{или} \quad a=-b \quad \text{или} \quad ab=1.$$

Стога, релацију ρ можемо представити таблицом (0 означава да елементи нису у релацији, док 1 означава да су елементи у релацији):

ϱ	0	1	-1	2	$\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{3}$
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
-1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	1	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	0	0	1	1	0	1	0	0
-2	0	0	0	1	0	1	1	0	0
$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	1	1	1	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	1	1
$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0	0	0	1	1

(a) Испитајмо особине релације ρ.

Рефлексивност: Јасно је да за свако $a \in A$ важи $a=a$, те је

$$(a^2-a^2)(a^2-1)=0,$$

односно $a\rho a$, тј. релација ρ је рефлексивна.

Симетричност: Ако је $a\,\rho\,b$, тада важи барем једна од следећих импликација:

$$a=b \;\Rightarrow\; b=a,$$

$$a=-b \;\Rightarrow\; b=-a,$$

$$ab=1 \;\Rightarrow\; ba=1.$$

У сва три случаја једноставно закључујемо да произилази $b\,\rho\,a$, тј. релација ρ је симетрична.

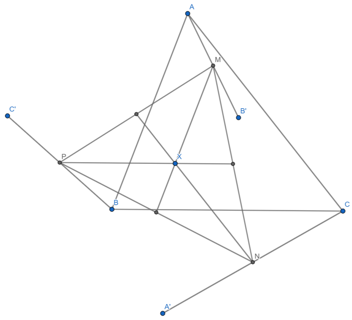
Антисиметричност: Посматрајмо елементе $a = 1$ и $b = -1$ скупа A. Тада је
$$1\,\rho -1 \quad \text{и} \quad -1\,\rho\,1,$$
тј. $a\,\rho\,b$ и $b\,\rho\,a$, јер је $1 = -(-1)$. Међутим, $a = 1 \neq -1 = b$. Дакле, релација ρ није антисиметрична.

Транзитивност. Посматрајмо, сада, елементе $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$ и $c = -\frac{1}{2}$ скупа A. Важи:
$$2\,\rho\,\frac{1}{2} \quad (\text{jep je } 2\cdot\frac{1}{2} = 1),\ \frac{1}{2}\ \rho\ -\frac{1}{2} \quad (\text{jep je } \frac{1}{2} = -(-\frac{1}{2})).$$
Међутим,
$$2 \not\rho -\frac{1}{2},$$
јер није испуњена нити једна од једнакости:
$$2 = -\frac{1}{2}, \qquad 2 = -(-\frac{1}{2}), \qquad 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$$
Дакле, релација ρ није транзитивна.

(б) С обзиром да релација ρ није транзитивна, она није релација еквиваленције. Са друге стране, ако дефинишемо подскуп ρ_1 скупа $A \times A$ са
$$\rho_1 = \left\{\left(2, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -2\right), \left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 2\right)\right\},$$
тада релација
$$\tilde{\rho} = \rho \cup \rho_1$$
постаје транзитивна (проверити - рефлексивност и симетричност остају на снази), одакле закључујемо да је релација $\tilde{\rho}$ релација еквиваленције.

2. Задатак ћемо решити уз помоћ вектора и основне карактеризације тежишта троугла. За тачку Y, која представља тежиште троугла ΔMNP, важи
$$6\overrightarrow{AY} = 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{AP} = (\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB'}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC'}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}).$$

Са друге стране имамо:
$$6\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{AX} + 2\overrightarrow{AX} + 2\overrightarrow{AX} = (\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA'}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'}),$$
те је $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AY}$, па се тачке X и Y поклапају, тј. $X = Y$. Самим тим је тачка X тежиште троугла ΔMNP.



3. Ана има победничку стратегију. Након сваког потеза, она ће остављати Бојану број који је дељив са 10. На почетку, Ана брише 2025 са табле и записује број $2025 - 5 = 2020$. Тиме Ана оставља Бојану број који је дељив са 10, па како Бојан не може да одузме 0 од њега, он ће Ани оставити на табли број који сигурно није дељив са 10. Стога, Ана понавља поступак одузимања задње цифре броја ма како Бојан играо.

Након коначног броја корака, на табли ће бити записан број 10 и тада ће Бојан бити на потезу. Бојан записује број 9 на табли и тада Ана записује број $9 - 9 = 0$, чиме побеђује у игри.

4. Перица јесте успео да на табли запише сваки природан број. Заиста, нека је n произвољан природан број и нека је његов декадни запис $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1}$. Означимо са $s = \sum_{i=1}^{k} a_i$ збир цифара броја n. Очигледно је $10^k > s$. Тада, број

$$\overline{\underbrace{111\ldots11}_{10^k - s} a_k a_{k-1} \ldots a_1}$$

има збир цифара 10^k и k-тоцифрени завршетак једнак n, па ће Перица на табли записати управо број n.

5. Приметимо да је лева страна не мања од 3, па је $b > 0$. Претпоставимо прво да је и $a > 0$. Посматрајмо обе стране дате једнакости по модулу 3. Тада је

$$1 + 3^a + 2025^b \equiv 1 + 0 + 0 \equiv 1 \pmod 3, \text{ као и } 2027^b \equiv (-1)^b \pmod 3.$$

Одавде је b паран број из $\mathbb{N}$. Слично, посматрањем обе стране дате једнакости по модулу 8 добијамо

$$1 + 3^a + 2025^b \equiv 1 + 3^a + 1 \equiv 2 + 3^a \pmod 8, \text{ као и } 2027^b \equiv 3^b \pmod 8.$$

Како је $3^2 = 9 \equiv 1 \pmod 8$, то је $3^b \equiv 1 \pmod 8$, за сваки паран природан број b. Међутим, лева страна је по истом модулу конгруентна са $2+3^a$, што је конгруентно са 3 или 5 по модулу 8. Дакле, у овом случају нема решења. Следи, $a = 0$, па би за $b > 1$ важило

$$2 = 2027^b - 2025^b$$

$$= (2027 - 2025)(2027^{b-1} + 2027^{b-2} \cdot 2025 + \ldots + 2027 \cdot 2025^{b-2} + 2025^{b-1}) > 2.$$

Коначно, провером налазимо да је једино решење задатка $(a, b) = (0, 1)$.

Други разред – А категорија

1. Нека је L израз који се налази са леве стране неједнакости у поставци задатка. Тада, по АГ неједнакости примењеној на три сабирка у изразу L, имамо да важи

$$L \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{2^{x^2+yz+y^2+zx+z^2+xy}}{(zx+xy)(xy+yz)(yz+zx)}}.$$

С обзиром да важи $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geqslant 0$, добијамо да је $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$, одакле је

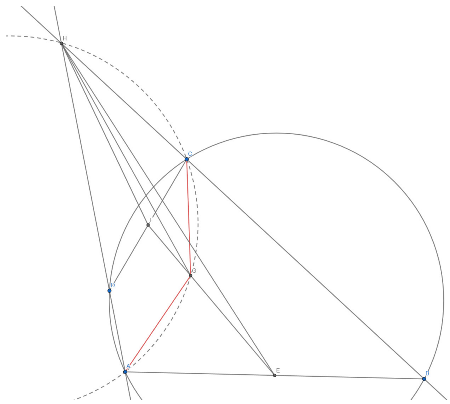
$$L \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{2^{2(xy+yz+zx)}}{(zx+xy)(xy+yz)(yz+zx)}} = 3\sqrt[3]{\frac{2^6}{(zx+xy)(xy+yz)(yz+zx)}}.$$

Примењујући, поново, АГ неједнакост на чиниоце у имениоцу, те користећи услов задатка, добијамо

$$\sqrt[3]{(zx+xy)(xy+yz)(yz+zx)} \leqslant \frac{(zx+xy)+(xy+yz)+(yz+zx)}{3} = \frac{6}{3} = 2,$$

одакле налазимо да је $L \geqslant 3 \cdot \dfrac{2^2}{2} = 6$, чиме је доказ завршен. Напоменимо да једнакост важи ако и само ако је $x = y = z = 1$.

2. Нека је тачка H пресек правих AD и BC. Како је четвороугао $ABCD$ тетиван, знамо да је $\angle CDH = \beta$ и $\angle DCH = \alpha$, одакле закључујемо да је ΔHAB сличан са ΔHCD. Како су E и F средишта одговарајућих страница у сличним троуглима, имамо да је ΔHEB сличан са ΔHFD, одакле налазимо да је $\angle DHF = \angle BHE\,(*)$, као и $\frac{HF}{HE} = \frac{DF}{BE} = \frac{CD}{AB} = \frac{FG}{GE}$, па на основу обрнуте теореме о симетрали угла имамо да је HG симетрала $\angle FHE$. Дакле, $\angle FHG = \angle EHG$, а због $(*)$, добијамо $\angle AHG = \angle CHG$, односно да је HG симетрала $\angle AHC$. Посматрајмо, сада, описани круг ΔHAC. Нека исти симетрала $\angle AHC$ сече у тачки G'. Тада знамо да је тачка G' средиште мањег лука AC, Односно $AG' = CG'$, а како имамо и $AG = CG$, те да су тачке G, G' са исте стране праве AC, закључујемо $G = G'$. Стога је $\angle AGC = 180^\circ - \angle AHC = \alpha + \beta$.



Напомена. Уколико је $AD \parallel BC$, тада је четвороугао $ABCD$ трапезе, одакле тривијално добијамо тврђење.

3. Очигледно је $k > 0$. Докажимо да $k = 1$ задовоиљава услове задатка, тј. да избацивањем највише једног члана добијамо низ са траженим својством. Доказ изводимо индукцијом по n, при чему случајеви $n = 1$ и $n = 2$ тривијално важе. Претпоставимо да имамо низ дужине $n > 2$. Ако је $a_1 = 0$ или $a_n = 0$, применом индуктивне хипотезе на низ $a_2, \dots, a_n$, односно на низ $a_1, \dots, a_{n-1}$, завршавамо индуктивни корак. Даље, ако постоји $i < n$ са својством да је $a_i = a_{i+1}$, можемо применити индуктивну хипотезу на низ без чланова a_i, a_{i+1}, па онда вратити ова два члана. Приметимо да тиме нисмо пореметили тражену суму, одакле закључујемо да тврђење важи. Остао је случај $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) = (1, 0, 1, \dots, 1, 0, 1)$. Очигледно је да тада n мора бити непарно, те је довољно избацити члан $a_{\frac{n+1}{2}}$, чиме је доказ завршен.

4. Нека је $S_k = \{f^k(1), f^k(2), \dots, f^k(2025)\}$, за $k \in \mathbb{N}_0$, при чему је $S_0 = \{1, 2, \dots, 2025\} = A$. За сваки елемент $x \in A = S_0$ функција f одређује његов следбеник $f(x)$. Број x је претходник броја y ако важи $f(x) = y$. Очигледно је да један број може имати више претходника, али (пошто је f функција - једнозначна је) сваки број има тачно једног следбеника.

Јасно је да скуп S_{k+1} добијамо из скупа S_k тако што сваки елемент $x \in S_k$ заменимо његовим следбеником $f(x)$. Другим речима,

$$S_{k+1} = f(S_k) = \{f(x) : x \in S_k\}.$$

Приметимо да елемент $y \in S_k$ се не појављује у скупу S_{k+1} ако и само ако нема претходника у скупу S_k, тј. ако не постоји $x \in S_k$ такав да је $f(x) = y$. Такве елементе ћемо звати листовима (прецизније, листовима у скупу S_k). Ако нема листова, скуп постаје сталан, тј. функцијом f иде у себе. Претпоставимо да у неком кораку, при прелазу $S_k \to S_{k+1}$ функцијом f, ниједан елемент из S_k није лист. То значи да сваки $y \in S_k$ има бар једног претходника у S_k, тј. постоје $x \in S_k$ са $f(x) = y$. Дакле, пресликавање $f : S_k \to S_k$ је сурјективно. Како је S_k коначан скуп, из сурјективности следи и његова ињективност, па је $f : S_k \to S_k$, заправо, бијекција у том случају. Отуда,

$$S_{k+1} = f(S_k) = S_k.$$

Даље, тривијалном индукцијом добијамо да је

$$S_k = S_{k+1} = S_{k+2} = S_{k+3} = \cdots ,$$

дакле, од тог тренутка надаље скуп се више не мења деловањем функције f (достиже се такозвани фиксни скуп). Међутим, фиксни скуп мора настати најкасније до 2024. корака. Ако у неком кораку постоји барем један лист, тада тај лист нестаје у следећем скупу, па се број елемената строго смањује:

$$|S_{k+1}| < |S_k|.$$

Пошто је $|S_0| = 2025$, такво строго смањивање може да се догоди највише 2024 пута, јер скупови S_k никада нису празни (на пример, увек садрже елемент $f^k(1)$). Зато, најкасније до корака $k = 2024$, мора наступити ситуација без листова, тј. мора се достићи фиксни скуп.

Када се фиксни скуп једном достигне, он остаје исти у свим наредним корацима, па посебно важи

$$S_{2024} = S_{2025}.$$

што значи да је

$$\{f^{2024}(1), f^{2024}(2), \ldots, f^{2024}(2025)\} = \{f^{2025}(1), f^{2025}(2), \ldots, f^{2025}(2025)\},$$

што је и требало доказати.

5. Претпоставимо да постоји такав природан број x, тј. да је $x = m^2$, за неко $m \in \mathbb{N}$. Тада је

$$11111111111 \cdot 10^9 \leqslant x < 11111111111 \cdot 10^9 + 10^9,$$

што је еквивалентно са

$$99999999999 \cdot 10^9 \leqslant 9x < 99999999999 \cdot 10^9 + 9 \cdot 10^9$$

$$\Leftrightarrow (10^{11} - 1) \cdot 10^9 \leqslant 9x < (10^{11} - 1) \cdot 10^9 + 9 \cdot 10^9.$$

С друге стране, приметимо да је

$$(10^{10} - 1)^2 = 10^{20} - 2 \cdot 10^{10} + 1 < (10^{11} - 1) \cdot 10^9 \leqslant 9x,$$

као и

$$(10^{10} + 1)^2 = 10^{20} + 2 \cdot 10^{10} + 1 > 10^{20} + 8 \cdot 10^9 > 9x,$$

те је

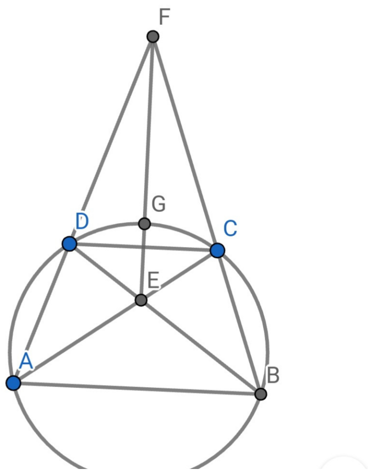
$$(10^{10}-1)^2 < 9x = (3m)^2 < (10^{10}+1)^2,$$

одакле следи да је $3m = 10^{10}$. Но, ова једначина, тј. једначина $3m = 10^{10}$, нема решења по m у скупу $\mathbb{N}$, јер број 10^{10} није дељив са 3. Дакле, такав број x не постоји.

Трећи разред – А категорија

1. Дакле, треба наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за које је $f(x(x+y)) = x^2 + yf(x)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Уврштањем $(x, y) = (0, 0)$ у последњу једнакост добијамо $f(0) = 0$. Уврштањем, затим, $(x, y) = (x, -x)$, за $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, имамо $f(0) = x^2 - xf(x)$, односно $xf(x) = x^2 \iff f(x) = x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Дакле, $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, и лако се проверава да та функција задовољава услове задатк

2. Праве AG и BG су симетрале углова DAE и CBE, редом, па је по теореми о симетрали угла $\frac{AE}{AF} = \frac{BE}{BF} = \frac{EG}{GF}$. Знамо да су троуглови BDF и CAF слични, те је $\frac{AF}{BF} = \frac{AC}{BD}$.



Комбиновањем претходне две једнакости добијамо $\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BD} = \frac{AE+EC}{BE+ED}$, одакле је $\frac{AE}{BE} = \frac{EC}{ED}$. Са друге стране, из сличности троуглова AED и BEC налазимо да је $\frac{AE}{BE} = \frac{ED}{EC}$. Стога, закључујемо да је $ED = EC$, одакле добијамо да је $AE = BE$ и $AB \parallel CD$, чиме је доказ завршен.

3. Важи да је $a_{n+1}^2 - 90a_na_{n+1} + a_n^2 - 1 = 0$ и $a_{n+2}^2 - 90a_{n+1}a_{n+2} + a_{n+1}^2 - 1 = 0$. Одузимањем прве од друге једначине добијамо да је $a_{n+2}^2 - a_n^2 - 90a_{n+1}a_{n+2} + 90a_na_{n+1} = 0$, односно $(a_{n+2} - a_n)(a_{n+2} + a_n - 90a_{n+1}) = 0$. Како је низ (a_n)

строго растући (јер је $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, одакле се добија да је $a_{n+1} - a_n > 0$), мора важити и $a_{n+2} = 90a_{n+1} - a_n$, те како је $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, принципом математичке индукције, тривијално добијамо да је сваки члан низа (a_n) цео број. Из добијене релације следи да 90 дели $a_{n+2} - a_n$, а како је је $a_0 = 0$, индукцијом добијамо да 90 дели a_{2n} за све природне бројеве n.

4. Одговор је $\frac{p-1}{2}$. Приметимо да два суседна броја не могу дати исти остатак при дељењу са p, јер би онда $a_i \equiv a_{i+2} \pmod p$, за неко i, што је немогуће. Зато није могуће да тражени максимум буде већи од $\frac{p-1}{2}$.

Докажимо сада да је могуће постићи $\frac{p-1}{2}$. У том циљу, изаберимо x тако да не постоји нити један природан број a за који је $a^2 \equiv x \pmod p$. Свакако, овакво x је могуће изабрати, јер је, на пример, $1^2 \equiv (-1)^2 \pmod p$. Поделимо бројеве a_i у парове тако да производ бројева у пару даје остатак x при дељењу са p. Конкретно, у пару са бројем a је број $a^{-1}x \pmod p$. На основу избора броја x знамо да ниједан број неће бити упарен сам са собом, те смо формирали $\frac{p-1}{2}$ дисјунктних парова и њих можемо ставити на прве две позиције пермутације, затим на трећу и четврту и тако даље, редом. Овим је доказ завршен.

5. Одговор је свако $n \in \mathbb{N}$, при чему n није потпун степен неког простог броја.

Посматрајмо граф $G_n = (V_n, E_n)$, где је $V_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ скуп чворова, док је скуп грана E_n одређен на основу захтева: $[i, j] \in E_n$ ако и само ако $(i + j, n) > 1$. Поставка задатка је еквивалентна одређивању свих $n \in \mathbb{N}$ за које је G_n повезан граф. Решење ћемо комплетирати уз помоћ следеће три леме.

Лема 1: Ако је $n = p$ прост број, тада G_n није повезан граф.
Доказ: Приметимо да важи $(1, p) = (2, p) = \ldots = (p - 1, p) = 1$, па чвор p није повезан ни са једним другим чвором графа. $\square$

Лема 2: Ако је $n = p^k$, где је p прост број, а $k \geq 2$ природан број, тада граф G_n није повезан.
Доказ: Посматрајмо чворове $p, 2p, 3p, \ldots, p^2, (p + 1)p, \ldots, p^k$ (односно све чворове чија ознака је дељива са p). Они су сви међусобно повезани. Произвољно изаберимо неки од осталих чворова и нека је то чвор i. Чвор i не може бити повезан нити са једним чвором облика mp, јер би тада важило $(i + mp, p^k) > 1$, тј. $p | i + mp$, тј. $p | i$, што је немогуће. $\square$

Дакле, доказали смо да за вредности n које су степени простог броја, граф G_n није повезан. Преостаје нам да докажемо да за све остале вредности n, граф G_n јесте повезан.

Лема 3: Нека је n природан број који има барем два различита проста делиоца p и q. Тада је граф G_n повезан.
Доказ: Нека је $n = pqs$ за $s \in \mathbb{N}$. Посматрајмо чворове $q, 2q, \ldots, pq$ - они су сви међусобно повезани. Произвољно изаберимо неки од осталих чворова и нека је то чвор i. Доказаћемо да је чвор i повезан са барем једним

чвором из скупа $q, 2q, \ldots, pq$. Приметимо да скуп $q, 2q, \ldots, pq$ чини потпун систем остатака по модулу p. Самим тим, постоји неко $k \in \{1, \ldots, p\}$ тако да је $kq \equiv -i \pmod p$, односно $p | (kq+i)$, тј. $kq + i = mp$. Због тога је $(kq+i, n) = (mp, pqs) = p \cdot (m, qs) > 1$. Сада је лако показати да за свака два чвора i, j постоји $[i, j]$ пут у G_n. Разликујемо три случаја:

1. чворови i и j су облика kq, $1 \le k \le p$: тада су i и j повезани граном.
2. тачно један од чворова i и j је облика kq, $1 \le k \le p$: Нека је $i = kq$, за $1 \le k \le p$, на пример. По претходно доказаном, постоји m тако да је $[j, mq] \in E_n$, $1 \le m \le p$. Разликоваћемо, стога, два подслучаја:
   (а) $m = k$: тада су чворови i и j повезани граном.
   (б) $m \neq k$: Тада имамо пут, који спаја чворове i и j, настао надовезивањем грана $[kq, mq]$ и $[mq, j]$, јер је $i = kq$.
3. Ниједан од чворова i и j није облика kq, $1 \le k \le p$: Тада постоје k, m, при чему је $1 \le k, m \le p$, такви да $[i, kq], [j, mq] \in E_n$. Аналогно, ако је:
   (а) $m = k$, тада имамо пут, који спаја чворове i и j, насттао надовезивањем грана $[i, kq]$ и $[mq, j]$, јер је $kq = mq$.
   (б) $m \neq k$, тада имамо пут, који спаја чворове i и j, надовезивањем грана $[i, kq]$, $[kq, mq]$ и $[mq, j]$.

Четврти разред – А категорија

1. Користићемо стандардну ознаку $v_p(t)$, за p-адичку валуацију (највећи степен простог броја p који дели $t \in \mathbb{N}$). Показаћемо сада једну корисну лему на коју ћемо се позивати у решењу.

Лема: Ако су $c, d \in \mathbb{N}$, $c, d \ge 2$, и $p, q \in \mathbb{N}$ такви да важи $c^p = d^q$, тада постоји $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$, и постоје узајамно прости природни бројеви a и b такви да је $c = k^a$ и $d = k^b$.
Доказ: За сваки прост број r важи

$$v_r(c^p) = p v_r(c), \qquad v_r(d^q) = q v_r(d),$$

одакле, из $c^p = d^q$, следи $p v_r(c) = q v_r(d)$, за свако такво r. Нека је $g = (p, q)$. Тада је $p = gb$ и $q = ga$, за неке природне бројеве a и b, $(a, b) = 1$. Следи $b\, v_r(c) = a\, v_r(d)$, за сваки прост број r, те како је $(a, b) = 1$, добијамо да $a \mid v_r(c)$, одакле закључујемо да постоји цео број u_r, $u_r \ge 0$, такав да је $v_r(c) = a\, u_r$. Стога, $v_r(d) = b\, u_r$. Дефинишимо

$$k = \prod_r r^{u_r},$$

где производ узима по свим простим бројевима (само коначно много бројева u_r је различито од нула). Тада је

$$c = \prod_r r^{v_r(c)} = \prod_r r^{au_r} = k^a, \qquad d = \prod_r r^{v_r(d)} = \prod_r r^{bu_r} = k^b.$$

$\square$

У наставку, за сваки природан број $k \geq 2$, нека је

$$k = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i} \qquad (\alpha_i \in \mathbb{N}),$$

факторизација тог броја преко његових простих фактора, одакле следи да је за свако $t \in \mathbb{N}$ испуњено

$$\tau(k^t) = \prod_{i=1}^{s} (\alpha_i t + 1).$$

Пређимо сада на изворни проблем.

(a) Претпоставимо да важи

$$m^{\tau(m)} = n^{\tau(n)}.$$

Ако је $m = 1$, тада је лева страна једнакости једнака 1, па мора бити и $n = 1$. Дакле, у овом случају нема различитих решења. Аналогно поступамо за $n = 1$. Стога, нека су зато $m, n \geq 2$. Примењујући Лему на једнакост $m^{\tau(m)} = n^{\tau(n)}$, добијамо да постоје $k \geq 2$ и узајамно прости природни бројеви a и b такви да је

$$m = k^a, \qquad n = k^b.$$

Убацивањем у полазну једнакост добијамо

$$(k^a)^{\tau(k^a)} = (k^b)^{\tau(k^b)} \quad \Longrightarrow \quad a\,\tau(k^a) = b\,\tau(k^b).$$

Како је $\tau(k^t) = \prod_{i=1}^{s} (\alpha_i t + 1)$, од интереса ће бити да уведемо функцију:

$$F(t) = t\,\tau(k^t) = t \prod_{i=1}^{s} (\alpha_i t + 1),\ t \in \mathbb{N}.$$

Јасно је да ако је $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$, да је тада $\alpha_i t_1 + 1 < \alpha_i t_2 + 1$, за свако $1 \leq i \leq n$, па је

$$F(t_1) = t_1 \prod_{i=1}^{s} (\alpha_i t_1 + 1) \ < \ t_2 \prod_{i=1}^{s} (\alpha_i t_2 + 1) = F(t_2).$$

Дакле, функција F је строго растућа на $\mathbb{N}$, те како је $a\,\tau(k^a) = b\,\tau(k^b)$, то је $F(a) = F(b)$, одакле следи $a = b$, односно $m = n$. Дакле, различити m и n у овом делу не постоје.

(б) Претпоставимо, сада, да важи

$$m^{\tau(n)} = n^{\tau(m)}.$$

Као и у првом делу задатка, ако је $m = 1$, тада је лева страна једнакости једнака 1, па мора бити $n = 1$. Исто важи у симетричном случају, тј. за $n = 1$. Дакле, нека су, поново, $m, n \geq 2$.

Применићемо доказану Лему на једнакост $m^{\tau(n)} = n^{\tau(m)}$. У овом случају добијамо да постоје $k \geq 2$ и узајамно прости природни бројеви a и b такви да је

$$m = k^a, \qquad n = k^b.$$

Тада, полазна једнакост постаје:

$$(k^a)^{\tau(k^b)} = (k^b)^{\tau(k^a)} \quad \Longrightarrow \quad a\,\tau(k^b) = b\,\tau(k^a).$$

Како је $(a, b) = 1$, закључујемо да $a \mid \tau(k^a)$. Покажимо да је то могуће само за $a = 1$.

Заиста, нека је r прост делилац броја a (ако је $a \geq 2$, такав прост број r постоји) и $k = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, за неко $s \in \mathbb{N}$. За сваки i имамо да је

$$\alpha_i a + 1 \equiv 1 \pmod r,$$

јер из $r \mid a$ следи да је $\alpha_i a \equiv 0 \pmod r$. Дакле, r не дели ниједан фактор облика $\alpha_i a + 1$, па не дели ни њихов производ, тј. важи

$$r \nmid \prod_{i=1}^{s} (\alpha_i a + 1) = \tau(k^a).$$

Међутим, $r \mid a$, па из услова $a \mid \tau(k^a)$ следи да $r \mid \tau(k^a)$, што је контрадикција. Према томе, мора бити $a = 1$.

Слично, важи да је и $b = 1$, одакле је

$$m = k^a = k, \qquad n = k^b = k,$$

па је и у овом случају $m = n$, тј. такви различити бројеви не постоје..

2. (а) За дати полином Q, са реалним коефицијентима, уведимо оператор коначне разлике

$$\Delta Q(x) := Q(x+1) - Q(x).$$

Докажимо да је оператор Δ сурјективан на простору реалних полинома, тј. да за сваки полином P постоји полином Q такав да је $\Delta Q(x) = P(x)$, $x \in \mathbb{R}$. У овом делу задатка тврђење ћемо показати применом принципа математичке индукције, по степену полинома P.

База индукције: Нека је $\deg P = 0$, тј. нека је $P(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$. Узмимо да је $Q(x) = cx$, $x \in \mathbb{R}$. Тада је

$$\Delta Q(x) = Q(x+1) - Q(x) = c(x+1) - cx = c = P(x).$$

Индуктивни корак: Претпоставимо да тврђење важи за све полиноме степена највише n (индуктивна хипотеза). Нека је сада P полином степена $n+1$, тј. нека је

$$P(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_{n+1} \neq 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Размотримо полином

$$R(x) := \frac{a_{n+1}}{n+2}\, x^{n+2},\ x \in \mathbb{R}.$$

Тада, користећи биномну формулу, добијамо

$$\Delta R(x) = R(x+1) - R(x) = \frac{a_{n+1}}{n+2}\big((x+1)^{n+2} - x^{n+2}\big) = a_{n+1}x^{n+1} + S(x),\ x \in \mathbb{R},$$

где је $S(x)$ неки полином степена највише n. Сада, дефинишимо

$$P_1(x) := P(x) - \big(R(x+1) - R(x)\big),\ x \in \mathbb{R}.$$

С обзиром да су водећи чланови полинома P и ΔR једнаки, следи да је $\deg P_1 \leq n$. На основу индуктивне хипотезе постоји полином Q_1 такав да је

$$P_1(x) = Q_1(x+1) - Q_1(x) = \Delta Q_1(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Коначно, ставимо да је

$$Q(x) := R(x) + Q_1(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Тада важи

$$\Delta Q(x) = \Delta R(x) + \Delta Q_1(x) = \big(R(x+1) - R(x)\big) + P_1(x) = P(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Тиме је индукција завршена, те је тврђење у делу (а) показано.

(б) Нека су Q_1 и Q_2 два полинома која одговарају истом полиному P, тј. нека је

$$\Delta Q_1(x) = Q_1(x+1) - Q_1(x) = P(x) = Q_2(x+1) - Q_2(x) = \Delta Q_2(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Одузимањем добијамо

$$\big(Q_2(x+1) - Q_1(x+1)\big) - \big(Q_2(x) - Q_1(x)\big) = 0,$$

односно, за полином

$$H(x) := Q_2(x) - Q_1(x)$$

важи $H(x+1) = H(x)$, за све $x \in \mathbb{R}$. Претпоставимо да је $\deg H = m \in \mathbb{N}_0$. Ако је $m = 0$, доказ је завршен. Стога, нека је $m \in \mathbb{N}$. Тада су реални бројеви

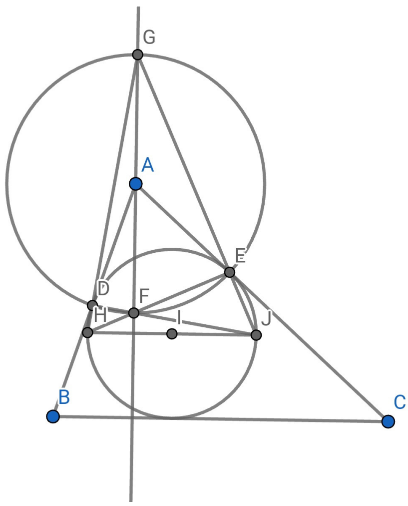
$$H(0), H(1), \ldots, H(m)$$

сви међусобно једнаки, јер из једнакости $H(x+1) = H(x)$ следи $H(0) = H(1) = \cdots = H(m)$. Посматрајмо полином

$$G(x) := H(x) - H(0),\ x \in \mathbb{R}.$$

Он је степена $m \geq 1$, а из претходног разматрања видимо да има нуле у тачкама $0, 1, \ldots, m$, тј. има барем $m+1$ различитих нула. То је могуће једино ако је полином G нула-полоном, тј. $G(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Дакле, важи $H(x) = H(0)$, $x \in \mathbb{R}$, тј. полином $H = Q_2 - Q_1$ је константан полином, што се и тврдило.

3. Нека је E додирна тачка уписане кружнице и странице AC полазног троугла и нека је G други пресек висине и кружнице са центром у тачки A, полупречника AD. Како је FG пречник те кружнице, то је $\angle GDF = \angle GEF = 90°$.

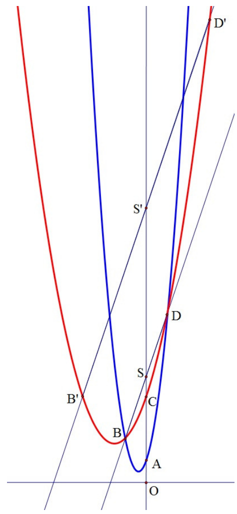


Нека је H пресек правих GD и EF, а J пресек правих GE и DF. Знамо да је F ортоцентар троугла HJG. Зато је $GF \perp HJ$, те је $HJ \parallel BC$. Кружница $ADEI$ је Ојлерова кружница троугла HJG и дуж AI је пречник исте, одакле је I средиште дужи HJ. С обзиром да је $\angle HDJ = \angle HEJ = 90°$, добијамо да је $IH = IJ = ID = IE$, па се тачке J и H налазе на уписаној кружници, чиме је доказ завршен.

Напомена. Задатак се може решавати уз помоћ рачунања углова. Ако уведемо тачку S, која је пресек паралеле са BC кроз I и уписане кружнице троугла, тако да је четвороугао $BISC$ конвексан, тада посматрањем једнакокраких троуглова DIS и DAF добијамо колинеарност тачака D, F, S.

4. Обележимо пресечне тачке датих графика са B и D, а са S средиште дужи BD. Решавањем једначине $f(x) = g(x)$, чија су решења $x = \pm 1$, добијамо x-координате тачака B и D. Како је $f(1) = a + b + c$ и $f(-1) = a - b + c$, ове

тачке, неким редом, имају координате $(1, a+b+c)$ и $(-1, a-b+c)$. Отуда је $S(0, a+c)$.



Нека је $y = kx + n_1$ једначина праве BD. На једном од графика скицираних функција одаберимо произвољну тачку $B' \neq B$ и конструишимо праву кроз B' која је паралелна правој BD. Нека та права сече одабрани график још у тачки D' и нека је S' средиште дужи $B'D'$. Како су праве BD и $B'D'$ паралелне, то је једначина праве $B'D'$ облика $y = kx + n_2$. Благодарећи Вијетовим формулама имамо да збир решења квадратне једначине $f(x) - kx - n = 0$ не зависи од n. Отуда је збир x-координата тачака B и D једнак збиру x-координата тачака B' и D', те тачке S и S' (као средишта наведених дужи) имају једнаке x-координате. Како је $S(0, a+c)$, права SS' представља y осу. Конструишимо још и x осу. Ако су A и C пресечне тачке скицираних графика са y осом (која је већ конструисана), тада су њихове y-координате једнаке, неким редом, a и c. Имајући на уму да је y-координата тачке S једнака $a+c$, закључујемо да се средишта дужи AC и SO поклапају, где је O координатни почетак. Сада из средишта дужи AC конструишемо кружницу која садржи тачку S. Други пресек те кружнице и y осе је координатни почетак O. Конструкцијом нормале на y осу, кроз тачку O, добијамо и x осу.

5. Нека је a_i број новчића узет у i-том потезу. Посматрајмо збир $A_i = a_i + a_{i+1}$. Покажимо да играч који игра у следећем потезу, тј. потезу $i+1$, може да намести да је $A_i = i+1$ или $A_i = i+2$. Очигледно је да $i+1-a_i \in \{1, 2, ..., i\}$, као и $i+2-a_i \in \{2, 3, ..., i+1\}$. Нека сада Марко игра овом стратегијом. Дакле, знамо да може да намести $A_{2i-1} = 2i$ или $A_{2i-1} = 2i+1$, те имамо да је $\sum_{i=1}^{n} 2i \leq \sum_{i=1}^{2n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} 2i+1$, односно $n(n+1) \leq \sum_{i=1}^{2n} a_i \leq (n+1)^2 - 1$. Дакле, за

$(n+1)^2-n-1 \leq N \leq (n+1)^2-1$ побеђује Марко. Иначе, ако Никола игра овом стратегијом, након свог првог потеза (у ком мора да узме један новчић), имамо $1+\sum_{i=1}^{n} 2i+1 \leq \sum_{i=1}^{2n+1} a_i \leq 1+\sum_{i=1}^{n} 2i+2$, тј. $(n+1)^2 \leq \sum_{i=1}^{2n+1} a_i \leq 1+(n+1)(n+2)$. Дакле, за $(n+1)^2 \leq N \leq (n+2)^2-(n+2)-1$ побеђује Никола.

Први разред – Б категорија

1. (а) Да би f била бијекција, мора бити инјективна и сурјективна, тј. $1-1$ и ,,НА". На интервалу $(-\infty,-1]$ функција f има облик $f(x)=|x+1|=-x-1$, те узима све вредности из $[0,+\infty)$. Слично, на интервалу $(-1,+\infty)$ функција f је задата са $f(x)=-2x+a$, те ће узети све вредности из интервала $(-\infty,a+2)$. Да би функција f била сурјективна, мора важити $[0,\infty)\cup(-\infty,a+2)=\mathbb{R}$, што је могуће само ако је $a+2\geq 0$, односно $a\geq -2$. У том случају, тј. за $a\geq -2$, функција ће бити инјективна једино за $a=-2$, јер имамо две строго монотоно опадајуће линеарне функције (прва је дефинисана за $x\leq -1$, док је друга дефинисан за $x>-1$) са дисјунктним кодоменима (који се надовезују). Дакле, једино a за које је f бијекција јесте $a=-2$.

(б) За је $a=-2$ одређујемо инверзну функцију f^{-1} функције f која има облик

$$f(x)=\begin{cases}-x-1, & x\leqslant -1,\\ -2x-2, & x>-1.\end{cases}$$

За $x\leqslant -1$ је испуњено $f(x)=-x-1\geq 0$, та за $y\geq 0$ имамо $y=-(x+1) \implies x=-y-1$. Слично, за $x>-1$ је испуњено $f(x)=-2x-2<0$, па за $y<0$ имамо $y=-2x-2 \implies x=-\frac{y+2}{2}$. Дакле, у овом случају, тј. за $a=-2$, инверзна функција $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ функције f је

$$f^{-1}(y)=\begin{cases}-y-1, & y\geqslant 0,\\ -\frac{y+2}{2}, & y<0.\end{cases}$$

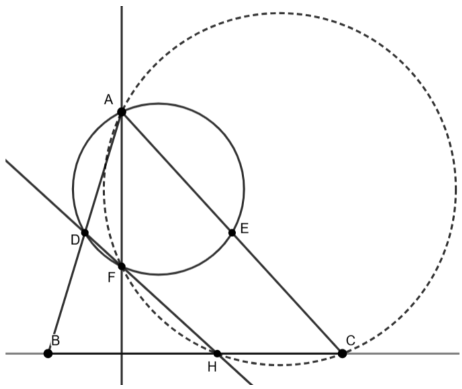
2. Поновимо да са P означавамо скуп свих простих бројева. Претпоставимо супротно, тј. да постоји 2027 различитих природних бројева $a_1,a_2,\ldots,a_{2027}$ таквих да

$$a_1\,\rho\,a_2\,\rho\,a_3\,\rho\,\cdots\,\rho\,a_{2027}\,\rho\,a_1.$$

Тада је за сваки индекс i (индексе третирамо по модулу 2027) број a_i+a_{i+1} прост. Једини паран прост број је 2, те ако би за неко i важило $a_i+a_{i+1}=2$, тада би морало бити $a_i=a_{i+1}=1$, што је немогуће, јер су сви a_i различити. Дакле, број a_i+a_{i+1} је непаран прост, за сваки индекс i, одакле закључујемо да су a_i и a_{i+1} супротне парности за свако i. Стога, парност датих бројева се мора наизменично смењивати дуж целог циклуса.

Међутим, бројева $a_1, a_2, \ldots, a_{2027}$ има непарно много (плус, кружни циклус је у питању), тј. 2027, одакле следи да бројеви a_1 и a_{2027} имају потпуно исту парност. У том случају, збир $a_{2027} + a_1$ би био паран број, а по услову мора бити прост. Дакле, поново, збир ће бити 2, тј. $a_1 = a_{2027} = 1$, што је немогуће. Зато, не постоји 2027 различитих природних бројева са траженом особином.

3. Како је права DE паралелна правој BC, јер је дуж DE средња линија троугла ABC, и како је четвороугао $ADFE$ тетиван, тврђење тривијано следи из низа једнакости: $\angle HCA = \angle DEA = \angle DFA = 180^\circ - \angle AFH$.



4. Одговор је n. Заиста, приметимо да ако изабаремо бројеве $2, 4, 6, \ldots, 2n$, који су парни, добијамо да је највећи заједнички делилац свака два различита барем 2.

Са друге стране, ако из скупа $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ изаберемо барем $n+1$ бројева, тада, по Дирихлеовом принципу, ћемо изабрати и нека два узастопна броја, а њихов највећи заједнички делилац је 1, јер, ако за $d \in \mathbb{N}$ важи $d \mid x$ и $d \mid x+1$, тада $d \mid (x+1) - x$, односно $d \mid 1$, тј. $d = 1$. Дакле, максимално n елемената полазног скупа у том случају можемо изабрати.

5. Јасно је да ће Перица, ма каквим спајањем, добити број дељив са 5. Да би такав број био потпун куб, мора бити дељив и са $5^3 = 125$, тј. да му троцифрени завршетак буде дељив са 125. Међутим, троцифрени завршетак бројева насталих спајањем картона на којима пишу бројеви 20 и 25 може бити само неки од следећих: $\overline{025}$, $\overline{525}$, $\overline{020}$ и $\overline{520}$. Ниједан од претходна три броја није дељив са 125, па је одговор негативан.

Други разред – Б категорија

1. Видимо да је дискриминанта дате квадратне функције

$$D = b^2 - 4ac.$$

Прво, приметимо да $4 \mid 4ac$ и да број b^2 даје остатке 0 или 1 при дељењу са 4. Према томе, $D \equiv 0 \pmod 4$ или $D \equiv 1 \pmod 4$. Са друге стране, избором вредности: $a = 1$, $b = 0$ и $c = -k$, где је $k \in \mathbb{Z}$ произвољан цео број, добијамо да је $D = 4k$, $k \in \mathbb{Z}$, одакле закључујемо да као резултат, тј. за вредност дискриминанте, можемо добити све целе бројеве дељиве са 4. Слично, избором $a = 1$, $b = 1$ и $c = -l$, где је $l \in \mathbb{Z}$ произвољно, имамо $D = 4l + 1$, те овај израз генерише све целе бројеве који дају остатак 1 при дељењу са 4.

Дакле, дискриминанта може узети било коју вредност из скупа $4\mathbb{Z} \cup 4\mathbb{Z} + 1$, где су $4\mathbb{Z} = \{4k : k \in \mathbb{Z}\}$ и $4\mathbb{Z} + 1 = \{4l + 1 : l \in \mathbb{Z}\}$.

2. (ПРВО РЕШЕЊЕ) После сређивања десне стране полазне једначине добијамо да је $y = 2(x + y)^2 + y^2 + xy$. Даље имамо да је $y(1 - y - x) = 2(x + y)^2$. Ставимо да је $x + y = z$. Тада је $y(1 - z) = 2z^2$. Јасно је да је $z \neq 1$, па је $y = \frac{2z^2}{1-z}$. Са друге стране, из $y(1 - z) = 2z^2 - 2 + 2$ следи да је $(1 - z)(y + 2(z + 1)) = 2$, одакле су могуће вредности за $1 - z$ бројеви $\pm 1, \pm 2$, односно $z \in \{0, 2, -1, 3\}$. Коначно, сублимирањем свега, решења дате једначине су парови $(x, y) \in \{(0, 0), (10, -8), (-2, 1), (12, -9)\}$.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Посматрајмо дату једначину као квадратну по x:

$$2x^2 + 5yx + (3y^2 - y) = 0.$$

Да би решења била цела, детерминанта мора да буде целобројна, тј. да је број

$$(5y)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (3y^2 - y) = y^2 + 8y$$

потпун квадрат. Означимо $y^2 + 8y = t^2$, $t \geqslant 0$, одакле добијамо еквивалентну једначину

$$(y + 4)^2 - t^2 = 16 \Rightarrow (y + 4 - t)(y + 4 + t) = 16.$$

Како су бројеви $y + 4 - t$ и $y + 4 + t$ цели и $y + 4 - t \leqslant y + 4 + t$, таблица завршава задатак:

$y+4-t$	$y+4+t$	$y+4$	t	y	целобројни x
1	16	$\frac{17}{2}$	$\frac{15}{2}$	није цео	–
2	8	5	3	1	$x = \frac{-5 \cdot 1 \pm 3}{4} \Rightarrow x = -2$
4	4	4	0	0	$x = \frac{0}{4} \Rightarrow x = 0$
-16	-1	$-\frac{17}{2}$	$\frac{15}{2}$	није цео	–
-8	-2	-5	3	-9	$x = \frac{45 \pm 3}{4} \Rightarrow x = 12$
-4	-4	-4	0	-8	$x = \frac{40}{4} \Rightarrow x = 10$

3. Три тачке од датих 16 можемо одабрати на укупно $\dfrac{16\cdot 15\cdot 14}{3\cdot 2\cdot 1}=560$ начина. Од овог броја морамо одузети све тројке колинеарних тачака. Приметимо да имамо 10 четворки колинеарних тачака (4 врсте, 4 колоне и 2 велике дијагонале - све су дужине 4), као и 4 тројке колинеарних тачака (4 краће, тј. споредне, дијагонале - све су дужине 3). Стога, пребројмо колинеарне тројке тачака.

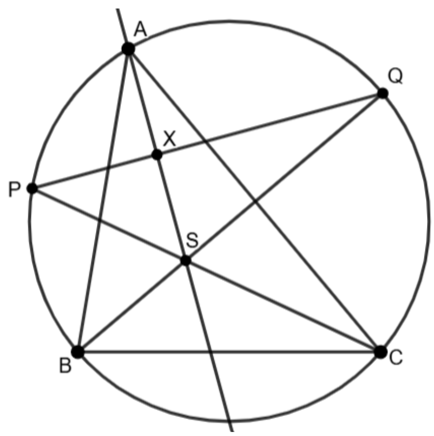
(1) Тројке које припадају некој врсти или колони решетке: У свакој од 4 врста има 4 тачке, па је допринос колинеарних тројки у том случају $4\cdot\binom{4}{3}=4\cdot 4=16$. Аналогно, за 4 колоне је још 16, тј. укупно 32.

(2) Главне дијагонале: Постоје 2 главне дијагонале дате решетке дужине 4. Свака даје допринос у броју колинеарних тројки једнак $\binom{4}{3}=4$, тј. укупно 8.

(3) Споредне дијагонале: У оквиру решетке, постоје и 4 споредне дијагонале решетке дужине 3. Свака даје допринос $\binom{3}{3}=1$ у броју колинеарних тројки, тј. укупно 4.

Коначно, узимајући у обзир све показано, укупан број троуглова ће бити једнак $560-32-8-4=516$ троуглова.

4. Познато је (а може се и лако показати рачунањем периферијских углова) да су тачке P и Q такве да су праве CP и BQ симетрале углова $\angle BCA$ и $\angle ABC$. Као што знамо, симетрале унутрашњих углова неког троугла секу се у центру уписане кружнице истог, те, стога, означимо пресечну тачку CP, BQ и s_α са S. Такође, означимо са X пресечну тачку правих PQ и s_α.



Посматрајмо троугао XSQ и израчунајмо његове унутрашње углове. Прво, имамо да је $\angle XQS=\angle PQB=\angle PCB=\frac{\gamma}{2}$, јер је права CP симетрала угла $\angle BCA=\gamma$. Угао $\angle XSQ$ је спољашњи угао $\triangle ABS$, па је једнак збиру његових несуседних унутрашњих углова, а то су, заправо, углови $\angle BAS$ и $\angle ABS$.

Из чињенице да су праве AS и BS симетрале углова $BAC=\alpha$ и

$\angle ABC = \beta$, следи да је $\angle BAS = \frac{\alpha}{2}$ и $\angle ABS = \frac{\beta}{2}$. Дакле, $\angle XSQ = \angle BAS + \angle ABS = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, те је

$$\angle SXQ = \pi - \angle XSQ - \angle XQS = \pi - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

а то управо значи да је $QX \perp XS$, односно да је $PQ \perp s_\alpha$.

5. Приметимо да одбацивање нула са краја декадног записа неког природног броја не утиче на степене тројке који се јављају у канонској факторизацији броја $n!$ (растављање на просте факторе), већ само на степене двојке и степене петице.

Претпоставимо, прво, да је $b \geq 6$. Тада имамо $9 \mid b!_0$, па је $12 + b!_0 \equiv 3 \pmod 9$. Треба испитати случајеве $a \in \{3, 4, 5\}$. Случај $a = 3$ је немогућ, јер је $3!_0 = 6$, па би требало да буде $b!_0 = -6$. Слично, случај $a = 5$ је немогућ, с обзиром да је $5!_0 = 12$, па би требало да буде $b!_0 = 0$. Коначно, ако је $a = 4$, тада је $b!_0 = 12$. Међутим, за $b \geq 6$ имамо да $9 \mid b!_0$, а знамо да број који као прве две цифре има цифре 1 и 2 (слева на десно), иза којих се налази гомила нула, није дељив са 9, јер му је збир цифара једнак 3. На крају, размотримо случај $b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. За $b = 1$ имамо $a!_0 = 13$, а ово је немогуће, јер $a = 1$ и $a = 2$ нису решења, а за $a > 2$ би овај број морао да буде дељив са 3. Из истих разлога $b = 2$ није решење. Приметимо да за свако $n \geq 7$ имамо $n!_0 \geq 3 \cdot 6 \cdot 7 = 63$. За $n \leq 6$ лако рачунамо: $1!_0 = 1$, $2!_0 = 2$, $3!_0 = 6$, $4!_0 = 24$, $5!_0 = 12$ и $6!_0 = 72$. За $b = 3$ добијамо $a!_0 = 18$, а за $b = 4$ добијамо $a!_0 = 36$, што, на основу претходног разматрања, оставља $b = 5$ као једину могућност. Стога, добијамо једино решење дате једначине пар $(a, b) = (4, 5)$.

Трећи разред – Б категорија

1. У произвољном троуглу важи $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, па је $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$. Из дате једнакости следи $1 = 2\sin\alpha\sin\beta - \cos\gamma$, па је

$$\cos(\alpha+\beta) + 2\sin\alpha\sin\beta = 1 \iff \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + 2\sin\alpha\sin\beta = 1$$

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = 1 \iff \cos(\alpha-\beta) = 1 \iff \alpha - \beta = 2k\pi, \text{ за } k \in \mathbb{Z}.$$

Како су α и β углови троугла, мора бити $k = 0$, односно $\alpha = \beta$.

2. С обзиром да је еквиваленција у питању, разматраћемо два „смера” у решењу.
($\Longrightarrow$): Нека су вектори $\vec{x}, \vec{y}$ и $\vec{z}$ линеарно независни. Претпоставимо супротно, тј. да постоји неки пар једнаких бројева (међу бројевима a, b и c). Нека је, на пример, $a = b$. Тада је $\vec{x} = \vec{y}$, тј. $1 \cdot \vec{x} + (-1) \cdot \vec{y} + 0 \cdot \vec{z} = \vec{0}$, па су вектори $\vec{x}, \vec{y}$ и $\vec{z}$ линеарно зависни, што је контрадикција.

($\Longleftarrow$): Нека су бројеви a, b и c по паровима међусобно различити. Знамо да ће вектори $\vec{x}, \vec{y}$ и $\vec{z}$ бити линеарно независни ако важи имлпикација

$$\alpha_1\vec{x} + \alpha_2\vec{y} + \alpha_3\vec{z} = \vec{0} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,$$

тј. ако важи

$$\alpha_1(1, a, a^2) + \alpha_2(1, b, b^2) + \alpha_3(1, c, c^2) = (0, 0, 0) \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Лева страна је еквивалентна систему од три једначине:

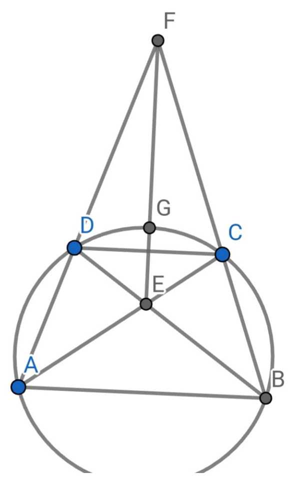
$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c &= 0 \\ \alpha_1 a^2 + \alpha_2 b^2 + \alpha_3 c^2 &= 0. \end{aligned}$$

Стога, треба показати да исти, осим тривијалног решења, тј. решења $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$, нема других. Лако рачунамо детерминанту система:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a - b)(a - c)(b - c).$$

Одавде тривијално налазимо да систем има јединствено решење ако је $D \neq 0$, тј. $(a - b)(a - c)(b - c) \neq 0$, што нам обезбеђује да су бројеви a, b и c по паровима међусобно различити, што се и тврдило у овом смеру.

3. Праве AG и BG су симетрале углова DAE и CBE редом, па је по теореми о симетрали угла $\frac{AE}{AF} = \frac{BE}{BF} = \frac{EG}{GF}$.



Знамо да су троуглови BDF и CAF слични, па је $\frac{AF}{BF} = \frac{AC}{BD}$. Комбиновањем претходне две једнакости добијамо $\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BD} = \frac{AE+EC}{BE+ED}$, одакле је $\frac{AE}{BE} = \frac{EC}{ED}$.

Са друге стране, из сличности троуглова AED и BEC знамо да је $\frac{AE}{BE} = \frac{ED}{EC}$. Стога, користећи претходно, закључујемо да је $ED = EC$, те је и $AE = BE$ и $AB \parallel CD$, чиме је доказ завршен.

4. Прво, примећујемо да ако је $y < 0$ да је тада и $z < 0$. Међутим, отуда је $2025^y \in (0,1)$ и $2026^z \in (0,1)$, те је $x^{2024} = 2026^z - 2025^y \in (-1,1)$. Како је $x \in \mathbb{Z}$, то мора бити $x = 0$. Тада остаје једначина $2025^y = 2026^z$, чије је $(0,0)$ једино решење у скупу $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Дакле, $y \geq 0$ и $z \geq 0$.

Посматрајмо једначину по модулу 4. За $z \geq 2$ је $2026^z \equiv 0 \pmod 4$, док је $2025^y \equiv 1^y \equiv 1 \pmod 4$ и $x^{2024} \in \{0,1\} \pmod 4$ (квадрат целог броја). Према томе, лева страна даје остатак 1 или 2 при дељењу са 4, док је десна дељива са 4, за $z \geq 2$. Стога, $z = 0$ или $z = 1$.

Ако је $z = 0$, тада остаје $x^{2024} + 2025^y = 1$. Сада је јасно да је једино решење ове једначине пар $(x,y) = (0,0)$. Са друге стране, ако је $z = 1$, тада остаје $x^{2024} + 2025^y = 2026$, те су једина решења ове једначине парови $(x,y) = \{(-1,1),(1,1)\}$.

Коначно, полазна једначина има три решења у скупу $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. То су тројке $(x,y,z) = \{(-1,1,1),(0,0,0),(1,1,1)\}$.

5. Одговор је позитиван. Наиме, означимо боје бројевима $1,2,\dots,2025$. Довољно је обојити тачку $(0, k\sqrt{2})$ из те равни у боју k, $1 \leq k \leq 2024$, и све остале тачке равни у боју 2025. Вредност произвољног полинома са целобројним коефицијентима у нули је цео број (вредност је његов слободни члан), односно ниједна од боја $1,2,\dots,2024$ неће припасти нити једном графику полинома са целим коефицијентима, те ће сваки такав график бити у боји 2025.

Четврти разред – Б категорија

1. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Претпоставимо да за неке $a, b \in \mathbb{N}_0$ важи $1+2^a+2025^b = (2n)^k$, где су $n, k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Како је $k > 1$, имамо $k \geq 2$, па је

$$(2n)^k = 2^k n^k \equiv 0 \pmod 4.$$

Посебно, за $k \geq 3$ важи и

$$(2n)^k \equiv 0 \pmod 8,$$

јер је тада број 2^k дељив са 8. Са друге стране, пошто је $2025 \equiv 1 \pmod 8$, следи

$$2025^b \equiv 1^b \equiv 1 \pmod 8, \qquad \text{за сваки } b \in \mathbb{N}_0.$$

Зато

$$1 + 2^a + 2025^b \equiv 1 + 2^a + 1 \equiv 2 + 2^a \pmod 8.$$

Сада посматрамо могуће остатке броја 2^a по модулу 8:

$$2^a \equiv \begin{cases} 1, & \text{ако је } a = 0, \\ 2, & \text{ако је } a = 1, \\ 4, & \text{ако је } a = 2, \\ 0, & \text{ако је } a \geq 3. \end{cases}$$

Отуда, дналазимо да је

$$2 + 2^a \equiv \begin{cases} 3 & (a = 0), \\ 4 & (a = 1), \\ 6 & (a = 2), \\ 2 & (a \geq 3), \end{cases} \pmod 8,$$

те у сваком случају важи

$$2 + 2^a \not\equiv 0 \pmod 8.$$

Дакле,

$$1 + 2^a + 2025^b \not\equiv 0 \pmod 8,$$

односно број $1 + 2^a + 2025^b$ није дељив са 8. То искључује могућност $k \geq 3$, јер би тада број $(2n)^k$ био дељив са 8, што је већ напоменуто. Дакле, мора важити $k = 2$.

За $k = 2$ проблем се своди на тражење бројева $a, b \in \mathbb{N}_0$ за које је $1 + 2^a + 2025^b = (2n)^2 = 4n^2$, за неко $n \in \mathbb{N}$. Посматрајмо ову једнакост по модулу 8, поново. Знамо да за сваки природан број n важи $4n^2 \equiv 0 \pmod 8$ или $4n^2 \equiv 4 \pmod 8$, јер је $n^2 \equiv 0 \pmod 2$ или $n^2 \equiv 1 \pmod 2$. Са друге стране, већ смо израчунали да је

$$1 + 2^a + 2025^b \equiv 2 + 2^a \pmod 8,$$

па мора важити

$$2 + 2^a \equiv 0 \pmod 8 \text{ или } 2 + 2^a \equiv 4 \pmod 8.$$

Међутим, из горе наведених разматрања видимо да је једина могућност

$$2 + 2^a \equiv 4 \pmod 8,$$

која се добија само за $a = 1$. Дакле, $a = 1$, те је

$$1 + 2 + 2025^b = 3 + 2025^b = 4n^2,$$

односно $2025^b + 3 = 4n^2$. Коначно, ако је $b = 0$, тада је $2025^0 = 1$, одакле је $1 + 2^1 + 2025^0 = 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$, што јесте степен парног броја. Дакле, $(a, b) = (1, 0)$ је решење. Нека је сада $b \geq 1$. Како је 2025 дељиво са 5, важи

$2025^b \equiv 0 \pmod 5$, па из $2025^b + 3 = 4n^2$ добијамо $5 \mid 4n^2 - 3$. Међутим, квадрати природних (целих) бројева при дељењу са 5 дају само остатке из скупа $\{0, 1, 4\}$, одакле следи да ће број $4n^2 - 3$ давати остатке који припадају скупу $\{1, 2, 3\}$ при дељењу са 5. Стога, за $b \geq 1$ број $4n^2 - 3$ не може бити дељив са 5 ни за једно n. Коначно, једино решење је пар $(a, b) = (1, 0)$.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Размотримо следеће случајеве:

1° $a = 0$: Како је 2025^b непаран број, следи да је

$$N = 1 + 2^a + 2025^b = 2 + 2025^b$$

непаран. Међутим, тражимо да N буде степен парног природног броја, па у овом случају нема решења.

2° $a \geqslant 2$: Тада је 2^a дељиво са 4, па је

$$N = 1 + 2^a + 2025^b \equiv 1 + 0 + 1^b \equiv 2 \pmod 4.$$

Дакле, N је дељив са 2, али није дељив са 4. Сваки степен парног природног броја дељив је са 4, па N у овом случају не може бити тражени степен.

3° $a = 1$: Тада је $N = 3 + 2025^b$. Како је 2025 дељиво са 3, то за $b \geqslant 2$ добијамо да је 2025^b дељиво са 9, па је

$$N = 3 + 2025^b \equiv 3 \pmod 9.$$

Дакле, N је дељив са 3, али није дељив са 9, па не може бити степен природног броја. Остаје испитати још само случајеве $b = 0$ и $b = 1$.

3.1° $b = 0$: Тада је $N = 3+1 = 4 = 2^2$, што јесте степен парног природног броја.

3.2° $b = 1$: Тада је $N = 3 + 2025 = 2028 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$, па тај број није степен неког природног броја.

Дакле, једино решење задатка је $(a, b) = (1, 0)$.

2. (ПРВО РЕШЕЊЕ) (а) Очигледно је да је домен дате функције скуп $\mathbb{R}$. Пођимо од основног тригонометријског идентитета: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Његовим квадрирањем добијамо

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x.$$

Слично, подизањем тог израза на трећи степен, добијамо

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^4 x \cos^2 x - 3\sin^2 x \cos^4 x$$

$$= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x.$$

Свеукупно, имамо

$$f_k(x) = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x + k(1 - 2\sin^2 x\cos^2 x) = (1+k) - (2k+3)\sin^2 x\cos^2 x,$$

односно

$$f_k(x) = (1+k) - (2k+3)\frac{\sin^2 2x}{4},\ x \in \mathbb{R}.$$

Сада је јасно да је домен функције цело $\mathbb{R}$. Приметимо да функција $x \mapsto \sin^2 2x$, $x \in \mathbb{R}$, узима све реалне вредности из сегмента $[0,1]$.

(б) Потребан и довољан услов да би $f_k(x) \leq 0$, на целом домену, је да у тачкама у којима је $\sin^2 2x = 0$ и $\sin^2 2x = 1$ важи $f_k(x) \leq 0$ (једна од ове две вредности је максимум функције, што зависи од знака броја $2k+3$). У тачкама у којима је $\sin^2 2x = 0$ имамо $f_k(x) = 1+k$, што даје $k \leq -1$. Слично, заменом вредности $\sin^2 2x = 1$, добијамо $k \leq -\frac{1}{4}$. Дакле, одговор је $k \in (-\infty, -1]$.

(в) Функција је константна ако и само ако је $2k+3=0$, тј. $k = -\frac{3}{2}$. Како је константна на целом скупу $\mathbb{R}$, то у свакој тачки има исту вредност, па је $f_{-\frac{3}{2}}(2026) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) (а) Домен је цело $\mathbb{R}$. (б) Одредимо све k такве да је $f_k(x) \leqslant 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$. У том циљу, израчунаћемо извод функције $f_k(x)$ по промењливој x (сматрамо k реалним параметром):

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= 6\sin^5 x\cos x - 6\cos^5 x\sin x + k(4\sin^3 x\cos x - 4\cos^3 x\sin x) \\ &= 2\sin x\cos x\Big(3\sin^4 x - 3\cos^4 x + 2k\sin^2 x - 2k\cos^2 x\Big). \end{aligned}$$

Приметимо да важи

$$3\sin^4 x - 3\cos^4 x = 3(\sin^4 x - \cos^4 x) = 3(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$= 3(\sin^2 x - \cos^2 x),$$

те је

$$f_k'(x) = 2\sin x\cos x\Big(3(\sin^2 x - \cos^2 x) + 2k(\sin^2 x - \cos^2 x)\Big)$$

$$= 2(3+2k)\sin x\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x).$$

Дакле,

$$f_k'(x) = 0 \Longleftrightarrow \sin x\cos x = 0 \quad \text{или} \quad \sin^2 x - \cos^2 x = 0 \quad (\text{за } k \neq -\tfrac{3}{2}),\ \text{тј.}$$

$$\sin x\cos x = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{n\pi}{2}, \qquad \sin^2 x = \cos^2 x \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

На интервалу $(0,\pi)$ имамо следећу таблицу:

x	$(0,\frac{\pi}{4})$	$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$	$(\frac{3\pi}{4},\pi)$
$\sin x$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\cos x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\sin^2 x-\cos^2 x$	$-$	$+$	$+$	$-$
$\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f_k'(x)$	$-\operatorname{sgn}(3+2k)$	$\operatorname{sgn}(3+2k)$	$-\operatorname{sgn}(3+2k)$	$\operatorname{sgn}(3+2k)$

Из таблице непосредно следи:

$$k>-\frac{3}{2}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases} x=\frac{n\pi}{2} & \text{локални максимум,}\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2} & \text{локални минимум.}\end{cases}$$

$$k<-\frac{3}{2}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases} x=\frac{n\pi}{2} & \text{локални минимум,}\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2} & \text{локални максимум.}\end{cases}$$

Израчунајмо вредности у тачкама локалних екстремума:

$$f_k\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)=1+k,\qquad f_k\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}\Big)=\frac{1}{4}+\frac{k}{2}.$$

Ако је $k>-\frac{3}{2}$, максимум је у тачкама $x=\frac{n\pi}{2}$, па мора да важи $1+k\leqslant 0\iff k\leqslant -1$, одакле $k\in\left[-\frac{3}{2},-1\right]$.

Ако је $k<-\frac{3}{2}$, максимум је у тачкама $x=\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$, па мора да важи $\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\leqslant 0\iff k\leqslant-\frac{1}{2}$, што је тачно за свако $k\leqslant-\frac{3}{2}$.

Ако је $k=-\frac{3}{2}$, тада је $f_k'(x)=0$ за свако $x\in\mathbb{R}$, па је функција константна на целом $\mathbb{R}$. Како је

$$f_{-3/2}(0)=\sin^6 0+\cos^6 0-\frac{3}{2}(\sin^4 0+\cos^4 0)=0+1-\frac{3}{2}(0+1)=-\frac{1}{2},$$

то је на целом $\mathbb{R}$ негативна, па важи услов.

Дакле, спајањем резултата добијамо $\boxed{k\leqslant -1}$.

(в) Одредимо све k за које је f_k константа на $\mathbb{R}$ и за такво k одредимо $f_k(2026)$. Из претходног дела задатка имамо

$$f_k'(x)=2(3+2k)\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x),\ x\in\mathbb{R}.$$

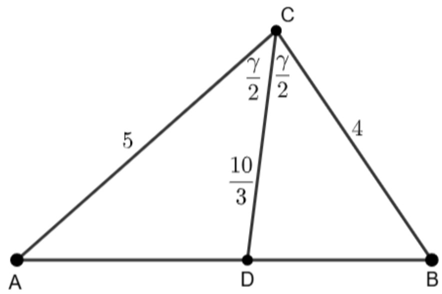
Приметимо да функција $\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)$ није идентички једнака нули, па да би $f_k'(x)\equiv 0$ морамо имати

$$3+2k=0\quad\Longrightarrow\quad\boxed{k=-\frac{3}{2}.}$$

Како је $f_{-3/2}$ константна на целом скупу $\mathbb{R}$, то у свакој тачки има исту вредност, па је

$$f_{-3/2}(2026)=\boxed{-\frac{1}{2}}.$$

3. Означимо са D пресечну тачку дате симетрале угла и странице AB. Применом теореме о симетрали угла (или применом синусне теореме на троуглове ADC и CDB) добијамо $\dfrac{|AD|}{|DB|} = \dfrac{5}{4}$. Тада је $|AD| = 5k$, $|DB| = 4k$, за неко $k > 0$, $k \in \mathbb{R}$.



Даље, применом косинусне теореме на троуглове ADC и CDB добијамо:

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{5^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 - 25k^2}{2\cdot 5\cdot \frac{10}{3}} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{\left(\frac{10}{3}\right)^2 + 4^2 - 16k^2}{2\cdot 4\cdot \frac{10}{3}}.$$

Изједначавањем десних страна ових једнакости добијамо:

$$\frac{5^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 - 25k^2}{2\cdot 5\cdot \frac{10}{3}} = \frac{\left(\frac{10}{3}\right)^2 + 4^2 - 16k^2}{2\cdot 4\cdot \frac{10}{3}},$$

одакле, решавањем једначине по k, добијамо да је $k = \dfrac{2}{3}$, па је $|AB| = 9k = 6$.

Напомена. Задатак је аналогно могао да се заврши и применом косинусне теореме на троуглове ADC и CDB, али са угловима $\angle ADC$ и $\angle CDB$, користећи да важи $\cos\angle ADC = -\cos\angle CDB$, јер је реч о суплементним угловима.

4. Одговор је, наравно, позитиван. Наиме, означимо боје бројевима $1, 2, ..., 2025, 2026$. Довољно је обојити тачку $(0, k\sqrt{2})$ те равни у боју k, $1 \leq k \leq 2025$, и све остале тачке равни у боју 2026. Вредност произвољног полинома са целим коефицијентима у нули је цео број (слободни члан полинома), односно ниједна од боја $1, 2, ..., 2025$ неће припасти нити једном графику полинома са целобројним коефицијентима, те ће сваки такав график бити у боји 2026.

5. Нека су $\ln 2 = x$, $\ln 3 = y$, $\ln 5 = z$, где је $\ln x = \log_e x$, $x > 0$. Тада је

$$a = \frac{\ln 30}{\ln 6} = \frac{x+y+z}{x+y}, \qquad b = \frac{\ln 24}{\ln 15} = \frac{3x+y}{y+z}.$$

Рачунањем и сређивањем добијамо:

$$\frac{2ab+2a-1}{ab+b+1} = \frac{(2x+y+z)(3x+3y+2z)}{(2x+y)(3x+3y+2z)}$$

$$= \frac{2x+y+z}{2x+y} = \frac{\ln 60}{\ln 12} = \log_{12} 60 = \log_m 3600.$$

Сада тривијално налазимо да је $m = 144$, јер је $3600 = 60^2$, па је

$$2m + n = 3888.$$

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ – А категорија

Први разред – А категорија

1. (а) Одговор је *да*. Нека је $P(2022) = P(2023) = P(2025) = P(2026) = 2024$. Један од полинома за који ово важи је

$$P(x) = (x-2022)(x-2023)(x-2025)(x-2026) + 2024,$$

па је $P(2024) = 2028$.

(б) Одговор је *не*. Претпоставимо да постоји овакав полином. Одавде следи

$$a - e \mid P(a) - P(e) = -2,$$

$$b - e \mid P(b) - P(e) = -2,$$

$$c - e \mid P(c) - P(e) = -2,$$

$$d - e \mid P(d) - P(e) = -2.$$

Како су a, b, c, d по паровима различити цели бројеви, то су и бројеви $a - e$, $b - e$, $c - e$ и $d - e$ по паровима различити. Стога, $\{a-e, b-e, c-e, d-e\} = \{-2, -1, 1, 2\}$. Приметимо да су a, b, c, d нуле полинома $Q(x) = P(x) - 2024$, па је

$$Q(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \cdot P_1(x).$$

Како је $Q(e) = (e-a)(e-b)(e-c)(e-d) \cdot P_1(e)$, добијамо $2 = 4 \cdot P_1(e)$, односно $P_1(e) = \dfrac{1}{2}$. Међутим, како полином P_1 има целобројне коефицијенте (ово следи, на пример из стандардног алгоритма за дељење полинома), то P_1 има целобројне вредности у свим целобројним тачкама. Контрадикција!

2. **Анализа:** Нека су T_1 и T_2 тежишта троуглова ABC и ABD, редом, а H_1 и H_2 њихови ортоцентри. Како су тачке A, B, C, D на истој кружници k са центром O, права $H_1 - O - T_1$ је Ојлерова права троугла ABC, док је права $H_2 - O - T_2$ Ојлерова права троугла ABD. Према томе, из колинеарности H_1, O, H_2 непосредно следи и колинеарност тачака T_1, O, T_2. Дакле, довољно је конструисати тачку $D \in k$ тако да су H_1, O, H_2 колинеарне.

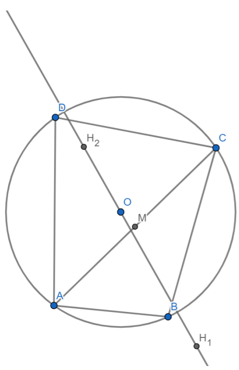
Нека је M средиште дужи AB. Посматрајмо централну симетрију са центром у тачки M. Познато је да се ортоцентар троугла при тој симетрији пресликава у тачку описане кружнице која је дијаметрално супротна темену наспрам посматране странице. Стога се ортоцентар H_1 троугла ABC пресликава у тачку C', дијаметрално супротну тачки C на кружници k, а ортоцентар H_2 троугла ABD у тачку D', дијаметрално супротну тачки D на истој кружници. Нека је, даље, O' слика тачке O при истој централној симетрији. Како централна симетрија чува колинеарност, услов да су тачке H_1, O и H_2 колинеарне еквивалентан је услову да су и тачке C', O' и D' колинеарне.

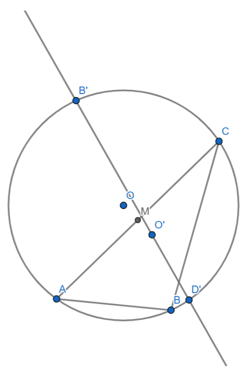
Конструкција: За дати троугао ABC конструишемо његову описану кружницу k и њен центар O, као и средиште M дужи AB. Потом, конструишемо тачку C', дијаметрално супротну тачки C на кружници k, и тачку O', симетричну тачки O у односу на M. Затим повучемо праву $C'O'$. Ако права $C'O'$ сече кружницу k у још једној тачки, тај други пресек означимо са D'. Најзад, тачку D конструишемо као тачку дијаметрално супротну тачки D' на кружници k.

Доказ: По конструкцији, тачке C', O', D' су колинеарне. Како централна симетрија чува колинеарност, из тога следи да су и њихове прецлике H_1, O, H_2 колинеарне. Са друге стране, тачке H_1, O, T_1 су колинеарне као тачке Ојлерове праве троугла ABC, а тачке H_2, O, T_2 као тачке Ојлерове праве троугла ABD. С обзиром да су H_1, O, H_2 колинеарне, обе Ојлерове праве поклапају се са истом правом кроз тачку O. Отуда следи да су и тачке T_1, O, T_2 колинеарне.

Дискусија: Ако је $O' = C'$, онда права $C'O'$ није одређена. Пошто су O' и C' слике тачака O и H_1 при истој централној симетрији са центром M, услов $O' = C'$ еквивалентан је услову $O = H_1$. То је могуће ако и само ако је троугао ABC једнакостраничан. У том случају је $T_1 = O$, па је за сваку тачку $D \in k$ услов задатка аутомацки испуњен. Дакле, ако је ABC једнакостраничан, свака тачка D на кружници k представља решење.

Нека је сада $O' \neq C'$. Тада је права $C'O'$ у потпуности одређена. Ако она сече кружницу k у још једној тачки $D' \neq C'$, онда је на тај начин добијена тачка $D \neq C$ једино недегенерисано решење. Може се, међутим, десити да је права $C'O'$ тангента на кружницу k у тачки C'. Тада други пресек не постоји, па недегенерисано решење не постоји. Ако се допушта дегенерисан случај, тада формално можемо узети $D' = C'$, одакле следи $D = C$; заиста, тада се троуглови ABC и ABD поклапају, па је услов задатка испуњен.





Према томе:

- ако је троугао ABC једнакостраничан, свака тачка $D \in k$ је решење;
- ако троугао ABC није једнакостраничан и права $C'O'$ није тангента на кружницу k у тачки C', постоји јединствено недегенерисано решење;
- ако троугао ABC није једнакостраничан и права $C'O'$ јесте тангента на кружницу k у тачки C', онда недегенерисано решење не постоји, а једино формално решење је $D = C$.

Напомена. Постоји алтернативно решење у којем уочавамо $\overrightarrow{H_1B} = \overrightarrow{H_2D}$. Конструкција, стога, непосредно следи.

3. Нека је $A = 11n^2 + n + 1$. За $n = 1$ добијамо број $A = 13$, односно $S(A) = 4$. Докажимо да је ово најмања вредност броја $S(A)$. Јасно, A је непаран број већи од 12 јер важи

$$A \equiv n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1 \equiv 1 \pmod 2,$$

па не може имати збир цифара 1. С друге стране, важи и

$$A \equiv -n^2 + n + 1 = -n(n-1) + 1 \pmod 3.$$

Ако је $n \equiv 0 \pmod 3$ или $n \equiv 1 \pmod 3$, онда је $A \equiv 1 \pmod 3$. Слично, ако је $n \equiv 2 \pmod 3$, добијамо $A \equiv 2 \pmod 3$. Познато је да важи $x \equiv S(x) \pmod 3$ за сваки природан број x. Стога, како A није дељив са 3, није ни $S(A)$, па $S(A) \neq 3$.
Покажимо и да важи $S(A) \neq 2$. Претпоставимо супротно тј. да постоји n такво да је $S(A) = 2$. Како је број A непаран (бар двоцифрен) и има збир цифара 2, то су његова прва и последња цифре једнаке 1, а остале су нуле, па једначина

$$11n^2 + n + 1 = 10^m + 1$$

има решења у скупу природних бројева, из чега добијамо

$$n(11n+1) = 2^m \cdot 5^m.$$

Еуклидовим алгоритмом се лако показује да важи $(n, 11n+1) = 1$, па како важи $n < 11n + 1$, имамо два случаја:
1. $n = 1$ и $11n + 1 = 2^m \cdot 5^m$. У овом случају добијамо $12 = 2^m \cdot 5^m$, што нема решења за $m \in \mathbb{N}$.
2. $n = 2^m$ и $11n + 1 = 5^m$. Одавде добијамо $11 \cdot 2^m + 1 = 5^m$. Дељењем обе стране са 5^m добијамо

$$11 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^m + \left(\frac{1}{5}\right)^m = 1.$$

Јасно је да је лева страна строго опадајућа функција по m (као збир две опадајуће функције). Како за $m=2$ и $m=3$ имамо

$$11\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{9}{5}>1 \text{ и } 11\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{89}{125}<1,$$

добијамо да дата једначина нема решења у скупу природних бројева. Добили смо контрадикцију са претпоставком, па $S(A)\neq 2$.
Дакле, најмањи збир цифара је 4.

Приметимо да за бројеве $n=10^k$ $(k\geqslant 1)$ имамо да је $11n^2+n+1$ облика

$$11\underbrace{000\dots000}_{k-1}1\underbrace{000\dots000}_{k-1}1,$$

па постоји бесконачно много природних бројева n за које је

$$S(11n^2+n+1)=4.$$

Коментар 1.1. Принципом математичке индукције можемо да покажемо неједнакост $11\cdot 2^m+1<5^m$ за све природне бројеве $m\geqslant 3$. За $m=3$ имамо $11\cdot 2^3+1=89$ и $5^3=125$, па неједнакост важи. Претпоставимо да за природне бројеве $m\geqslant 3$ важи $5^m>11\cdot 2^m+1$. Докажимо да одатле следи $5^{m+1}>11\cdot 2^{m+1}+1$. Заиста,

$$5^{m+1}=5\cdot 5^m>5\cdot(11\cdot 2^m+1)=55\cdot 2^m+5>22\cdot 2^m+1=11\cdot 2^{m+1}+1,$$

што повлачи $5^m>11\cdot 2^m+1$ за $m\geqslant 3$.
Коментар 1.2. Лако се показује да за $m\geqslant 3$ важи

$$5^m=5^3\cdot 5^{m-3}>2^4\cdot 7\cdot 5^{m-3}\geqslant 2^4\cdot 7\cdot 2^{m-3}=14\cdot 2^m>11\cdot 2^m+1.$$

4. Тврдимо да је највеће гарантовано $k=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$. Најпре уочимо шта један потез заправо ради. Ако суседне бројеве $x,y\in\{0,1\}$ заменимо бројем $x+y \pmod 2$, онда нови број представља збир тог пара по модулу 2. После више потеза, сваки члан добијеног низа представља збир по модулу 2 неког узастопног блока почетног низа. Дакле, сваки крајњи низ одговара некој подели почетног низа на узастопне блокове, при чему је сваки нови члан парност збира елемената у одговарајућем блоку.

Зато је задатак еквивалентан следећем: треба поделити почетни низ на узастопне блокове тако да што више узастопних блокова има исту суму по модулу 2.

Доња граница: Нека су почетни чланови низа $a_1,a_2,\dots,a_n\in\{0,1\}$. Посматрајмо парцијалне суме по модулу 2:

$$s_0=0,\qquad s_i\equiv a_1+a_2+\cdots+a_i \pmod 2\quad (1\leq i\leq n).$$

Имамо укупно $n+1$ бројева $s_0, s_1, \ldots, s_n$, а сваки је или 0 или 1. Зато се бар једна од ове две вредности јавља најмање $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ пута.

Нека су $s_{i_0} = s_{i_1} = \cdots = s_{i_t}$ све појаве те исте вредности, где је $t+1 \geq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$. Тада за сваки $j = 1, 2, \ldots, t$ блок $a_{i_{j-1}+1}, a_{i_{j-1}+2}, \ldots, a_{i_j}$ има збир по модулу 2 једнак

$$s_{i_j} - s_{i_{j-1}} \equiv 0 \pmod 2.$$

Према томе, можемо добити t узастопних нула. Одатле следи

$$t \geq \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil - 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

па је увек могуће добити бар $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ узастопних једнаких бројева. Дакле, $k \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Горња граница: Показаћемо да се уопште не може гарантовати више од тога. Посматрајмо низ који садржи тачно једну јединицу, а све остало су нуле, и то тако да су нуле распоређене што равномерније са леве и десне стране те јединице. На пример, ако је $n = 2m+1$, узмимо низ

$$\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m}, 1, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m},$$

а ако је $n = 2m$, узмимо

$$\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m-1}, 1, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m}.$$

У сваком потезу укупна сума свих чланова низа по модулу 2 остаје непромењена. Пошто је на почетку та сума једнака 1, сваки добијени низ мора имати непарну суму, па зато мора садржати бар једну јединицу.

С друге стране, сваки члан добијеног низа представља збир по модулу 2 неког узастопног блока почетног низа. Пошто почетни низ садржи тачно једну јединицу, неки блок даје вредност 1 ако и само ако садржи ту јединицу. Зато у свакој подели почетног низа тачно један блок има вредност 1, а сви остали имају вредност 0.

Према томе, у сваком добијеном низу постоји тачно једна јединица, која раздваја нуле на леви и десни део. Број узастопних нула са било које стране не може бити већи од $\lfloor n/2 \rfloor$. Зато ни број узастопних једнаких чланова не може бити већи од $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Дакле, $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Из доње и горње границе закључујемо $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Други разред – А категорија

1. Посматрајмо функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дефинисане са $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = bx^2 + cx + a$ и $h(x) = f(x)g(x)$, за свако $x \in \mathbb{R}$. Треба

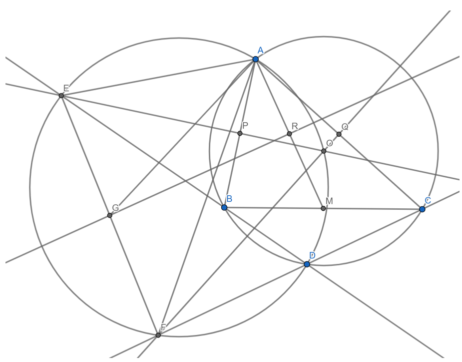
доказати да постоји реалан број d за који важи $h(d) > 0$. Приметимо да је $h(1) = f(1)g(1) = (a+b+c)^2 \geq 0$. ($\heartsuit$) Размотримо следеће случајеве:
1° $a+b+c \neq 0$. Због ($\heartsuit$) можемо одабрати $d = 1$, пошто је $h(1) > 0$.
2° $a+b+c = 0$. Сада је $f(x) = ax^2+bx-a-b = a(x-1)(x+1)+b(x-1) = (x-1)(ax+a+b)$ и аналогно $g(x) = (x-1)(bx+b+c)$, те је $h(x) = (x-1)^2(ax-c)(bx-a)$. Бројеви a и b не могу бити истовремено једнаки нули, пошто би тада због $a+b+c = 0$ важило $(a,b,c) = (0,0,0)$, што је супротно услову задатка. Отуда можемо размотрити следеће случајеве:

2.1° $a = 0, b \neq 0$. Тада је $h(x) = b^2(x-1)^2x$, те је $h(2) > 0$.

2.2° $b = 0, a \neq 0$. Тада је $h(x) = -a^2(x-1)^2(x+1)$, те је $h(-2) > 0$.

2.3° $ab \neq 0$. Приметимо да је $\frac{c}{a} \neq \frac{a}{b}$. Претпоставимо супротно. Тада би имали $-\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a^2+ab+b^2 = 0 \Leftrightarrow (a+\frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$, што је контрадикција. Сада имамо да квадратна функција $i(x) = (ax-c)(bx-a)$ има две различите реалне нуле, те није константног знака на $(-\infty, \infty)$. Отуда постоји интервал I на ком је она позитивна. Како је $h(x) = (x-1)^2 \cdot i(x)$, то због претходног имамо да за сваки број $d \in I \setminus \{1\}$ важи $h(d) > 0$. Овим је доказ комплетиран.

2. Како је O средиште краћег лука AD круга AOD, права EO је симетрала угла $\angle AED$, па је самим тим и симетрала странице AB троугла $\triangle ABC$. Аналогно је и тачка F на симетрали дужи AC. Нека су сада P, Q и R редом средишта дужи AB, AC и AM. Троуглови $\triangle AEP$ и $\triangle AFQ$ су слични ($\angle AEP = \angle AFQ$ због тетивности четвороугла $AEFO$, и по претходно доказаном имају по један прав угао). Одавде је $\frac{AE}{AF} = \frac{AP}{AQ} = \frac{AB}{AC}$, и $\angle EAF = \angle BAC$, па су троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle AEF$ слични. Одатле, имајући у виду да су AM и AG тежишне дужи, следи да су и троуглови ΔABM и ΔAEG слични, те је и $\frac{AG}{AM} = \frac{AE}{AB}$, односно $\frac{AG}{AR} = \frac{AE}{AP}$, па како је и $\angle EAP = \angle GAR$, троуглови $\triangle AEP$ и $\triangle AGR$ су слични, односно $\angle ARG = 90^\circ$, одакле је троугао $\triangle AGM$ једнакокрак, чиме је тврђење задатка доказано.



3. Нека су a, b, c и n природни бројеви за које важи $(a,b,c) = 1$, а $p > 3$ произвољан прост број, при чему је $(u,v,w) = \text{НЗД}(u,v,w)$, $u,v,w \in \mathbb{N}$. Означимо са $S_k = a^k + b^k + c^k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Претпоставимо да $p \mid S_{n+2}, S_{n+1}$ и S_n. Због

$p \mid S_n$ и $(a,b,c)=1$ број p дели највише један од бројева a, b и c. Размотримо најпре случај $p \nmid abc$. Важи

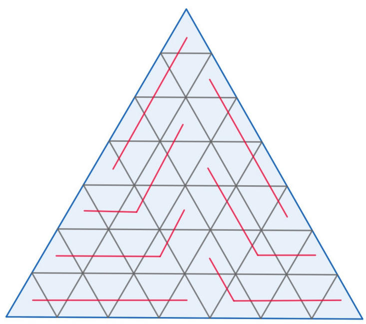
$$S_{k+3}-(a+b+c)S_{k+2}+(ab+bc+ca)S_{k+1}=abcS_k,\ \ k\in\mathbb{N}_0. \qquad (\dagger)$$

Како $p \mid S_{n+2}, S_{n+1}, S_n$, заменом $k=n-1$, имајући на уму да $p \nmid abc$, у $(\dagger)$ добијамо $p \mid S_{n-1}$. Даљом заменом за $k=n-2, n-3, \ldots, 0$, добијамо $p \mid S_0 = 3$. Контрадикција. Нека сада $p \mid abc$. Одређености ради, нека $p \mid c$ и $p \nmid ab$. Тада је $a^{n+1} \equiv_p -b^{n+1} \equiv_p b(-b^n) \equiv_p ba^n$, па је $a \equiv_p b$. Зато $p \mid 2a^n$, односно $p \mid a$. Контрадикција. На овај начин смо доказали да не постоји $p>3$ тако да $p \mid S_{n+2}, S_{n+1}$ и S_n, за неке $(a,b,c)=1$.

Слично као у претходном делу доказује се да није могуће да $9 \mid a^n+b^n+c^n, a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}, a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2}$. Такође, није могуће да $4 \mid a^n+b^n+c^n, a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}, a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2}$. Заиста, ако би важило $4 \mid a^n+b^n+c^n$, онда би тачно један од бројева a, b, c био паран. Међутим, тада за паран број $m \in \{n+1, n+2\}$ важи $a^m+b^m+c^m \equiv_4 0+1+1 \equiv_4 2$, што је у супротности са $4 \mid S_m$.

Из свега наведеног закључујемо да је $(a^n+b^n+c^n, a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}, a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2}) \leq 6$, те је највећи елемент скупа S не већи од 6. Како је за $a=b=n=1, c=4$ посматрани највећи заједнички делилац једнак 6, то је највећи елемент скупа S управо једнак 6.

4. Тражена подела је могућа ако и само ако је n непаран. Нека је $n=2m+1$. Конструкција се задаје овако. Са леве странице великог троугла повлачимо $m+1$ путева. Први почиње у доњем левом углу и иде водоравно удесно кроз n троуглова.



Други почиње у следећем реду изнад и иде водоравно удесно кроз $n-2$ троуглова, па се затим ломи и наставља косо нагоре удесно кроз 2 троугла. Трећи почиње још један ред више, иде водоравно удесно кроз $n-4$ троуглова, па затим косо нагоре удесно кроз 4 троугла. Тако редом, k-ти леви пут, рачунајући одоздо, почиње на левој страници у $(k+1)$-вом реду, иде најпре водоравно удесно кроз $n-2k$ троуглова, а затим косо нагоре удесно кроз $2k$ троуглова, где је $k = 0, 1, \ldots, m$. Зато сваки леви пут има укупно $(n - 2k) + 2k = n$ троуглова. Са десне стране повлачимо m путева. Први десни пут почиње у највишем преосталом троуглу уз десну страницу и иде косо надоле удесно кроз n троуглова. Други почиње у следећем највишем преосталом троуглу, иде косо надоле удесно кроз $n-2$ троуглова, па се затим ломи и наставља водоравно удесно кроз 2 троугла. Трећи почиње у следећем највишем преосталом троуглу, иде косо надоле удесно кроз $n-4$ троуглова, па затим водоравно удесно кроз 4 троугла. Тако редом, j-ти десни пут, рачунајући одозго, почиње у највишем још непокривеном троуглу десног дела, иде најпре косо надоле удесно кроз $n-2j+2$ троуглова, а затим водоравно удесно кроз $2j - 2$ троугла, где је $j = 1, 2, \ldots, m$. Зато и сваки десни пут има укупно $(n - 2j + 2) + (2j - 2) = n$ троуглова. Леви путеви се међусобно не секу, јер им водоравни делови леже у различитим редовима, а после прелома сваки иде другом косом дијагоналом. Исто тако се ни десни путеви међусобно не секу. Најзад, леви и десни путеви се не могу сећи јер после свих левих путева остаје непокривен само један ,,десни" степенасти део троугла, а десни путеви се управо у њему повлаче, редом одозго надоле. Другим речима, леви путеви испуне цео леви део фигуре до једне цик-цак границе, а сваки десни пут лежи у потпуности са десне стране те границе; зато леви и десни путеви немају заједничких троуглова. Тако добијамо $(m + 1) + m = 2m + 1 = n$ међусобно дисјунктних путева, сваки од по n троуглова, који заједно покривају цео троугао. Ако је, међутим, n паран, онда би сваки пут имао парну дужину, па би у њему био једнак број троуглова оријентисаних нагоре и надоле, што је немогуће јер је у целом троуглу број таквих троуглова $\frac{n(n+1)}{2}$, односно $\frac{n(n-1)}{2}$. Дакле, тражена подела постоји ако и само ако је n непаран.

Трећи разред – А категорија

1. (ПРВО РЕШЕЊЕ) (а) Посматрајмо полином $P(x) = x^{2020} + x^3 + 1$. Претпоставимо да је број $x = z$, где је $|z| = 1$, једна нула полинома $P(x)$. Како је полином $P \in \mathbb{R}[x]$ то је и број $\overline{z} = \frac{1}{z}$ његова нула. Отуда, заменом $P(\frac{1}{z}) = 0$ добијамо да је $1 + z^{2017} + z^{2020} = 0$, те је $z^3 = z^{2017}$. Из последње једнакости, како је $z \neq 0$, имамо да је $z^{2014} = 1$. Зато је сада $0 = P(z) = z^6 + z^3 + 1$, те је $z^9 - 1 = (z^3 - 1) \cdot P(z) = 0$. Дакле, за број z важи $z^{2014} = z^9 = 1$. Зато је $z^7 = \frac{z^{2014}}{(z^9)^{223}} = 1$, одакле је и $z^2 = \frac{z^9}{z^7} = 1$ и $z = \frac{z^7}{(z^2)^3} = 1$. Зато је $0 = P(1) = 3$, што је контрадикција.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) (а) Претпоставимо супротно-нека важи $z^{2020}+z^3+1 = 0$ за неко z за које је $|z| = 1$. Тада из једнакости модула леве и десне стране у једнакостима (које су еквивалентне са $z^{2020} + z^3 + 1 = 0$) $z^3(z^{2017} + 1) = -1$ и $z^{2020} + 1 = -z^3$ имамо да је $|z^{2017} + 1| = 1$ и $|z^{2020} + 1| = 1$. Из последњих једнакости закључујемо да се бројеви z^{2020} и z^{2017} налазе на растојању 1 од броја -1, односно налазе се на кружници чији је центар у броју -1, а полупречник 1. Како је $|z| = 1$, то је и $|z^{2020}| = |z^{2017}| = 1$, те се бројеви z^{2020} и z^{2017} налазе и на кружници чији је центар број 0, а полупречник 1. Пресек поменутих кружница су бројеви $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ и $\varepsilon^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$, те је $z^{2020}, z^{2017} \in \{\varepsilon, \varepsilon^2\}$. Отуда, како је $\varepsilon^3 = 1$, имамо $z^3 = \frac{z^{2020}}{z^{2017}} \in \{1, \varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$. За $z^3 = 1$ имамо $z^{2020} = -z^3 - 1 = -2$, те је $|z^{2020}| = 2$, што је у супротности са $|z^{2020}| = 1$. Ако је пак $z^3 \in \{\varepsilon, \varepsilon^2\}$, онда из једнакости $z^{2020} + z^3 + 1 = 0 = \varepsilon^2 + \varepsilon + 1$, добијамо да је $z^{2020} = \varepsilon^2$ (када је $z^3 = \varepsilon$) или $z^{2020} = \varepsilon$ (када је $z^3 = \varepsilon^2$.) Овадве, како је $(z^{2020})^3 = (z^3)^{2020}$ добијамо да је $(\varepsilon^2)^3 = \varepsilon^{2020}$ или $\varepsilon^3 = (\varepsilon^2)^{2020}$. Имајући на уму да је $\varepsilon^3 = 1$, последње једнакости нас доводе до закључка да је $1 = \varepsilon$ или $1 = \varepsilon^2$. Контрадикција.

(б) Под условом $|z| = 1$, односно $\overline{z} = \frac{1}{z}$, дата једнакост је еквивалентана са

$$|z^{2020} + z^n + 1| = |z^{2020} + z^3 + 1| \Leftrightarrow (z^{2020} + z^n + 1)(\frac{1}{z^{2020}} + \frac{1}{z^n} + 1)$$

$$= (z^{2020} + z^3 + 1)(\frac{1}{z^{2020}} + \frac{1}{z^3} + 1)$$

$$\Leftrightarrow z^{2020-n} + z^{n-2020} + z^n + z^{-n} = z^{2017} + z^{-2017} + z^3 + z^{-3} \Leftrightarrow$$

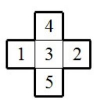
$$\Leftrightarrow z^{4040} + z^{2n} + z^{2020+2n} + z^{2020} - z^{4037+n} - z^{3+n} - z^{2023+n} - z^{2017+n} = 0. \quad (1)$$

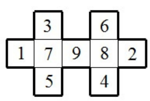
Дакле, број $n \in \mathbb{N}$ је решење акко је једнакост (1) испуњена за све бројеве z за које је $|z| = 1$.

Нека је $n \in \mathbb{N}$ неко решење. Посматрајмо полином $P(x) = x^{4040} + x^{2n} + x^{2020+2n} + x^{2020} - x^{4037+n} - x^{3+n} - x^{2023+n} - x^{2017+n}$. Нуле овог полинома су сви бројеви $x = z$, где је $|z| = 1$, те посматрани полином има бесконачно много нула. Зато је $P(x)$ једнак нула полиному, те су сви његови коефицијенти једнаки нули. Зато мора да важи $4040 = 4037 + n$ или $2020 + 2n = 4037 + n$, односно $n = 3$ или $n = 2017$. Лако проверавамо да за $n = 3$, односно $n = 2017$, важи једнакост (1), те су ови бројеви заиста решења задатка.

2. Постоји. Нека у "средњем" реду има $2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, јединичних поља. Доказаћемо математичком индукцијом (по n), са кораком 2, да постоје жељени потези, при чему је први потез са поља које је прво (са леве стране) у "средњем" реду.

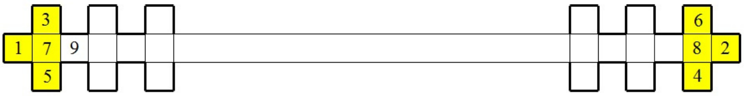
База индукције: На сликама су дати примери жељених потеза за $n = 1$ и $n = 2$.





Индуктивна хипотеза: Нека наведено тврђење важи за n.

Индуктивни корак: Посматрајмо таблу у чијем је "средњем" реду $2(n+2)+1$ јединичних поља. Првих 8 потеза изводимо као на следећој слици.



Међу наведених 8 потеза очигледно нема подударних, при чему на белој табли, која у "средњем" реду има $2n+1$ јединично поље, није могуће одиграти потез који би био подударан неком од 8 наведених потеза. Поље означено бројем 9 је заправо прво поље беле табле која у "средњем" реду има $2n+1$ јединичних поља. По индуктивној хипотези, за ту белу таблу, могуће је извести жељени низ потеза. Овим је комплетиран доказ.

3. Претпоставимо супротно, тј. да таквих бројева има само коначно много. Нека је њихов укупан број једнак k. Потребна нам је следећа доња оцена за Ојлерову функцију:

$$\varphi(t) \geq \sqrt{\frac{t}{2}}, \text{ за свако } t \in \mathbb{N}.$$

Стога, запишимо $t = 2^{\alpha} q$, где је $\alpha \geq 0$, а q непаран број. Ако је $q = 1$, онда је

$$\varphi(t) = \varphi(2^{\alpha}) = \begin{cases} 1, & \alpha = 0, \\ 2^{\alpha-1}, & \alpha \geq 1. \end{cases}$$

За $\alpha = 0$ добијамо $\varphi(t) = 1 \geq \sqrt{1/2}$, а за $\alpha \geq 1$ важи

$$2^{\alpha-1} \geq 2^{\alpha/2-1/2} = \sqrt{\frac{2^{\alpha}}{2}} = \sqrt{\frac{t}{2}}.$$

Дакле, и у овом случају важи $\varphi(t) \geq \sqrt{t/2}$.

Нека је сада $q > 1$. Ако је $q = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_s^{\beta_s}$ канонска факторизација броја q, онда је

$$\varphi(q) = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\beta_i - 1}(p_i - 1).$$

За сваки непаран прост број p и свако $\beta \geq 1$ важи $p^{\beta-1}(p-1) \geq p^{\beta/2}$. Заиста, за $\beta = 1$ то је еквивалентно неједнакости $p - 1 \geq \sqrt{p}$, што важи за сваки $p \geq 3$, а за $\beta \geq 2$ имамо

$$p^{\beta-1}(p-1) \geq p^{\beta-1} \geq p^{\beta/2}.$$

Множењем ових неједнакости по свим простим делиоцима броја q добијамо $\varphi(q) \geq \sqrt{q}$.

Сада, ако је $\alpha = 0$, онда је $t = q$ непаран, па

$$\varphi(t) = \varphi(q) \geq \sqrt{q} = \sqrt{t} \geq \sqrt{\frac{t}{2}}.$$

Ако је $\alpha \geq 1$, онда је

$$\varphi(t) = \varphi(2^\alpha)\varphi(q) = 2^{\alpha-1}\varphi(q) \geq 2^{\alpha-1}\sqrt{q}.$$

Пошто је $2^{\alpha-1} \geq 2^{\alpha/2-1/2}$, следи

$$\varphi(t) \geq 2^{\alpha/2-1/2}\sqrt{q} = \sqrt{\frac{2^\alpha q}{2}} = \sqrt{\frac{t}{2}}.$$

Тиме је тражена доња оцена доказана.

Изаберимо сада природан број N тако да важи $\sqrt{\frac{N}{2}} > k$. На пример, можемо узети $N = 2k^2 + 1$. Тада за свако $d \geq N$, по доказаној оцени, важи

$$\varphi(d) \geq \sqrt{\frac{d}{2}} \geq \sqrt{\frac{N}{2}} > k,$$

па је

$$d + \varphi(d) > d + k \geq N + k.$$

Према томе, ако је неки број $m \leq N + k$ представљив у облику $m = c + \varphi(c)$, онда мора бити $c < N$, јер за $c \geq N$ добијамо $c + \varphi(c) > N + k$.

Дакле, бројеви не већи од $N+k$ који су представљиви у облику $c+\varphi(c)$ могу настати само за

$$c = 1, 2, \ldots, N - 1.$$

Пошто таквих вредности c има највише $N - 1$, следи да међу првих $N + k$ природних бројева има највише $N - 1$ представљивих бројева.

С друге стране, међу бројевима

$$1, 2, \ldots, N + k$$

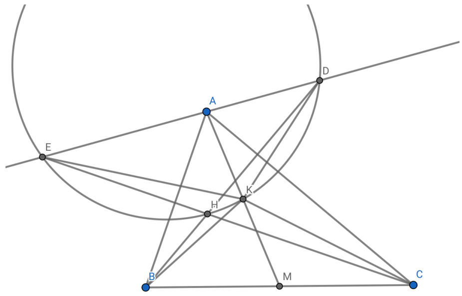
има укупно $N + k$ бројева. Зато најмање

$$(N + k) - (N - 1) = k + 1$$

њих није представљиво у облику $n+\varphi(n)$. Међутим, то је немогуће, јер смо претпоставили да укупно постоји само k таквих бројева.

Коначно, следи да постоји бесконачно много природних бројева m који се не могу представити у облику $m = n + \varphi(n)$ ни за један природан број n.

4. Прво, троуглови EAC и DAB су слични. Заиста, $\angle ECA = \angle ABD = 90° - \alpha$ и $\angle EAC = \angle BAD = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Закључујемо да је $\frac{EC}{BD} = \frac{AC}{AB}$. Како је K заправо A – *Humpty* тачка, познато је да је $\angle MBK = \angle BAM$. Како је и $\angle CHK = 180° - \angle KHC' = BAM$ (C' је подножје висине из C на AB), то је четвороугао $BHKC$ тетиван (и ово је генерално познато). Пошто су троуглови BMK и AMB слични, то је $\frac{BM}{AM} = \frac{BK}{AB}$. Аналогно је $\frac{CM}{AM} = \frac{CK}{AC}$. Пошто је $BM = CM$, то је $\frac{BK}{CK} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE}$. Како је због тетивности четвороугла $BHKC$ и $\angle KBD = \angle KCE$, троуглови BKD и CKE су слични. Зато је $\angle HDK = \angle HEK$, чиме је доказ завршен.



Четврти разред – А категорија

1. Нека су a и b неке вредности параметара за које важи наведена неједнакост. Посматрајмо функцију $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, за коју је $f(x) = 4^x + a^x + b^x - 6^x - 3^x - 2^x$, за свако $x \in \mathbb{R}$. Функција $f(x)$ је непрекидно диференцијабилна на $\mathbb{R}$. Докажимо да је $f'(0) = 0$. Претпоставимо супротно. Како постоји $f'(0)$, нека је $f'(0) = \alpha \neq 0$. Ако је $\alpha > 0$, то постоји нека околина броја 0, таква да је функција $f(x)$ строго монотоно растућа у тој околини. Међутим, тада за свако x из те околине за које важи $x < 0$, имамо $f(x) < f(0) = 0$, што је у супротности са особином бројева a и b (бројеви a и b су такви да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи $f(x) \geq 0$). Ако је пак $\alpha < 0$, то постоји нека околина броја 0, таква да је функција $f(x)$ строго монотоно опадајућа у тој околини. Међутим, тада за свако x из те околине за које важи $x > 0$, имамо $f(x) < f(0) = 0$, што је у опет у супротности са особином бројева a и b. Дакле, ако тражена вредност параметара a и b постоји, онда мора бити $f'(0) = 0$. Како је $f'(0) = \ln 4 + \ln a + \ln b - \ln 6 - \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{ab}{9}$, то једнакост $ab = 9$ даје једине потенцијалне вредности тражених параметара.

Без умањења општости можемо претпоставити да је $a \geq b$. Докажимо да мора бити $a \geq 6$. Претпоставимо супротно, $a < 6$. Дељењем полазне неједнакости са 6^x добијамо да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$L(x) = (\frac{2}{3})^x + (\frac{a}{6})^x + (\frac{b}{6})^x \geq 1 + (\frac{1}{2})^x + (\frac{1}{3})^x = D(x). \tag{1}$$

Како је $\lim_{x \longrightarrow \infty} L(x) = 0$, а $\lim_{x \longrightarrow \infty} D(x) = 1$, то за довољно велико x неједнакост (1) не важи. Контрадикција. Овим смо доказали (под претпоставком да је $a \geq 6$) да уколико тражени параметри постоје, мора важити $a \geq 6$ и $b = \frac{9}{a}$. Докажимо сада да параметри одређени овим условима заиста задовољавају полазну неједнакост. Фиксирајмо реалан број x, $x \neq 0$ (за $x = 0$ наведени параметри задовољавају полазну неједнакост). Нека је $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ функција задата са $g(a) = 4^x + a^x + (\frac{9}{a})^x - 6^x - 3^x - 2^x$. Докажимо да је $g(a) \geq 0$ за свако $a \geq 6$. Функција $g(a)$ је непрекидно диференцијабилна на $\mathbb{R}^+$. Лако налазимо да је $g'(a) = \frac{x(a^x+3^x)(a^x-3^x)}{a^{x+1}}$. За $x > 0$ израз $a^x - 3^x$ је позитиван само за $a > 3$, док је за $x < 0$ израз $a^x - 3^x$ је негативан само за $a > 3$. Дакле, $g'(a) > 0 \iff a > 3$. Овим је доказано да је функција $g(a)$ строго монотона растућа на интервалу $(3, \infty)$. Како је још $g(6) = 4^x + (\frac{3}{2})^x - 3^x - 2^x = (2^x - (\frac{3}{2})^x)(2^x - 1) > 0$ (за $x > 0$ важи $2^x - (\frac{3}{2})^x, 2^x - 1 > 0$, док за $x < 0$ важи $2^x - (\frac{3}{2})^x, 2^x - 1 < 0$), то за свако $a \geq 6$, на основу монотоности, важи $g(a) > 0$, а тиме и полазна неједнакост.

Све тражене вредности су из скупа $\{(a,b) |\ ab = 9, a \geq 6 \vee b \geq 6\}$.

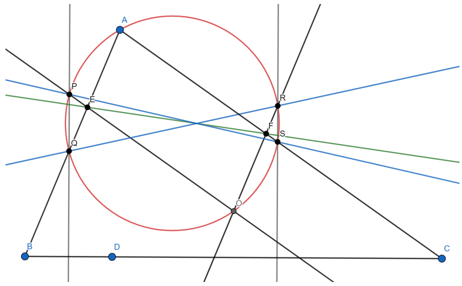
2. Приметимо да је

$$\begin{aligned} A &= 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdots 2024! = (1! \cdot 2!) \cdot (3! \cdot 4!) \cdots (2023! \cdot 2024!) \\ &= (1! \cdot 1! \cdot 2) \cdot (3! \cdot 3! \cdot 4) \cdots (2023! \cdot 2023! \cdot 2024) \\ &= (1!)^2 \cdot (3!)^2 \cdot (5!)^2 \cdots (2023!)^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2024 \\ &= (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdots 2023!)^2 \cdot 2^{1012} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 1012 = (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdots 2023! \cdot 2^{506})^2 \cdot 1012!, \end{aligned}$$

одакле налазимо једно решење $(n, x) = (1012, 1! \cdot 3! \cdot 5! \cdots 2023! \cdot 2^{506})$. Докажимо да других решења нема.
Претпоставимо супротно, да је неко $n \neq 1012$ решење ове једначине. Тада, број $\dfrac{A}{n!}$ треба да буде квадрат природног броја.

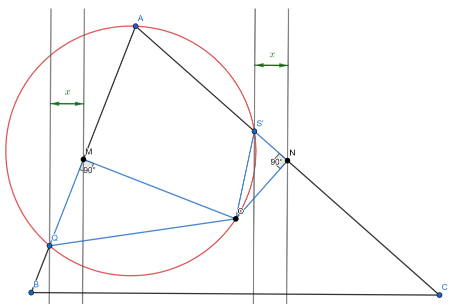
Ако је $n \leqslant 1008$, тада је $\dfrac{A}{n!} = (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdots 2023! \cdot 2^{506})^2 \cdot 1012 \cdot 1011 \cdot 1010 \cdot 1009 \cdots (n+1)$. Лако се проверава да је број 1009 прост, а његов експонент је непаран, те овај број није потпун квадрат. За $n = 1009$, имамо $\dfrac{A}{n!} = (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdots 2023! \cdot 2^{506})^2 \cdot 1012 \cdot 1011 \cdot 1010$, а за $n = 1010$ је $\dfrac{A}{n!} = (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdots 2023! \cdot 2^{506})^2 \cdot 1012 \cdot 1011$, па ови бројеви нису потпуни квадрати јер је степен броја 3 непаран. Такође, $n = 1011$ није решење пошто 1012 није потпун квадрат.
Коначно, ако је $n \geqslant 1013$, тада је $\dfrac{A}{n!} = \dfrac{(1! \cdot 3! \cdot 5! \cdots 2023! \cdot 2^{506})^2}{1013 \cdot 1014 \cdots n}$. Број 1013 је прост, његов експонент у $\dfrac{A}{n!}$ је непаран за $n < 2026$, па не може бити потпун квадрат. С друге стране, $\dfrac{A}{n!}$ није цео број за $n \geqslant 2027$, пошто је 2027 прост број који не дели A. Број $n = 2026$ није решење нпр. јер је 1019 прост број који има непаран експонент у $\dfrac{A}{n!}$.

3. Доказаћемо да је шестоугао $APQOSR$ тетиван, па по Паскаловој теореми примењеној на овај шестоугао директно следи тврђење задатка.



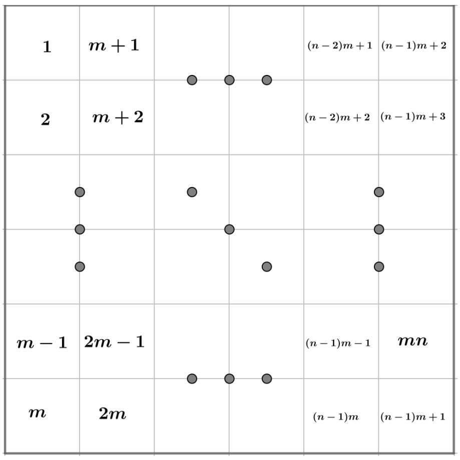
Да бисмо доказали да је поменути шестоугао тетиван доказаћемо да су тетивни четвороуглови $APQO$, $ARSO$ и $AQOS$. Знамо да је $\angle QPO = 90^\circ - \angle ACB$, јер је једнак углу између висине из A троугла $\triangle ABC$ и праве AC као угао са паралелним крацима. Како је такође и $\angle BAO = 90^\circ - \angle ACB$, закључујемо да је четвороугао $APQO$ тетиван. Аналогно је и четвороугао $ARSO$ тетиван, па остаје показати да је четвороугао $AQOS$ тетиван. Обележимо са M и N редом средишта AB и AC, и обележимо други пресек круга AOQ са AC са S'. Троуглови $\triangle OMQ$ и $\triangle ONS'$ су слични (правоугли су и притом је $\angle OQM = \angle OS'N$), па је одатле $\frac{QM}{S'N} = \frac{OM}{ON} = \frac{cos\gamma}{cos\beta}$, где је $\angle ABC = \beta$ и $\angle ACB = \gamma$. Одавде закључујемо да су пројекције дужи QM и $S'N$ на BC једнаких дужина, одакле је дужина пројекције дужи QS' на BC једнака $\frac{BC}{2}$, па закључујемо да је $S' \equiv S$.

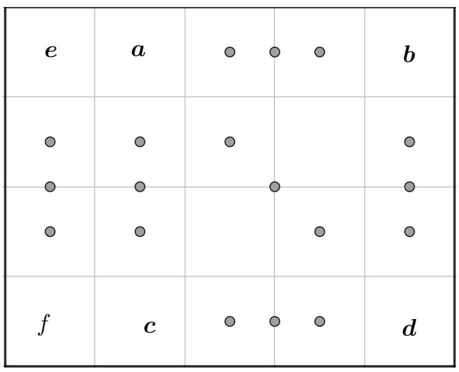
Дакле, четвороугао $AQOS$ је тетиван, одакле по претходној дискусији следи тврђење задатка.



4. Највеће такво k је $(m-1)(n-1)$. На слици је дат пример са $(m-1)(n-1)$ лоших правоугаоника (сви који садрже доње десно поље табле). Остаје да докажемо да мора да постоји бар $(m-1)(n-1)$ лоших правоугаоника. Уочимо неки лош правоугаоник који постоји према услову задатка. Обележимо бројеве у ћошковима овог правоугаоника као на слици. Тада је $a+d \neq b+c$, односно $a-c \neq b-d$. Уочимо сада још два поља, назовимо их e и f, на следећи начин. e и f су у истој колони, $e \neq a, e \neq b, f \neq c, f \neq d$, e је у истом реду као a и b, f је у истом реду као c и d. Како не може истовремено да вази $e-f = a-c$ и $e-f = b-d$, барем један од правоугаоника $eafc$ и $ebfd$ је лош. Како овакве парове поља e и f можемо изабрати на $n-2$

начина добили смо још $n-2$ лоших правоугаоника, који су сви очигледно различити. Изаберимо било који од $n-1$ лоших правоугаоника који су нам до сада познати. Ако аналоган поступак поновимо кренувши од изабраног правоугаоника само у вертикалном смеру добијамо још $m-2$ различитих лоших правоугаоника. Јасно је да ни два правоугаоника добијена од различитог иницијалног лошег првоугаоника не могу бити иста. Дакле, пронашли смо $(m-1)(n-1)$ лоших правоугаоника, чиме је доказ завршен.





РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ – Б категорија

Први разред – Б категорија

1. Нека је број централних тачака једнак n. Тада је укупан број свих тачака једнак $n+2$, јер поред тих n тачака постоје још две доње бочне тачке.

Број свих тројки тачака једнак је $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, од чега треба одузети недозвољене тројке тачака. Како свих n централних тачака припадају једној правој, број тројки састављених само од тих тачака једнак је $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. Поред тога, доње три тачке су колинеарне, те дају још једну недозвољену тројку. Према томе, број свих троуглова једнак је

$$\frac{(n+2)(n+1)n}{6} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - 1.$$

По услову задатка, то је једнако 2024, па важи

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - 1 = 2024.$$

Сређивањем добијамо

$$\frac{n\big((n+2)(n+1)-(n-1)(n-2)\big)}{6} - 1 = 2024.$$

Даље је $(n+1)(n+2) = n^2+3n+2$, док је $(n-1)(n-2) = n^2-3n+2$, па је разлика ових израза једнака $6n$. Стога, важи $\frac{n \cdot 6n}{6} - 1 = 2024$, односно $n^2 - 1 = 2024$, одакле је $n^2 = 2025$, те је $n = 45$. Дакле, укупан број тачака је 47.

2. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Тражени збир можемо груписати на следећи начин:

$$A = (-S(0)+S(1)) + (-S(2)+S(3)) + \cdots + (-S(2024)+S(2025)) - S(2026).$$

Израчунајмо $S(2k+1) - S(2k)$. Број $2k$ је увек паран, што значи да му је последња цифра $c \in \{0,2,4,6,8\}$. При преласку са $2k$ на $2k+1$, последња цифра постаје $c+1$, а остале цифре остају непромењене (нема преноса). Зато је $S(2k+1) - S(2k) = 1$. Таквих парова је 1013, а пошто је $S(2026) = 10$, одговор је $A = 1013 - 10 = 1003$.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Групишимо чланове по паровима: $A = \sum_{k=1}^{1013}\big(S(2k-1) - S(2k)\big)$. Ако се при прелазу са $2k-1$ на $2k$ не јавља пренос, тада се збир цифара повећава за 1, па је $S(2k) = S(2k-1)+1$, односно $S(2k-1)-S(2k) = -1$.

Ако број $2k-1$ на крају има тачно t деветки, онда при додавању јединице тих t деветки прелази у нуле, па се збир цифара смањује за $9t$, а затим се претходна цифра повећава за 1. Зато важи $S(2k)=S(2k-1)+1-9t$, па је $S(2k-1)-S(2k)=9t-1$. Стога, сваки пар даје основни допринос -1, а за сваку завршну деветку добијамо још 9. Како има укупно 1013 парова, добијамо $A=-1013+9(N_1+N_2+N_3)$, где је N_1 број непарних бројева до 2025 који се завршавају цифром 9, N_2 број непарних бројева до 2025 који се завршавају са 99, а N_3 број непарних бројева до 2025 који се завршавају са 999.

Сада бројимо: $N_1=\#\{9,19,29,\ldots,2019\}=202$, јер је $\dfrac{2019-9}{10}+1=202$. Даље, $N_2=\#\{99,199,299,\ldots,1999\}=20$, јер је $\dfrac{1999-99}{100}+1=20$. Најзад, $N_3=\#\{999,1999\}=2$.

Према томе, $A=-1013+9(202+20+2)=-1013+9\cdot 224=-1013+2016=1003$. Дакле, $A=1003$.

3. Доказаћемо да је победник Ненад, да су Милица и Ненад Истинозборићи, а Александар и Чеда Лажковићи.

Посматрајмо најпре Чедину изјаву: *Александар је победник и Ненад је Лажковић.*

Претпоставимо да Чеда говори истину. Тада су обе тврдње из његове изјаве тачне, па је Александар победник и Ненад је Лажковић.

Како је познато да је победник Истинозборић, следи да је Александар Истинозборић, па је његова изјава тачна. Како је, према Чединој изјави, Ненад Лажковић, услов у Александровој изјави је испуњен, те из истинитости Александрове изјаве следи да је Милица победила. То је у противречности са тим да је Александар победник. Дакле, Чеда не говори истину, па је Чеда Лажковић.

Како је Чеда Лажковић, он не може бити победник, јер је победник Истинозборић.

Сада посматрајмо Миличину изјаву: *Ни ја ни Чеда нисмо победили.* С обзиром да већ знамо да Чеда није победник, истинитост ове изјаве своди се на истинитост тврдње - Милица није победила. Ако би Милица била Лажковић, њена изјава би била неистинита. Како је део *„Чеда није победио”* тачан, неистинитост целе Миличине изјаве могла би настати само тако што је неистинита тврдња - Милица није победила, односно тако што би тврдња Милица је победила била истинита. Међутим, тада би Милица била победник, а победник је Истинозборић, што је у противречности са претпоставком да је Милица Лажковић. Стога, Милица није Лажковић, већ је Истинозборић. Зато је њена изјава тачна, те важи: *Милица није победила.*

Посматрајмо сада Ненадову изјаву: *Ако је Милица Лажковић, онда је Чеда победник.* Како је Милица Истинозборић, претпоставка ове импликације је неистинита. Зато је цела Ненадова изјава истинита. Следи да је

Ненад Истинозборић.

Вратимо се сада на Александрову изјаву: *Ако је бар један од Чеде и Ненада припадник племена Лажковић, онда је Милица победила.* С обзиром да је Чеда Лажковић, претпоставка ове импликације је истинита. Како смо већ утврдили да Милица није победила, следи да је Александрова изјава неистинита. Дакле, Александар је Лажковић.

Сада знамо:

Чеда није победник, Милица није победник, Александар није Истинозборић.

Преостаје још да искључимо могућност да је Александар победник. Али победник је Истинозборић, а Александар је Лажковић, одакле закључујемо да Александар не може бити победник. Дакле, нико од Милице, Александра и Чеде није победник, те једино преостаје да је победник Ненад.

Зато је коначан одговор:

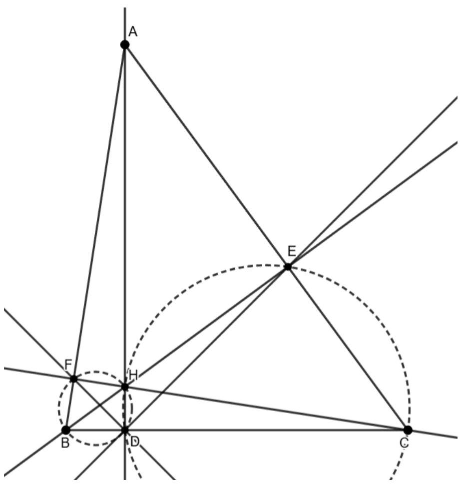
$$\boxed{\text{Победник је Ненад.}}$$

При томе,

$$\boxed{\text{Милица и Ненад су Истинозборићи, а Александар и Чеда су Лажковићи.}}$$

4. Нека је H ортоцентар троугла ABC и $\angle BAC = \alpha$. Тада су четвороуглови $FHBD$ и $HECD$ тетивни (имају по два права угла који су несуседни), па је $\angle HBF = \angle HDF$ и $\angle HCE = \angle HDE$. Како је троугао BEA правоугли, то је $\angle ABE = 90^\circ - \alpha$, а на основу претходног разматрања, $\angle FDH = 90^\circ - \alpha$. Доказ завршавају две еквиваленције:

$$AF = CF \iff \angle FCA = \angle FAC = \alpha \iff \angle FDE = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ.$$



5. Приметимо најпре да је $|49^1 - 6^2| = |49 - 36| = 13$. Дакле, вредност израза може бити једнака 13. Докажимо да не може бити мања од 13.

Претпоставимо супротно, тј. да постоје природни бројеви a и b такви да је $|49^a - 6^b| < 13$. С обзиром да је $49 \equiv 9 \pmod{10}$, важи $49^a \equiv 1$ или $49^a \equiv 9 \pmod{10}$, док је $6^b \equiv 6 \pmod{10}$. Зато је $49^a - 6^b \equiv 5$ или $49^a - 6^b \equiv 3 \pmod{10}$.

Како је $|49^a - 6^b| < 13$, број $49^a - 6^b$ је један од целих бројева између1 -12 до 12, укључујући исте. Међу тим целим бројевима само бројеви -7, -5, 3 и 5 јесу конгруентни са 3 или 5 по модулу 10. Зато мора важити $49^a - 6^b \in \{-7, -5, 3, 5\}$.

Са друге стране, $49^a \equiv 0 \pmod 7$, а $6^b \equiv (-1)^b \pmod 7$, па је $49^a - 6^b \equiv -(-1)^b \pmod 7$. Дакле, број $49^a - 6^b$ је конгруентан са 1 или 6 по модулу 7.

Међутим, бројеви -7, -5, 3 и 5 конгруентни су редом са 0, 2, 3 и 5 по модулу 7, те ниједан од њих није конгруентан са 1 или 6 по модулу 7. Добијена контрадикција показује да не могу постојати природни бројеви a и b за које је $|49^a - 6^b| < 13$. Стога, најмања вредност израза $|49^a - 6^b|$ јесте 13.

Други разред – Б категорија

1. Најпре одредимо услове дефинисаности једначине. Да би логаритми били дефинисани, мора важити $x > 0$. Под овим условом је и $\sqrt{x+1}$ дефинисан, а такође је $\sqrt{x+1} - 1 \neq 0$, јер би из $\sqrt{x+1} - 1 = 0$ следило $x = 0$, што није дозвољено. Дакле, област дефинисаности је интервал $(0, +\infty)$.

Сада поједноставимо десну страну:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{(\sqrt{x+1}+1) - (\sqrt{x+1}-1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{2}{x}.$$

Зато је

$$\frac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}} = \frac{2}{2/x} = x.$$

Према томе, полазна једначина је еквивалентна једначини

$$x^{\log_{10}^2 x + \log_{10} x^3 + 3} = x, \qquad x > 0.$$

Како је

$$\log_{10} x^3 = 3\log_{10} x,$$

добијамо

$$x^{(\log_{10} x)^2 + 3\log_{10} x + 3} = x.$$

Сада разматрамо два случаја.

(1) Ако је $x = 1$, онда је једначина очигледно задовољена.
(2) Ако је $x \neq 1$, онда су обе стране облика x^α и x^1, са истом позитивном базом различитом од 1. Зато морају бити једнаки експоненти:

$$(\log_{10} x)^2 + 3\log_{10} x + 3 = 1.$$

Одатле следи

$$(\log_{10} x)^2 + 3\log_{10} x + 2 = 0.$$

Уведимо смену $t = \log_{10} x$. Тада добијамо квадратну једначину $t^2+3t+2 = 0$, тј. $(t+1)(t+2) = 0$. Дакле,

$$t = -1 \qquad \text{или} \qquad t = -2.$$

Отуда је

$$\log_{10} x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{10},$$

или

$$\log_{10} x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{100},$$

односно сва решења полазне једначине су дата са

$$\boxed{x \in \left\{1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}\right\}.}$$

2. Један дијадски низ дужине 4 има облик $(a, b, 1-b, 1-a)$, где су a и b произвољно изабрани из скупа $\{0, 1\}$. Према томе, постоје тачно 4 дијадска низа дужине 4.

Низ дужине 16 који се састоји од 4 узастопна дијадска низа дужине 4 добија се тако што независно изаберемо сваки од та 4 блока. Према томе, укупан број таквих низова једнак је $4^4 = 256$.

Сада треба одузети оне међу њима који су и сами дијадски низови дужине 16. Нека су четири блока редом X_1, X_2, X_3, X_4. Ако цео низ дужине 16 треба да буде дијадски, онда први и последњи члан морају да дају збир 1, други и претпоследњи такође, и тако редом. Из тога следи да четврти блок мора бити једнак првом, а трећи блок мора бити једнак другом. Дакле, такав низ је у потпуности одређен избором прва два блока.

Пошто за сваки од блокова X_1 и X_2 постоје по 4 могућности, број дијадских низова дужине 16 који су састављени од четири дијадска блока дужине 4 једнак је $4 \cdot 4 = 16$. Дакле, тражени број једнак је $256 - 16 = 240$.

3. Нека је a_n n-ти члан датог низа. Тада број a_n има n цифара, при чему су цифре на непарним местима једнаке 7, а цифре на парним местима једнаке 3. Пошто је $99 = 9 \cdot 11$, а бројеви 9 и 11 су узајамно прости, број a_n је дељив са 99 ако и само ако је дељив и са 9 и са 11. Зато ћемо размотрити посебно случајеве када је n паран и када је n непаран.

(1) $n = 2k$, где је $k \in \mathbb{N}$: Тада број a_n има k непарних места и k парних места. На непарним местима стоји цифра 7, а на парним местима цифра 3. Зато је збир цифара броја a_n једнак $7k + 3k = 10k$. Да би a_n био дељив са 9, неопходно је и довољно да је

$$10k \equiv 0 \pmod{9}.$$

Како је $10 \equiv 1 \pmod{9}$, добијамо $k \equiv 0 \pmod{9}$. Са друге стране, да би a_n био дељив са 11, потребно је и довољно да разлика збира цифара на непарним и парним местима буде дељива са 11. Овде је та разлика $7k-3k = 4k$. Дакле, мора важити

$$4k \equiv 0 \pmod{11}.$$

Пошто је 4 узајамно прост са 11, следи

$$k \equiv 0 \pmod{11}.$$

Стога, k мора бити дељив и са 9 и са 11, те је најмања могућа вредност

$$k = \text{НЗС}(9, 11) = 99.$$

Тада је $n = 2k = 198$.
(2) $n = 2k+1$, где је k ненегативан цео број: Тада број a_n има $k+1$ непарних места и k парних места. Зато је збир његових цифара $7(k+1)+3k = 10k+7$. Да би a_n био дељив са 9, мора важити

$$10k + 7 \equiv 0 \pmod{9}.$$

Како је $10 \equiv 1 \pmod{9}$, добијамо $k + 7 \equiv 0 \pmod{9}$, односно

$$k \equiv 2 \pmod{9}.$$

Даље, разлика збира цифара на непарним и парним местима износи $7(k + 1) - 3k = 4k + 7$. Да би a_n био дељив са 11, потребно је и довољно да важи

$$4k + 7 \equiv 0 \pmod{11}.$$

С обзиром да је $7 \equiv -4 \pmod{11}$, ово је еквивалентно са

$$4k - 4 \equiv 0 \pmod{11},$$

те добијамо

$$4(k - 1) \equiv 0 \pmod{11}.$$

Како је 4 узајамно прост са 11, следи

$$k \equiv 1 \pmod{11}.$$

Дакле, треба наћи најмањи ненегативан цео број k такав да важи систем конгруенција

$$k \equiv 2 \pmod{9}, \qquad k \equiv 1 \pmod{11}.$$

Бројеви облика $k = 9t + 2$ су

$$2, 11, 20, 29, 38, 47, 56, \ldots$$

а први међу њима који је конгруентан са 1 по модулу 11 јесте 56. Стога, најмање k је 56, па је $n = 2k + 1 = 113$.

Дакле, у првом случају добили смо $n = 198$, а у другом $n = 113$. Како је $113 < 198$, следи да се први члан низа дељив са 99 добија за $n = 113$.

Зато је тражени број

$$\underbrace{7373\ldots37}_{113 \text{ цифара}},$$

тј. број који се налази на 113-том месту датог низа.

$$\boxed{\text{Први члан низа дељив са 99 јесте } \underbrace{7373\ldots37}_{113 \text{ цифара}}.}$$

4. (а) Применимо неједнакост троугла на бројеве $y - a$ и $y - b$. Добијамо $|y - a| + |y - b| \geq |(y - a) - (y - b)|$. Како је $(y - a) - (y - b) = b - a$, следи

$$|(y - a) - (y - b)| = |b - a|.$$

Међутим, из услова $a < b$, имамо $b - a > 0$, па је $|b - a| = b - a$, тј.

$$|y - a| + |y - b| \geq b - a,$$

те је тврђење доказано.

Напомена. Једнакост важи ако и само ако је $y \in [a, b]$.

(б) Након ослобађања од апсолутних вредности, у зависности од x, у изразу $|x - 1| + |x - 2| + ... + |x - 2023| + |x - 2024|$, неки од сабирака остају исти, док неки мењају знак. Зато ће дати израз имати облик

$$S = z_1(x - 1) + z_2(x - 2) + ... + z_{2023}(x - 2023) + z_{2024}(x - 2024),$$

где су $z_1, z_2, ..., z_{2023}, z_{2024} \in \{-1, 1\}$. Сада је

$$S = (z_1 + z_2 + ... + z_{2023} + z_{2024})x - (z_1 \cdot 1 + z_2 \cdot 2 + ... + z_{2023} \cdot 2023 + z_{2024} \cdot 2024). \quad (1)$$

Ако је збир $z_1 + z_2 + ... + z_{2023} + z_{2024} = 0$, онда је број S рационалан, јер је једнак са $z_1 \cdot 1 + z_2 \cdot 2 + ... + z_{2023} \cdot 2023 + z_{2024} \cdot 2024$. Ако је збир $z_1 + z_2 + ... + z_{2023} + z_{2024} \neq 0$, онда број S не може бити рационалан, зато што из једнакости (1) добијамо $x = \frac{S + (z_1 \cdot 1 + z_2 \cdot 2 + ... + z_{2023} \cdot 2023 + z_{2024} \cdot 2024)}{z_1 + z_2 + ... + z_{2023} + z_{2024}}$, па уколико је S рационалан број, број x је такође рационалан, као количник два рационална броја, што није могуће. Дакле, број S је рационалан једино када је $z_1 + z_2 + ... + z_{2023} + z_{2024} = 0$.

Како су бројеви $z_1, z_2, ..., z_{2023}, z_{2024} \in \{-1, 1\}$ последња једнакост је задовољена ако и само ако је међу бројевима $z_1, z_2, ..., z_{2023}, z_{2024}$ број оних који су једнаки 1 једнак броју оних који су једнаки -1, односно ако их има по 1012. Према томе, број S је рационалан ако и само ако је број x већи од тачно 1012 бројева из скупа $\{1, 2, ..., 2023, 2024\}$, односно ако и само ако је $x \in (1012, 1013)$. Тада је $z_1 = z_2 = ... = z_{1012} = 1$ и $z_{1013} = ... = z_{2023} = z_{2024} = -1$, па је на основу (1)

$$S = (\underbrace{1+1+...+1}_{1012}\underbrace{-1-1-...-1}_{1012})x - (1+2+...+1012-1013-1014-...-2024) =$$

$$= (1013-1) + (1014-2) + ... + (2024-1012) = 1012 \cdot 1012 = 1012^2. \qquad (2)$$

Овим смо коначно дешифровали да задати услов у проблему заправо значи да је

$$|x-1| + |x-2| + ... + |x-2023| + |x-2024| = 1012^2.$$

Да би комплетирали доказ датог тврђења остаје нам да докажемо да за сваки реалан број y важи неједнакост

$$|y-1| + |y-2| + ... + |y-2023| + |y-2024| \geq 1012^2. \qquad (2)$$

У том циљу, користећи неједнакост из дела (а) добијамо:

$$|y-1| + |y-2| + ... + |y-2023| + |y-2024| =$$

$$= (|y-1| + |y-2024|) + (|y-2| + |y-2023|) + ... + (|y-1012| + |y-1013|) \geq$$

$$\geq (2024-1) + (2023-2) + ... + (1013-1012) = 2023 + 2021 + ... + 1 =$$

$$= (2023+1) + (2021+3) + ... + (1013+1011) = 2024 \cdot 506 = 1012^2.$$

Овим смо доказали неједнакост (2), чиме смо употпунили доказ тврђења.

5. Означимо $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle ACB$. Како су O_b и O_c центри описаних кружница троуглова AHC и ABH, обе тачке припадају симетрали дужи AH. Пошто је $AH \perp BC$, та симетрала је паралелна са BC, па је $O_bO_c \parallel BC$.

Докажимо да је и $O_bC \parallel O_cB$.

Пошто је O_b центар описане кружнице троугла AHC, у једнакокраком троуглу O_bAC важи

$$\angle O_bCA = 90^\circ - \frac{\angle CO_bA}{2}.$$

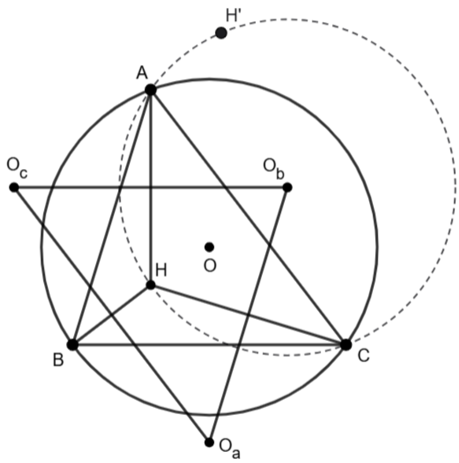
Означимо са H' произвољну тачку на описаној кружници троугла AHC која се налази на луку AC на ком се не налази тачка H. Тада је $\angle AH'C = 180^\circ - \angle AHC$, па пошто је $\angle CO_bA$ централни угао над CA, то је $\angle CO_bA = 2 \cdot \angle CH'A$ и $\angle O_bCA = 90^\circ - (180^\circ - \angle AHC) = \angle AHC - 90^\circ$.

Јасно, $\angle HAC = 90^\circ - \gamma$ и $\angle HCA = 90^\circ - \alpha$, па је $\angle AHC = \alpha + \gamma = 180^\circ - \beta$. Отуда добијамо $\angle O_bCA = 90^\circ - \beta$.

Аналогно добијамо $\angle O_cBA = 90^\circ - \gamma$.
Сада је

$$\angle O_cBC + \angle O_bCB = 90^\circ - \gamma + \beta + 90^\circ - \beta + \gamma = 180^\circ,$$

одакле следи $O_bC \parallel O_cB$. Према томе, четвороугао O_cO_bCB је паралелограм, па је $O_bO_c = BC$. Аналогно се доказује $O_aO_b = AB$ и $O_aO_c = AC$, одакле следи подударност троуглова ABC и $O_aO_bO_c$.



Трећи разред – Б категорија

1. Нека је c хипотенуза датог правоуглог троугла. Пошто су a и b катете, важи

$$a > 0, \qquad b > 0.$$

Поред тога, из дефинисаности логаритма на левој страни следи

$$\frac{a-b}{2} > 0,$$

па је

$$a > b.$$

Нека су α и β оштри углови правоуглог троугла, при чему је α угао наспрам катете a, а β угао наспрам катете b. Пошто је у троуглу већа страница наспрам већег угла, из $a > b$ следи

$$\alpha > \beta.$$

Полазну једначину помножимо са 2:

$$2\log_8\frac{a-b}{2}=\log_8 a+\log_8 b-\log_8 2.$$

Применом особина логаритама добијамо

$$\log_8\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\log_8\frac{ab}{2}.$$

Како је логаритамска функција са основом 8 инјективна на $(0,\infty)$, следи

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{ab}{2}.$$

Множењем са 4 добијамо

$$(a-b)^2=2ab,$$

односно

$$a^2-2ab+b^2=2ab.$$

Одатле следи

$$a^2+b^2-4ab=0.$$

Како је троугао правоугли, по Питагориној теореми важи

$$a^2+b^2=c^2,$$

па претходна једнакост постаје

$$c^2-4ab=0.$$

Пошто је $c>0$, можемо поделити са c^2, па добијамо

$$1-4\frac{a}{c}\frac{b}{c}=0.$$

Сада, како је α угао наспрам катете a, имамо $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ и $\cos\alpha=\frac{b}{c}$. Зато претходна једнакост постаје

$$1-4\sin\alpha\cos\alpha=0,$$

односно

$$4\sin\alpha\cos\alpha=1.$$

С обзиром да важи

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

следи $2\sin 2\alpha=1$, тј. $\sin 2\alpha=\frac{1}{2}$.

Међутим, угао α је оштар, те је $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, тј. $0^\circ < 2\alpha < 180^\circ$. У том интервалу једначина

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$$

има решења

$$2\alpha = 30^\circ \qquad \text{или} \qquad 2\alpha = 150^\circ.$$

Дакле,

$$\alpha = 15^\circ \qquad \text{или} \qquad \alpha = 75^\circ.$$

Али већ знамо да је $\alpha > \beta$, те како је

$$\alpha + \beta = 90^\circ,$$

већи од ова два оштра угла мора бити 75°. Стога,

$$\alpha = 75^\circ, \qquad \beta = 15^\circ.$$

Из свега наведеног, углови полазног правоуглог троугла су дати са:

$$\boxed{15^\circ,\ 75^\circ,\ 90^\circ.}$$

2. Посматрајмо осни пресек купе. Добијамо једнакокраки троугао ABC, где је B врх купе, а AC пречник основе осног пресека. У тај троугао уписана је кружница, која је осни пресек уписане лопте. Нека је O центар те кружнице и нека је њен полупречник R. Нека је D средиште дужи AC. Тада је

$$BD = h$$

висина купе, а

$$DC = r$$

полупречник основе купе.

Нека је

$$\angle DBC = \alpha.$$

Пошто је BD оса симетрије осног пресека, угао при врху троугла ABC једнак је 2α, па важи

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Нека је E подножје нормале из тачке O на крак BC. Пошто је O центар уписане кружнице, важи

$$OD = R \qquad \text{и} \qquad OE = R.$$

Сада посматрајмо правоугли троугао BOE. Како је O на оси симетрије троугла ABC, тачке B, O и D су колинеарне. Зато је

$$\angle OBE = \angle DBC = \alpha.$$

Из правоуглог троугла BOE следи

$$\sin\alpha = \frac{OE}{OB} = \frac{R}{OB},$$

па је

$$OB = \frac{R}{\sin\alpha}.$$

Како су B, O и D колинеарне и тачка O лежи између B и D, добијамо

$$BD = BO + OD = \frac{R}{\sin\alpha} + R.$$

Дакле,

$$h = BD = \frac{R(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Даље, у правоуглом троуглу BDC важи

$$\tan\alpha = \frac{DC}{BD} = \frac{r}{h},$$

па следи

$$r = h\tan\alpha.$$

Убацивањем израза за h добијамо

$$r = \frac{R(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}\tan\alpha = \frac{R(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}.$$

Запремина купе једнака је

$$K = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Заменом израза за r и h добијамо

$$K = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}\right)^2\left(\frac{R(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}\right).$$

Пошто је

$$\cos^2\alpha = (1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha),$$

следи

$$K = \frac{\pi R^3(1+\sin\alpha)^2}{3\sin\alpha(1-\sin\alpha)}.$$

Са друге стране, ваљак описан око лопте има полупречник основе R и висину $2R$, па је његова запремина

$$V = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3.$$

Према томе,
$$\frac{K}{V} = \frac{(1+\sin\alpha)^2}{6\sin\alpha(1-\sin\alpha)}.$$
Означимо
$$s = \sin\alpha, \qquad 0 < s < 1.$$
Тада добијамо
$$\frac{K}{V} = \frac{(1+s)^2}{6s(1-s)}.$$
Упоредимо сада овај израз са $\frac{4}{3}$:
$$\frac{K}{V} - \frac{4}{3} = \frac{(1+s)^2}{6s(1-s)} - \frac{4}{3} = \frac{(1+s)^2 - 8s(1-s)}{6s(1-s)}.$$
Сређивањем бројиоца добијамо
$$(1+s)^2 - 8s(1-s) = 1 + 2s + s^2 - 8s + 8s^2 = 9s^2 - 6s + 1 = (3s-1)^2.$$
Зато је
$$\frac{K}{V} - \frac{4}{3} = \frac{(3s-1)^2}{6s(1-s)} \geq 0,$$
јер је $0 < s < 1$, па је именилац позитиван.

Отуд следи
$$\frac{K}{V} \geq \frac{4}{3},$$
односно
$$K \geq \frac{4}{3}V.$$

Дакле, за сваку такву купу важи $K \geq \dfrac{4}{3}V$, па је кандидат
$$m = \frac{4}{3}.$$

Са друге стране, једнакост
$$\frac{K}{V} = \frac{4}{3}$$
важи ако и само ако је
$$(3s-1)^2 = 0,$$
тј. ако и само ако је
$$s = \frac{1}{3}.$$
Пошто постоји угао $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ такав да је
$$\sin\alpha = \frac{1}{3},$$

следи да се вредност $\dfrac{4}{3}$ заиста достиже. Према томе, $\boxed{m_{\max} = \dfrac{4}{3}.}$ Како из $K \geq \frac{4}{3}V$ и $\frac{4}{3} > 1$ следи $K > V$, једнакост $K = V$ није могућа. Тиме је доказан и део (а). Стога,

$$\boxed{K \neq V} \qquad \text{и} \qquad \boxed{m_{\max} = \frac{4}{3}.}$$

3. Посматрајмо дату једначину по модулу 3. Тада важи $5^x \equiv 16 \equiv 1 \pmod 3$, односно $(-1)^x \equiv 1 \pmod 3$, па закључујемо да је x паран број. Дакле, можемо писати $x = 2x_1$ за $x_1 \in \mathbb{N}$. Једначина постаје

$$5^{2x_1} - 3^y = 16 \quad \Rightarrow \quad (5^{x_1} - 4)(5^{x_1} + 4) = 3^y.$$

Како је десна страна степен броја 3, следи да су и бројеви $5^{x_1} - 4$ и $5^{x_1} + 4$ такође степени броја 3. Нека је зато

$$5^{x_1} - 4 = 3^a, \qquad 5^{x_1} + 4 = 3^b,$$

где је $a, b \in \mathbb{N}_0$ и $a < b$. Одузимањем ове две једначине добијамо $3^b - 3^a = 8$.

Пошто је лева страна дељива са 3^a, а број 8 није дељив са 3, мора бити $a = 0$. Тада добијамо $b = 2$ и $x_1 = 1$, па је $x = 2$ и $y = 2$.

Дакле, једино решење је $(x, y) = (2, 2)$.

4. Нека је у неком тренутку растојање између два жетона једнако d, где под растојањем подразумевамо број празних поља између њих. На почетку је $d = n - 2$.

(a) Нека је $n \equiv 2 \pmod 3$. Тада је

$$d = n - 2 \equiv 0 \pmod 3,$$

па је почетно растојање облика $3m$ за неки $m \in \mathbb{N}$.

Бојанова стратегија је следећа: ако Ана у свом потезу помери жетон за једно поље, Бојан у свом наредном потезу помера свој жетон за два поља; ако Ана помери жетон за два поља, Бојан помера свој жетон за једно поље.

На тај начин, после Аниног и Бојановог потеза заједно, растојање се смањи за 3. Дакле, ако је пре Аниног потеза растојање дељиво са 3, онда је и после Бојановог потеза опет дељиво са 3.

Према томе, Бојан може да одржава да после сваког његовог потеза растојање буде облика $3m$. То значи да, кад год Ана има могућност да одигра потез, има је и Бојан, јер он увек одговара комплементарним потезом.

Како се растојање при сваком потезу смањује, игра се мора завршити после коначно много корака. Пошто Бојан увек има одговор на Анин потез, следи да ће последњи потез одиграти Бојан, па Ана остаје без потеза.

(б) Нека је $n \equiv 0$ или $n \equiv 1 \pmod 3$.

Ако је $n \equiv 0 \pmod 3$, тада је

$$d = n - 2 \equiv 1 \pmod 3,$$

па је почетно растојање облика $3m+1$. Ана тада у првом потезу помери свој жетон за једно поље, па ново растојање постаје облика $3m$.

Ако је $n \equiv 1 \pmod 3$, тада је

$$d = n - 2 \equiv 2 \pmod 3,$$

па је почетно растојање облика $3m+2$. Ана тада у првом потезу помери свој жетон за два поља, па ново растојање постаје облика $3m$.

У оба случаја Ана својим првим потезом доводи игру у позицију из дела (а), само сада је на потезу Бојан. Зато је Бојан у губитничкој позицији.

Напомена. У суштини, у решењу смо издвојили победничке и губитничке позиције. Приметимо да свакој позицији у игри, одређеној растојањем d између жетона, можемо придружити атрибут *победничка* или *губитничка*. Кажемо да је позиција победничка ако играч који је на потезу из те позиције може да одигра тако да себи обезбеди победу уз оптималну игру, док је позиција губитничка ако, шта год да играч на потезу уради, противнику оставља победничку позицију.

Размотримо неколико вредности растојања d:

- $d = 1$ позиција је победничка, јер играч на потезу помери свој жетон за једно поље, жетони постају суседни и противник више нема дозвољен потез;
- $d = 2$ позиција је победничка, јер играч на потезу може да помери жетон за два поља и тиме завршава игру;
- $d = 3$ позиција је губитничка, јер играч на потезу може да пређе само у позиције за које је $d = 2$ или $d = 1$, чиме (у оба случаја) оставља противнику победничку позицију;
- $d = 4$ позиција је победничка, јер се једним потезом може прећи у позицију $d = 3$, чиме противник остаје у губитничкој позицији.

Оваквим разматрањем долазимо до следећих закључака (са П је означена победничка, а са Г губитничка позиција):

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
тип позиције	П	П	Г	П	П	Г	П	П	Г	П	$\cdots$

Докажимо да су губитничке позиције оне у којима је d дељиво са 3, док су све остале победничке. То доказујемо индукцијом по d. Већ смо проверили тврђење за $d = 1, 2, 3$. Претпоставимо сада да важи за сва растојања мања од неког d, и покажимо да тада важи и за d.

Из позиције са растојањем d, играч на потезу може да пређе само у позицију са растојањем $d - 1$ или $d - 2$, јер свој жетон може померити за једно или два поља ка противничком жетону.

- Ако је $d \equiv 0 \pmod 3$, онда $d - 1$ и $d - 2$ нису дељиви са 3, па су по индуктивној хипотези обе одговарајуће позиције победничке. Зато је позиција са растојањем d губитничка.
- Ако је $d \equiv 1 \pmod 3$, онда је $d - 1 \equiv 0 \pmod 3$, па је по индуктивној хипотези позиција са растојањем $d-1$ губитничка. Дакле, позиција са растојањем d је победничка.
- Ако је $d \equiv 2 \pmod 3$, онда је $d - 2 \equiv 0 \pmod 3$, па је по индуктивној хипотези позиција са растојањем $d-2$ губитничка. Дакле, позиција са растојањем d је победничка.

Тиме је индукција завршена, па смо доказали да су губитничке позиције управо оне за које је $d \equiv 0 \pmod 3$.

5. Након ослобађања од апсолутних вредности, у зависности од x, у изразу $|x-1| + |x-2| + ... + |x-2023| + |x-2024|$, неки од сабирака остају исти, док неки мењају знак. Зато ће дати израз имати облик

$$S = z_1(x-1) + z_2(x-2) + ... + z_{2023}(x-2023) + z_{2024}(x-2024),$$

где је $z_1, z_2, ..., z_{2023}, z_{2024} \in \{-1, 1\}$. Сада је

$$S = (z_1 + z_2 + ... + z_{2023} + z_{2024})x - (z_1 \cdot 1 + z_2 \cdot 2 + ... + z_{2023} \cdot 2023 + z_{2024} \cdot 2024). \quad (1)$$

Ако је збир $z_1 + z_2 + ... + z_{2023} + z_{2024} = 0$, онда је број S рационалан, јер је једнак са $z_1 \cdot 1 + z_2 \cdot 2 + ... + z_{2023} \cdot 2023 + z_{2024} \cdot 2024$. Ако је збир $z_1 + z_2 + ... + z_{2023} + z_{2024} \neq 0$, онда број S не може бити рационалан, зато што из једнакости (1) добијамо $x = \frac{S + (z_1 \cdot 1 + z_2 \cdot 2 + ... + z_{2023} \cdot 2023 + z_{2024} \cdot 2024)}{z_1 + z_2 + ... + z_{2023} + z_{2024}}$, па уколико је S рационалан број, број x је такође рационалан, као количник два рационална броја, што није могуће. Дакле, број S је рационалан једино када је $z_1 + z_2 + ... + z_{2023} + z_{2024} = 0$.

Како су бројеви $z_1, z_2, ..., z_{2023}, z_{2024} \in \{-1, 1\}$ последња једнакост је задовољена ако и само ако је међу бројевима $z_1, z_2, ..., z_{2023}, z_{2024}$ број оних који су једнаки 1 једнак броју оних који су једнаки -1, односно ако их има по 1012. Према томе, број S је рационалан ако и само ако је број x већи од тачно 1012 бројева из скупа $\{1, 2, ..., 2023, 2024\}$, односно ако и само ако је $x \in (1012, 1013)$. Тада је $z_1 = z_2 = ... = z_{1012} = 1$ и $z_{1013} = ... = z_{2023} = z_{2024} = -1$, па је на основу (1)

$$S = (\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{1012} \underbrace{-1 - 1 - ... - 1}_{1012})x - (1 + 2 + ... + 1012 - 1013 - 1014 - ... - 2024) =$$

$$= (1013 - 1) + (1014 - 2) + ... + (2024 - 1012) = 1012 \cdot 1012 = 1012^2. \qquad (2)$$

Овим смо коначно дешифровали да задати услов у проблему заправо значи да је

$$|x - 1| + |x - 2| + ... + |x - 2023| + |x - 2024| = 1012^2.$$

Да би комплетирали доказ датог тврђења остаје нам да докажемо да за сваки реалан број y важи неједнакост

$$|y - 1| + |y - 2| + ... + |y - 2023| + |y - 2024| \geq 1012^2. \qquad (2)$$

Нека су сада a и b произвољни реални бројеви за које важи $a < b$. Одредимо најмању вредност израза $|y-a|+|y-b|$. Разликоваћемо три случаја:

1. $y > b$. Тада је $|y - a| + |y - b| = (y - a) + (y - b) > y - a > b - a$.
2. $b \geq y \geq a$. Сада је $|y - a| + |y - b| = (y - b) + (b - y) = b - a$.
3. $a > y$. У овом случају имамо $|y-a|+|y-b| = (a-y)+(b-y) > b-y > b-a$.

На овај начин смо доказали да за сваки реалан број y важи неједнакост

$$|y - a| + |y - b| \geq b - a. \qquad (3)$$

Сада користећи неједнакост (3) добијамо

$$|y - 1| + |y - 2| + ... + |y - 2023| + |y - 2024| =$$

$$= (|y - 1| + |y - 2024|) + (|y - 2| + |y - 2023|) + ... + (|y - 1012| + |y - 1013|) \geq$$

$$\geq (2024 - 1) + (2023 - 2) + ... + (1013 - 1012) = 2023 + 2021 + ... + 1 =$$

$$= (2023 + 1) + (2021 + 3) + ... + (1013 + 1011) = 2024 \cdot 506 = 1012^2.$$

Овим смо доказали неједнакост (2), чиме смо употпунили доказ тврђења.

Четврти разред – Б категорија

1. Нека та три броја, у неком поретку, чине аритметички низ. Тада их можемо записати као $a-d$, a, $a+d$, где је $d \neq 0$.

Пошто ти исти бројеви, можда у другом поретку, чине и геометријски низ, један од њих мора бити средњи члан тог геометријског низа. За геометријски низ x, y, z важи $y^2 = xz$.

Размотримо све могућности.

Ако је средњи члан геометријског низа број a, онда би важило $a^2 = (a-d)(a+d) = a^2 - d^2$, одакле следи $d = 0$, што је немогуће јер су бројеви различити.

Ако је средњи члан геометријског низа број $a-d$, онда важи $(a-d)^2 = a(a+d)$. Сређивањем добијамо $a^2 - 2ad + d^2 = a^2 + ad$, односно $d^2 - 3ad = 0$. Пошто је $d \neq 0$, следи $d = 3a$, па је и $a \neq 0$.

Тада су та три броја једнака $a - d = -2a$, a и $a + d = 4a$. Они заиста могу да образују геометријски низ, на пример у поретку a, $-2a$, $4a$, са количником -2. Ако их узмемо у обрнутом поретку, $4a$, $-2a$, a, добијамо количник $-\dfrac{1}{2}$.

Ако је средњи члан геометријског низа број $a+d$, аналогно добијамо $(a+d)^2 = a(a-d)$, одакле следи $d = -3a$. То даје исти скуп бројева, само у другом поретку, па не добијамо ништа ново.

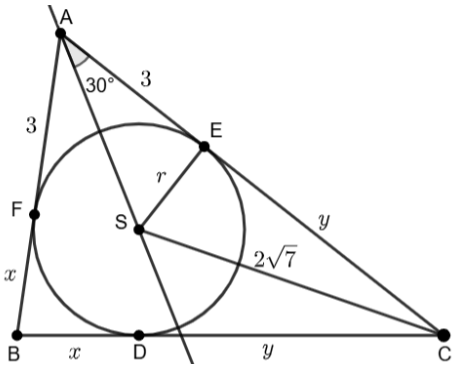
Према томе, једина могућа три броја су, до заједничког ненултог множиоца, облика -2, 1, 4. Зато су могуће вредности количника геометријског низа само -2 и $-\dfrac{1}{2}$.

Дакле, највећа могућа вредност тог количника је $-\dfrac{1}{2}$.

2. Из једнакости тангентних дужи добијамо да важи $|AF| = |AE| = 3$, $|BF| = |BD| = x$ и $|CE| = |CD| = y$.
Нека је $r = |ES|$ полупречик уписане кружнице троугла ABC. Како је AS симетрала угла $\angle EAF$, важи $\angle EAS = 30°$. Из троугла AES следи $r = 3\operatorname{tg} 30° = \sqrt{3}$.
Применом Питагорине теореме на троугао CSE добијамо $y = 5$, па је $|AC| = 8$.
Према томе, странице троугла ABC су $a = 5 + x$, $b = 8$ и $c = 3 + x$, па је његов полуобим $s = 8 + x$.
Површину троугла ABC можемо изразити на три начина:

- Користећи Херонов образац добијамо
$$P = \sqrt{(8+x) \cdot 3 \cdot x \cdot 5} = \sqrt{15x(8+x)};$$
- Применом формуле $P = r \cdot s$ добијамо $P = \sqrt{3}(8 + x)$;
- Из $P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ добијамо $P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (3 + x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = (6 + 2x)\sqrt{3}$.

Изједначавањем било која два од претходна три израза за површину добијамо $x = 2$, одакле је $P = 10\sqrt{3}$.



3. Решење задатка је идентично решењу 4. задатка са Државног такмичења за трећи разред - Б категорија.

4. Јасно је да је $z \geq 1$. Нека је $L = 3^x + 6^y$ и $R = 2025^z$. Запишимо једначину као

$$3^x + 3^y \cdot 2^y = 3^{4z} \cdot 5^{2z}.$$

Размотримо следеће случајеве:

1° $x > y$: Тада је L дељив са 3^y, али није дељив са 3^{y+1}, а R је дељив са 3^{4z}, али није дељив са 3^{4z+1}, те је $y = 4z$. Дељењем обе стране једначине са 3^{4z} добијамо

$$3^{x-4z} + 2^{4z} = 5^{2z} \quad \Rightarrow \quad 3^{x-4z} = (5^z - 2^{2z})(5^z + 2^{2z}).$$

Следи да је $5^z - 2^{2z} = 3^a$ и $5^z + 2^{2z} = 3^b$, где су $b > a \geqslant 0$ цели бројеви и $a + b = x - 4z$. Међутим, $3^a + 3^b = 2 \cdot 5^z$ је број који није дељив са 3, а дељив је са 3^a, па је $a = 0$. Тада важи $5^z - 2^{2z} = 1$. Приметимо да $z = 1$ јесте решење, а за $z \geqslant 2$ је $5^z - 4^z = (5-4)(5^{z-1} + \cdots + 4^{z-1}) > 1$. Дакле, $z = 1$ и $y = 4$, одакле је $x = 6$.

2° $x < y$: Тада је L дељив са 3^x, али није дељив са 3^{x+1}, а R је дељив са 3^{4z}, али није дељив са 3^{4z+1}, те је $x = 4z$. Дељењем обе стране једначине са 3^{4z} добијамо

$$1 + 3^{y-4z} \cdot 2^y = 5^{2z} \quad \Rightarrow \quad 3^{y-4z} \cdot 2^y = (5^z - 1)(5^z + 1).$$

Приметимо да је разлика бројева $5^z - 1$ и $5^z + 1$ једнака 2, па један од њих није дељив са 3. Даље, важи $5^z + 1 \equiv 2 \pmod 4$, па број $5^z + 1$ није дељив са 4. Како је $5^z + 1 > 5^z - 1$, једина могућност је

$$5^z - 1 = 2^{y-1} \quad \text{и} \quad 5^z + 1 = 2 \cdot 3^{y-4z}.$$

Одузимањем претходне две једначине и дељењем са 2 добијамо $1 = 3^{y-4z} - 2^{y-2}$. Одавде је $2^{y-2} \equiv 2 \pmod 3$, па је y непаран. Због тога је

$y-4z$ непаран, па је $3^{y-4z} \equiv -1 \pmod 4$.
За $y \geqslant 4$ је $2^{y-2} \equiv 0 \pmod 4$, па добијамо $3^{y-4z} - 2^{y-2} \equiv -1 \pmod 4$. У случајевима $y \in \{0,1,2,3\}$ директном провером закључујемо да нема целобројних решења.

3° $x = y$: Тада је $3^x + 6^x = 2025^z$. Запишимо једначину као

$$3^x(1+2^x) = 3^{4z} \cdot 5^{2z} \quad \Rightarrow \quad 1 + 2^x = 3^{4z-x} \cdot 5^{2z}.$$

Одавде је $x \geqslant 5$, па је $L = 3^x + 6^x \equiv (-1)^x \pmod 4$. С друге стране, $R = 2025^z \equiv 1 \pmod 4$, па је x парно. Тада је $1 + 2^x \equiv 1 + (-1)^x \equiv 2 \pmod 3$. Међутим, ово је немогуће пошто је $3^{4z-x} \cdot 5^{2z}$ потпун квадрат.

Дакле, једино решење постављене једначине је

$$(x, y, z) = (6, 4, 1).$$

5. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Претпоставимо супротно, тј. да важи $2 \in S$. Покажимо да $2026^k \notin S$ за свако $k \geqslant 1$, индукцијом по k.

База $k = 1$**:** Применимо услов за $n = 2$. Тачно један од $\{2, 4, 2026\}$ припада S. Пошто $2 \in S$, следи $2026 \notin S$.

Индуктивни корак: Претпоставимо $2026^k \notin S$. Применимо услов за $n = 2026^k$. Тачно један од $\{2026^k,\ 2 \cdot 2026^k,\ 1013 \cdot 2026^k\}$ припада S. Пошто $2026^k \notin S$, тачно један од $2 \cdot 2026^k$ и $1013 \cdot 2026^k$ припада S.

У случају да $2 \cdot 2026^k \in S$, применом услова за $n = 2 \cdot 2026^k$ на скуп $\{2 \cdot 2026^k,\ 4 \cdot 2026^k,\ 2026^{k+1}\}$, следи $2026^{k+1} \notin S$. Слично, ако $1013 \cdot 2026^k \in S$, применом услова за $n = 1013 \cdot 2026^k$ на скуп $\{1013 \cdot 2026^k,\ 2026^{k+1},\ 1013^2 \cdot 2026^k\}$, опет, следи $2026^{k+1} \notin S$.

Дакле $2026^{2026} \notin S$, што је у противречности са условом задатка. Претпоставка $2 \in S$ је нетачна, те $2 \notin S$.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Сваки природан број n се на јединствен начин може записати у облику $n = 2^a \cdot 1013^b \cdot k$, где су $a, b \geqslant 0$, а број k узајамно прост са 2 и 1013.

За фиксирано k, услов $|S \cap \{n, 2n, 1013n\}| = 1$ значи да је за свако (a, b) тачно један од бројева

$$2^a \cdot 1013^b \cdot k, \quad 2^{a+1} \cdot 1013^b \cdot k, \quad 2^a \cdot 1013^{b+1} \cdot k$$

у скупу S.

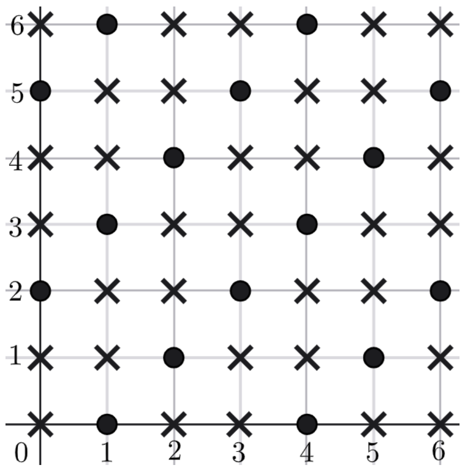
Пошто и број 2 и број $2026^{2026} = 2^{2026} \cdot 1013^{2026}$ одговарају случају $k = 1$, можемо да се ограничимо само на $k = 1$.

Придружимо броју $2^a \cdot 1013^b$ тачку (a, b) у целобројној мрежи (решетки). Тада услов из задатка постаје: у сваком скупу тачака облика $\{(a, b), (a+1, b), (a, b+1)\}$, где су $a, b \in \mathbb{N}_0$, изабрана је тачно једна тачка.

Претпоставимо $2 \in S$, тј. да је тачка $(1, 0)$ изабрана (јер је $2 = 2^1 \cdot 1013^0$). Тада:

- Пошто је тачка $(1,0)$ изабрана, у скупу тачака $\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$, тачно једна тачка сме бити изабрана. Дакле, тачке $(0,0)$ и $(0,1)$ нису изабране.
- Аналогно, посматрајући скуп $\{(1,0),(2,0),(1,1)\}$, закључујемо да тачке $(2,0)$ и $(1,1)$ нису изабране.
- Даље, посматрајући скуп $\{(0,1),(1,1),(0,2)\}$, закључујемо да мора бити изабрана тачка $(0,2)$.

Настављајући на исти начин, добијамо целобројну мрежу као на слици испод (изабране тачке означене су са $\bullet$, а неизабране са $\times$).



Једноставном индукцијом се доказује да је тачка (a,b) изабрана ако и само ако важи $a-b\equiv 1 \pmod 3$.

Међутим, броју $2026^{2026}=2^{2026}\cdot 1013^{2026}$ одговара тачка $(2026,2026)$, а како је $2026-2026\equiv 0 \pmod 3$, она није изабрана. Контрадикција! Дакле, $2\notin S$.

19. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

7. април 2026. године

Први дан

1. Колико највише различитих остатака при дељењу са 2026 могу давати елементи скупа
$$\{\pi(1), 2\pi(2), 3\pi(3), \ldots, 2026\pi(2026)\},$$
при чему је π произвољна пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, 2026\}$.

2. Дат је оштроугли троугао ABC, с тим да је $AB < AC$. Нека су D и E подножја висина из темена A и B, редом, H ортоцентар троугла ABC и нека је F пресечна тачка симетрале унутрашњег угла у темену A тог троугла са правом BC. Пресек правих AF и BE је тачка I. Ако се кружнице описане око троуглова BHC и DFI секу у тачкама M и P, доказати да је четвороугао $AEMP$ тетиван.

3. Дат је правилан $2n$-тоугао $A_1A_2\ldots A_{2n}$, $n \geq 3$, чије су странице обојене са n боја тако да су сваке две наспрамне странице обојене истом бојом. Одредити најмањи природан број m за који је могуће у унутрашњости овог многоугла изабрати тачке $B_1, B_2, \ldots, B_m$, затим повући извесне међусобно непресецајуће дужи, чији су крајеви тачке из скупа
$$\{A_1, A_2, \ldots, A_{2n}\} \cup \{B_1, B_2, \ldots, B_m\},$$
те сваку од тих дужи обојити једном од датих n боја, тако да се на тај начин почетни многоугао подели на конвексне четвороуглове са особином да су у сваком од њих наспрамне странице обојене истом бојом.

Предвиђено време за израду задатака је 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 бодова.
Решења задатака детаљно образложити.

19. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

8. април 2026. године

Други дан

4. У равни је дато $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, тачака од којих никоје три нису колинеарне. Маја и Коста играју следећу игру: на почетку Маја спаја сваке две од ових n тачака дужима и сваку од дужи усмерава ка једном од њена два темена, на који год она начин жели. Након тога, њих двоје играју игру која се састоји од k узастопних рунди. У свакој од рунди прво Коста бира једну од тачака коју нико није одабрао у ранијем току игре, након чега исто ради и Маја и тада рунду губи онај играч ка чијој тачки је усмерена дуж између две тачке изабране у тој рунди. Мајин циљ је да дужи на почетку усмери тако да, уколико она у наставку игре игра оптимално, независно од тога како Коста бира тачке, он не може победити ниједну од k рунди игре. На колико различитих начина Маја може испунити свој циљ?

5. Одредити све функције $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ такве да важи $f(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}) = \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}$, за све $x, y \in (0, +\infty)$.

6. Нека су k и l ненегативни цели бројеви и нека су r и s природни бројеви. Означимо са S скуп свих парова природних бројева (a, b) за које важи

$$a \mid b^2 + kb + 1, \qquad b \mid a^2 + al + 1.$$

Доказати да пар (r, s) припада скупу S ако и само ако је скуп

$$G = \{\text{НЗД}(a - r, b - s) \mid (a, b) \in S\}$$

бесконачан.

Предвиђено време за израду задатака је 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 бодова.
Решења задатака детаљно образложити.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - 19. СМО

Први дан

1. (ПРВО РЕШЕЊЕ) За свако $r \in \mathbb{F}_{1013}$ нека су o_r и e_r, редом, једини непаран и једини паран број из скупа $\{1, 2, \ldots, 2026\}$ који су конгруентни са $r \pmod{1013}$. Тада, за свака два $r, s \in \mathbb{F}_{1013}$ важи:

$$o_r o_s \equiv o_{rs}, \qquad o_r e_s \equiv e_{rs}, \qquad e_r e_s \equiv e_{rs} \pmod{2026}.$$

Конструисаћемо пермутацију π скупа $\{1, 2, \ldots, 2026\}$ на следећи начин:

$$\pi(o_0) = e_1, \qquad \pi(o_x) = o_{-1-x^{-1}}, \text{ за } x \neq 0,$$

$$\pi(e_0) = e_0, \qquad \pi(e_1) = o_{-1}, \qquad \pi(e_x) = e_{1-x^{-1}}, \text{ за } x \neq 0, 1.$$

Сада рачунамо остатке производа $k\pi(k)$:

$$o_0\pi(o_0) = 1013 \cdot 1014 \equiv 0 \equiv e_0 \pmod{2026},$$

а за $x \neq 0$,

$$o_x\pi(o_x) \equiv o_x\, o_{-1-x^{-1}} \equiv o_{x(-1-x^{-1})} = o_{-x-1} \pmod{2026}.$$

Даље је

$$e_0\pi(e_0) = 2026 \cdot 2026 \equiv 0 \equiv e_0 \pmod{2026},$$

$$e_1\pi(e_1) = 1014 \cdot 2025 \equiv 1012 \equiv e_{-1} \pmod{2026},$$

док за $x \neq 0, 1$,

$$e_x\pi(e_x) \equiv e_x\, e_{1-x^{-1}} \equiv e_{x(1-x^{-1})} = e_{x-1} \pmod{2026}.$$

Према томе, међу остацима бројева $k\pi(k)$ добијамо:

- све парне остатке e_r, за $r \in \mathbb{F}_{1013}$,
- све непарне остатке o_r, осим остатка $o_{-1} \equiv 2025 \pmod{2026}$.

Дакле, добијамо тачно 2025 различитих остатака при дељењу са 2026.

Још треба показати да није могуће добити свих 2026 остатака при дељењу са 2026. Претпоставимо супротно, тј. да су бројеви

$$\pi(1),\ 2\pi(2),\ \ldots,\ 2026\pi(2026)$$

међусобно неконгруентни по модулу 2026. Тада, међу њима има тачно 1013 непарних остатака. Како је производ $k\pi(k)$ непаран ако и само ако су и k и

$\pi(k)$ непарни, следи да се свих 1013 непарних бројева мора пресликавати у непарне бројеве. Мора бити $\pi(1013) = 1013$, јер бисмо у супротном добили два различита непарна броја дељива са 1013, што је немогуће. Према томе, за сваки непаран $k \neq 1013$ бројеви k и $\pi(k)$ су непарни и различити од 1013, те производи

$$k\pi(k), \qquad k \text{ непаран}, \ k \neq 1013,$$

дају тачно све непарне остатке различите од 1013. Међутим, ово није могуће. Заиста, ако означимо са

$$P = \prod_{\substack{k \text{ непаран} \\ k \neq 1013}} k,$$

отуда, с обзиром да π пермутује непарне бројеве различите од 1013, добијамо

$$\prod_{\substack{k \text{ непаран} \\ k \neq 1013}} k\pi(k) \equiv P^2 \pmod{1013}.$$

Са друге стране, бројеви $k\pi(k)$ дају тачно све непарне остатке различите од 1013, те је њихов производ конгруентан са P по модулу 1013. Дакле, $P^2 \equiv P \pmod{1013}$, па, како је $P \not\equiv 0 \pmod{1013}$, следи $P \equiv 1 \pmod{1013}$. Али, $P \equiv 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 1012 = (1012)! \equiv -1 \pmod{1013}$ по Вилсоновој теореми, што је контрадикција. Према томе, број различитих остатака је највише 2025.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Доказаћемо да за $n = 2p$, где је p непаран прост број постоји пермутација τ скупа $\{1, \ldots, 2p\}$ тако да бројеви $i\tau(i) \pmod{2p}$ дају тачно $2p-1$ различитих вредности. За сваки $r \in \mathbb{F}_p$ нека су o_r и e_r једини непаран, односно паран број из $\{1, \ldots, 2p\}$ конгруентан са $r \pmod{p}$. Тада важи

$$o_r o_s \equiv o_{rs}, \qquad o_r e_s \equiv e_{rs}, \qquad e_r e_s \equiv e_{rs} \pmod{2p}.$$

Нека је g примитиван корен по модулу p и $k = \frac{p-1}{2}$. Дефинишимо пермутацију $\sigma : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ са

$$\sigma(0) = 0, \ \sigma(g^i) = g^{i+1} \ (0 \leq i \leq k-1), \ \sigma(g^k) = 1, \ \sigma(g^i) = g^i \ (k+1 \leq i \leq 2k-1).$$

Тада мултискуп $\{r\sigma(r) : r \in \mathbb{F}_p\}$ садржи све елементе скупа $\mathbb{F}_p$, осим 1, при чему се -1 јавља два пута. Зато постоји јединствен $a \neq -1$ такав да $a\sigma(a) = -1$. Нека је $u = \sigma(a)$. Сада дефинишемо τ са

$$\tau(o_r) = \begin{cases} e_u, & r = a, \\ o_{\sigma(r)}, & r \neq a, \end{cases} \qquad \tau(e_r) = \begin{cases} o_u, & -\sigma(r) = u, \\ e_{-\sigma(r)}, & -\sigma(r) \neq u. \end{cases}$$

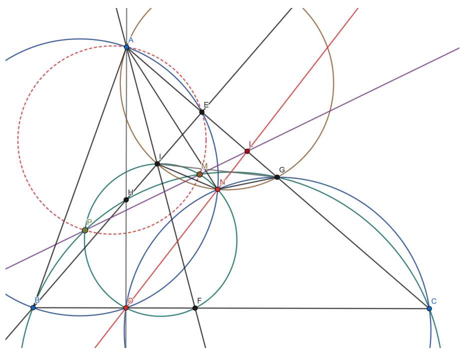
Ово је пермутација, јер слике непарних дају све o_t, осим што је o_u замењен са e_u, а слике парних дају све e_t, осим што је e_u замењен са o_u. За $r \neq a$ имамо $o_r\tau(o_r) \equiv o_{r\sigma(r)}$, док за $r = a$ важи $o_a\tau(o_a) \equiv e_{au} = e_{-1}$. Дакле, из непарних остатака добијамо све непарне остатке осим 1 и још e_{-1}. Даље, за свако $r \in \mathbb{F}_p$ важи

$$e_r \tau(e_r) \equiv e_{-r\sigma(r)} \pmod{2p},$$

одакле закључујемо да из парних остатака добијамо све парне остатке, осим e_{-1}. Зато, укупно добијамо све парне остатке и све непарне остатке осим 1, тј. тачно $2p-1$ различитих остатака модуло $2p$. Доказ да није могуће постићи свих $2p$ остатака је исти као и у првом решењу.

Аутор задатка: Вукашин Пантелић

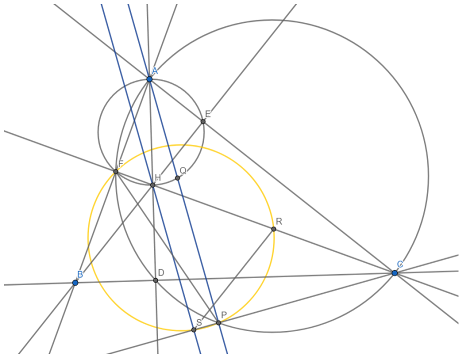
2. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Означимо са G други пресек кружнице описане око троугла BHC са правом AC и нека је тачка N други пресек кружница описаних око троуглова CGD и DFI. Такође, нека је тачка L пресек праве MP са правом AC. Унутрашње углове троугла ABC код темена A, B и C означимо са α, β и γ, редом.



Тада, из тетивности четвороугла $CGND$ имамо да је $\angle GND = 180^\circ - \gamma$, док из тетивности четвороугла $DFNI$ имамо да је $\angle DNI = \angle DFI = 90^\circ - \angle DAF = 90^\circ - (\frac{\alpha}{2} - (90^\circ - \beta)) = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \beta = \frac{\alpha}{2} + \gamma$. Сада имамо да је $\angle ING = 360^\circ - \angle DNI - \angle GND = 360^\circ - (\frac{\alpha}{2} + \gamma) - (180^\circ - \gamma) = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - \angle GAI$, одакле следи да је четвороугао $AING$ тетиван.

Стога, добијамо да је $\angle INA = \angle IGA = \frac{\alpha}{2}$, јер је тачка G симетрична слика тачке A при централној симетрији преко тачке E. Ово знамо зато што је тачка E подножје висине из темена B на праву AC, а из тетивности четвороугла $BHGC$ имамо да је $\angle BGC = \angle BHC = 180^\circ - \alpha$, па је $\angle BGA = \angle BAG$, што доказује претходно тврђење. Сада имамо да је $\angle DNA = \angle DNI + \angle INA = \frac{\alpha}{2} + \gamma + \frac{\alpha}{2} = \alpha + \gamma = 180^\circ - \beta = 180^\circ - \angle ABD$, па је четвороугао $ABDN$ тетиван. Како знамо да је четвороугао $ABDE$ тетиван, то је и четоворугао $ADNE$ тетиван. Отуда, како је тачка L пресек правих MP и CG, L је радикални центар кружница описаних око троуглова BHC, CGD и DFI, то су тачке D, N и L колинеарне.

Сада, посмтрајући потенцију тачке L у односу на кружницу описану око четвороугла $ADNE$, имамо да је $LN \cdot LD = LE \cdot LA$, док посматрајући потенцију тачке L у односу на кружницу описану око четвороугла $DFNI$, добијамо да важи $LN \cdot LD = LM \cdot LP$. Коначно, имамо $LM \cdot LP = LE \cdot LA$, одакле следи да је четовороугао $AEMP$ тетиван, што је и требало доказати.



(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Применимо инверзију у A са полупречником који је једнак $(AH \cdot AD)^{\frac{1}{2}}$. Тада, проблем постаје следећи: Нека је ABC троугао. Означимо са D, E и F подножја висина из темена A, B и C, тим редом. Нека је H ортоцентар полазног троугла. Претпоставимо да симетрала унутрашњег угла у темену A сече кружнице описане око троугла AFE и четвороугла $AFDC$, други пут, у тачкама Q и P, редом. Доказати да се тачка C налази на радикалној оси кружница PQH и DEF.

Стога, нека је R средиште дужи CH и S подножје нормале из тачке H на CP. Како је $\angle HSP = 90° = \angle HQP$, следи да је S на кружиници описаној око троугла HQP. Због потенције, довољно је показати да је $RPSF$ цикличан. Имамо да је $\angle RFP = \angle RCS = \angle RSP$, при чему прва једнакост следи, јер је P средиште лука FDC, али и друга, јер је HSC правоугли троугао и R је средиште његове хипотенузе. Тиме је доказ завршен.

Аутор задатка: Андрија Живадиновић

3. Тврдимо да је тражени минимум једнак $m = \binom{n-1}{2}$. Доказаћемо, најпре, горњу границу. Заправо, доказаћемо нешто јаче: Сваки централно симетричан конвексан $2n$-тоугао, $n \geq 3$, чије су наспрамне странице обојене истом бојом може се поделити на конвексне четвороуглове тражене врсте уз тачно $\binom{n-1}{2}$ унутрашњих тачака.

Доказ иде индукцијом по n. База индукције је случај $n = 3$. Тада је дати многоугао централно симетричан конвексан шестоугао $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, при чему су наспрамне странице исте боје. Нека је O његов центар симетрије. Тада су дужи OA_1, OA_3 и OA_5 међусобно непресецајуће у унутрашњости многоугла и деле шестоугао на три конвексна четвороугла: $A_1A_2A_3O$, $A_3A_4A_5O$ и $A_5A_6A_1O$. Обојимо дуж OA_3 бојом странице A_1A_2, дуж OA_5 бојом странице A_3A_4, а дуж OA_1 бојом странице A_5A_6. Тада у четвороуглу $A_1A_2A_3O$ наспрамне странице A_1A_2 и OA_3 имају исту боју, а наспрамне странице A_2A_3 и OA_1 такође имају исту боју, јер су странице A_2A_3 и A_5A_6 наспрамне у почетном шестоуглу. Аналогно важи и за преостала два четвороугла. Дакле, тврдња важи за $n = 3$. При томе је употребљена тачно једна унутрашња тачка, тј. у овом случају је $m = \binom{3-1}{2} = 1$.

Претпоставимо сада да је $n \geq 4$ и да тврђење важи за $2n - 2$. Нека је дат централно симетричан конвексан $2n$-тоугао $P = A_1A_2 \dots A_{2n}$, при чему су наспрамне странице исте боје. Индексе посматрамо по модулу $2n$, па је $A_{2n+1} = A_1$. Означимо са $e_i = \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ вектор i-те странице. По централној симетрији важи $e_{i+n} = -e_i$ за свако i, па посебно важи $e_{2n} = -e_n$. Нека је $v = e_{2n} = \overrightarrow{A_{2n}A_1}$. За $i = n+2, n+3, \dots, 2n-1$ дефинишимо тачку $B_{i-(n+1)}$ са особином $\overrightarrow{A_iB_{i-(n+1)}} = v$, а још ставимо да је $C_0 = A_n$ и $C_{n-1} = A_1$. Тада за свако $i = n+1, n+2, \dots, 2n-1$ четвороугао Q_i дефинисан са $Q_{n+1} = A_{n+1}A_{n+2}B_1C_0$, $Q_i = A_iA_{i+1}B_{i-n}B_{i-n-1}$, за $i = n+2, \dots, 2n-2$, $Q_{2n-1} = A_{2n-1}A_{2n}C_{n-1}B_{n-2}$, јесте паралелограм, јер важи $\overrightarrow{A_iB_{i-(n+1)}} = \overrightarrow{A_{i+1}B_{i+1-(n+1)}} = v$ и $\overrightarrow{B_{i-(n+1)}B_{i+1-(n+1)}} = \overrightarrow{A_iA_{i+1}} = e_i$ у свим случајевима у којима обе тачке постоје, док се гранични случајеви $i = n+1$ и $i = 2n-1$ тумаче преко $C_0 = A_n$ и $C_{n-1} = A_1$. Дакле, сваки Q_i је конвексан четвороугао.

Посматрајмо сада многоугао $P' = A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_{n-2}$. Његове узастопне странице имају векторе $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}, e_{n+2}, \dots, e_{2n-1}$: заиста, странице A_iA_{i+1} за $1 \leq i \leq n-1$ имају векторе e_i, затим је $\overrightarrow{A_nB_1} = \overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}} = e_{n+1}$, даље је $\overrightarrow{B_{i-(n+1)}B_{i+1-(n+1)}} = e_i$ за $i = n+2, \dots, 2n-2$, а најзад је $\overrightarrow{B_{n-2}A_1} = \overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}} = e_{2n-1}$. Према томе, низ смерова страница многоугла P' добија се из низа смерова страница многоугла P избацивањем пара наспрамних страница са векторима e_n и $e_{2n} = -e_n$. Како су смерови страница конвексног многоугла уређени строго монотоно око границе, следи да је и P' конвексан. С обзиром да се преостали вектори и даље јављају у наспрамним паровима $e_{i+n} = -e_i$, следи да је и P' централно симетричан. Дакле, P' је централно симетричан конвексан $(2n-2)$-тоугао. Поред тога, наспрамне странице многоугла P' имају исте боје. Заиста, свака страница многоугла P' или је нека од оригиналних страница A_iA_{i+1}, или је њена транслирана копија, па боју може да наследи од одговарајуће странице многоугла P. Како су у P наспрамне странице исте боје, исто важи и у P'.

Сада, обојимо сваки четвороугао Q_i на следећи начин: странице A_iA_{i+1} и одговарајућа супротна страница у Q_i обојимо истом бојом, а преостале две странице обојимо бојом странице $A_{2n}A_1$. Тада, у сваком Q_i наспрамне странице имају исту боју. По конструкцији, многоугао P' и четвороуглови $Q_{n+1}, Q_{n+2}, \dots, Q_{2n-1}$ имају дисјунктне унутрашњости, а њихова унија има исту границу као многоугао P. Стога је њихова унија управо цео многоугао P. Дакле, на тај начин добијамо поделу многоугла P на многоугао P' и $n-1$ конвексних четвороуглова $Q_{n+1}, \dots, Q_{2n-1}$. По индуктивној претпоставци, многоугао P' може се даље поделити на тражене конвексне четвороуглове уз тачно $\binom{n-2}{2}$ унутрашњих тачака. У нашој конструкцији нове унутрашње тачке су управо $B_1, B_2, \dots, B_{n-2}$, којих има $n-2$.

Зато за многоугао P добијамо да је укупан број унутрашњих тачака једнак $\binom{n-2}{2} + (n-2) = \binom{n-1}{2}$. Тиме је доказана горња граница $m \leq \binom{n-1}{2}$.

Сада доказујемо доњу границу. Посматрајмо произвољну допуштену поделу почетног правилног $2n$-тоугла на конвексне четвороуглове тражене врсте. Нека је b број добијених четвороуглова, а m број унутрашњих тачака.

У сваком добијеном четвороуглу појављују се највише две боје, јер су му наспрамне странице исте боје. За сваку боју која се појављује у том четвороуглу спојимо средине одговарајућег пара наспрамних страница. Тако у сваком четвороуглу добијамо највише две помоћне дужи, па се у њему може појавити највише једно пресецање помоћних дужи различитих боја.

Фиксирајмо сада једну боју c. Посматрајмо све помоћне дужи које одговарају боји c. Оне образују планарни граф G_c: његови врхови су средине свих страница боје c које се јављају у подели, а његове гране су управо поменуте помоћне дужи. Свака средина унутрашње странице боје c има степен 2, јер та страница припада тачно двама четвороугловима и у оба се појављује помоћна дуж боје c. Са друге стране, средина граничне странице почетног многоугла боје c има степен 1, јер та страница припада само једном четвороуглу. По услову задатка, на граници почетног многоугла постоје тачно две странице боје c и то наспрамне. Дакле, граф G_c има тачно два врха непарног степена, оба степена 1. Отуда следи да у G_c постоји јединствена повезана компонента која није циклус; она је проста полигонална линија која спаја средине управо тих двеју наспрамних граничних страница. Означимо ту линију са Γ_c.

Сада узмимо две различите боје c и d. Крајеви линије Γ_c леже на срединама двеју наспрамних страница боје c, а крајеви линије Γ_d на срединама двеју наспрамних страница боје d. На граници правилног $2n$-тоугла ове четири тачке се јављају наизменично: између две наспрамне странице боје c налази се тачно по једна од две странице боје d са сваке стране, јер су и странице боје d међусобно наспрамне. Стога, проста полигонална линија Γ_c дели многоугао на две области, а због наизменичног распореда крајева тачке на којима се завршава Γ_d леже у различитим областима. Зато линија Γ_d мора пресећи линију Γ_c. Дакле, за сваки пар различитих боја одговарајуће две линије секу се барем једном. Са друге стране, свако пресецање две такве линије може се догодити само унутар неког од четвороуглова из поделе, док се у сваком четвороуглу може појавити највише једно такво пресецање. Дакле, укупан број четвороуглова b није мањи од броја парова боја, те важи $b \geq \binom{n}{2}$.

Коначно, посматрајмо планарни граф добијен од свих страница четвороуглова у подели. Нека је V број његових врхова, а E број његових грана. Тада је $V = 2n + m$, јер су врхови управо темена почетног многоугла и унутрашње тачке поделе. Даље, како је свака од b унутрашњих области четвороугао, укупан број ивица које се појављују на границама свих тих области, рачунајући и мултиплицитет, једнак је $4b$. При томе се свака унутрашња грана броји двапут, а свака гранична страница почетног многоугла једном. Како граничних страница има $2n$, а укупан број грана је E, добијамо

$$4b = 2(E - 2n) + 2n = 2E - 2n,$$

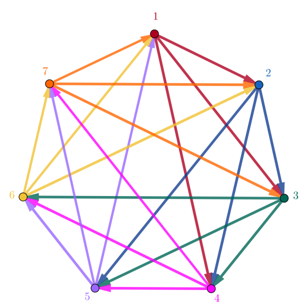
односно $E = 2b + n$. Отуда је, користећи Ојлерову формулу, број области једнак је $b+1$, док из $V - E + (b+1) = 2$ добијамо $(2n+m) - (2b+n) + (b+1) = 2$, односно $b = m + n - 1$. Комбинујући ово са неједнакости $b \geq \binom{n}{2}$, добијамо $m = b - (n-1) \geq \binom{n}{2} - (n-1) = \binom{n-1}{2}$.

Дакле, анализирајући претходно, $m = \binom{n-1}{2}$, чиме је доказ завршен.

Аутор задатка: Павле Мартиновић

Други дан

4. Тражени број је $(n-1)!$. Током решења, посматраћемо тачке заједно са усмереним дужима између њих као усмерен граф са n чворова. Рећи ћемо да чвор u побеђује чвор v уколико у графу постоји грана усмерена од u ка v. Током игре, Коста и Маја ефективно склањају чворове из графа, јер се једном изабрани чворови касније не могу бирати.



Прво покажимо пример графа који Маја може нацртати како би испунила свој циљ. Уколико чворове обележимо бројевима од 1 до $n = 2k+1$, посматрајмо граф у ком сваки чвор побеђује наредних k чворова, а губи од претходних k (циклично, по модулу n). Пример овог графа за $n = 7$, односно $k = 3$, дат је на слици изнад. Индукцијом ћемо доказати да уколико нацрта овај граф, Маја може испунити свој циљ у наставку игре. У случају $n = 3$, имамо троугао у ком су гране усмерене циклично, те Маја свакако може победити једину рунду која се одиграва. У случају генералног $n = 2k+1$, можемо без умањења општости, због симетрије овог графа, претпоставити да је Коста у првој рунди одабрао чвор број 1. У том случају, Маја може одабрати чвор $k+2$. Како је чвор $k+2$ тачно k чворова "пре" чвора 1, он га побеђује. Такође, сви преостали чворови у графу или губе од чвора 1 и побеђују чвор $k+2$ (то су $2, \ldots, k+1$), или побеђују чвор 1 и губе од $k+2$ (то су $k+3, \ldots, 2k+1$), па након брисања 1 и $k+2$ и ренумерације преосталих чворова добијамо исти граф за $k-1$, на коме Маја побеђује по индуктивној претпоставци.

Очигледно, уколико се чворови оригиналног графа који Маја нацрта могу ренумерисати тако да новодобијени граф буде управо горе описани граф, она може испунити свој циљ. Доказаћемо сада да су то једини графови који јој ово омогућавају.

Приметимо прво да је потребан услов да би граф који Маја нацрта испуњавао њен циљ да буде регуларан (сваки чвор има једнак број чворова које побеђује и чворова од којих губи), те да остаје регуларан након сваког њеног потеза. Уколико граф у неком тренутку више није регуларан, како је укупан број грана које излазе из свих чворова $\frac{n(n-1)}{2} = nk$, постојаће чвор v који губи од мање од k чворова. Тада Коста има следећу победничку стратегију: док је год то могуће, бира чвор који побеђује v (након чега Маја не сме да бира сам v јер би изгубила), док кад то више није могуће, бира v, а Маји остају само чворови који губе од v. Он ово може да учини, јер је пре тога морао највише $k-1$ пут да бира чвор који побеђује v, па је остала бар једна рунда.

Претпоставимо сада да је Маја нацртала граф такав да она може испунити свој циљ. По претходном, за сваки (Костин) чвор v у том графу, постоји (Мајин) чвор $f(v)$, тако да граф без $v, f(v)$ остаје регуларан. Конкретно, за свако v постоји $f(v)$ такав да сваки од преосталих $2k-1$ чворова или губи од v и побеђује $f(v)$, или побеђује v и губи од $f(v)$ (*). У наставку доказујемо нека кључна запажања о пресликавању f. Означимо произвољан чвор са 1 (остале ћемо означити у наставку).

$f(v)$ је јединствено одређено, тј. f је добро дефинисано: У супротном, нека и u и w задовољавају дати услов за неко v. Тада по (*), како u побеђује v, мора губити од w. Али по симетрији и w мора губити од u, контрадикција.

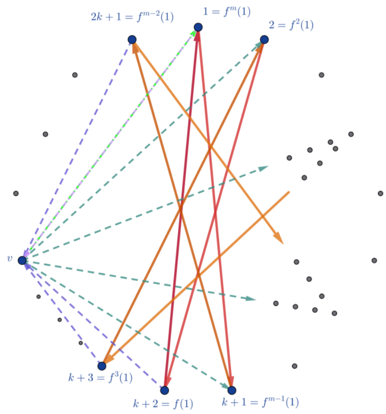
f је инјективно: У супротном, $f(u) = f(w)$ за неке $u \neq w$. Али тада w губи од $f(u) = f(w)$, па по (*) мора да побеђује u. Симетрично и u побеђује w, што води до контрадикције.

f је бијективно: Ово је сада директно из инјективности и тога да f пресликава коначан скуп чворова у самог себе. Конкретно, постоји (најмање) позитивно m тако да је $f^m(1) := f(f^{m-1}(1)) = 1$.

За све $0 < t < m$, $f^t(1)$ побеђује 1 ако и само ако је t непарно: Користећи индукцију, где за $t = 1$ следи из дефиниције, а даље из индуктивне претпоставке и (*) примењено на $v = f^{t-1}(1)$, $f(v) = f^t(1)$ и 1. Конкретно, $f^{m-1}(1)$ губи од $f^m(1) = 1$, па m мора бити непарно.

f је циклус, односно $m = n$: У супротном, постоји v које није $f^t(1)$ ни за једно t. Уколико v побеђује $1 = f(f^{m-1}(1))$, из (*) следи да губи од $f^{m-2}(1)$, односно побеђује $f^{m-3}(1)$, … . Како је m непарно, v побеђује и $f(1)$ уз 1, што је у контрадикцији са (*). Аналогно се показује и ако v губи од 1.

Коначно можемо да означимо преостале чворове. Нека је $f^{2i}(1)$ означено са $1+i$ за $i = 0, 1, \ldots, k$ и $f^{2i+1}(1)$ означено са $k+2+i$ за $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Остаје да покажемо да је овако нумерисан граф заиста граф с почетка, за шта је због цикличности f довољно да покажемо да 1 побеђује $2, 3, \ldots, k+1$ и губи од $k+2, k+3, \ldots, 2k+1$, што следи директно из дефиниције означавања и претпоследњег својства f.



Приметимо да је за фиксиран чвор 1 одговарајуће означавање преосталих чворова јединствено одређено, јер је пресликавање f јединствено одређено. Притом је чвор 1 одабран произвољно међу свих n чворова у графу, па се међу свих $n!$ означавања чворова бројевима од 1 до n сваки граф нацрта тачно n пута, што значи да је укупан број графова које Маја може нацртати на почетку како би испунила свој циљ $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

Аутор задатка: Андрија Живадиновић

5. Показаћемо да су једина решења функције $f(x) = x$ и $f(x) = 2$, $x > 0$. Посматрајмо два случаја.

1° Нека је f инјективна функција.

Нека су $x > 0$ и $k > 1$. Применом услова задатка на парове (x, xk) и $(x, x/k)$ добијамо да је $f\big(k + \frac{1}{k}\big) = \frac{f(x)}{f(xk)} + \frac{f(xk)}{f(x)} = \frac{f(x)}{f(x/k)} + \frac{f(x/k)}{f(x)}$. Дефинишимо $u = \frac{f(xk)}{f(x)}$ и $v = \frac{f(x/k)}{f(x)}$. Тада је $u + \frac{1}{u} = v + \frac{1}{v}$, те је $(u-v)\big(1 - \frac{1}{uv}\big) = 0$. Дакле, или је $u = v$, или је $uv = 1$. Прва могућност је немогућа, јер би из $u = v$ следило $f(xk) = f(x/k)$, одакле, због инјективности, важи $xk = x/k$, што није могуће за $k > 1$. Зато мора важити $uv = 1$, тј. $f(xk)f(x/k) = f(x)^2$, за свако $x > 0$ и свако $k > 1$.

Сада, нека су $y, z > 0$. Ако је $y \neq z$, узмимо $x = \sqrt{yz}$ и $k = \sqrt{y/z}$ или $k = \sqrt{z/y}$, тако да је $k > 1$. Тада, из претходне релације, добијамо да је $f(y)f(z) = f(\sqrt{yz})^2$. Ова једнакост је очигледно тачна и када је $y = z$. Дакле, за све $y, z > 0$ важи $f(y)f(z) = f(\sqrt{yz})^2$. Посебно, за $z = 1$ добијамо $f(y)f(1) = f(\sqrt{y})^2$, за свако $y > 0$. Стављајући овде $y = x^2$, добијамо $f(x)^2 = f(1)f(x^2)$, за свако $x > 0$. Такође, применом релације $f(y)f(z) = f(\sqrt{yz})^2$ на бројеве $y = x^2$ и $z = y^2$ добијамо да је $f(x^2)f(y^2) = f(xy)^2$. Комбиновањем ових једнакости следи $f(1)^2 f(xy)^2 = f(x)^2 f(y)^2$, те због позитивности функције добијамо $f(1)f(xy) = f(x)f(y)$, за све $x, y > 0$.

Даље, из датог услова следи $f\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) = \frac{f(x)^2+f(y)^2}{f(x)f(y)}$. Како је $f(x)^2 = f(1)f(x^2)$ и $f(x)f(y) = f(1)f(xy)$, то је $f\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) = \frac{f(x^2)+f(y^2)}{f(xy)}$. Множењем са $f(xy)$, те коришћењем релације $f(1)f(uv) = f(u)f(v)$, за $u = xy$ и $v = \frac{x^2+y^2}{xy}$, добијамо $f(1)f(x^2+y^2) = f(x^2) + f(y^2)$. Како се сваки позитиван број може записати као квадрат неког позитивног броја, закључујемо да је за све $u, v > 0$ испуњуено $f(1)f(u+v) = f(u) + f(v)$.

Сада за произвољне бројеве $x, y, z > 0$ рачунамо $f(1)^2 f(x+y+z)$ на два начина. Са једне стране, из претходне релације, добијамо $f(1)^2 f(x+y+z) = f(1)\big(f(x+y) + f(z)\big) = f(x) + f(y) + f(1)f(z)$. Са друге стране, исто тако добијамо $f(1)^2 f(x+y+z) = f(1)\big(f(x) + f(y+z)\big) = f(1)f(x) + f(y) + f(z)$. Поређењем, налазимо да је $(f(1)-1)f(x) = (f(1)-1)f(z)$, за све $x, z > 0$. Ако би било $f(1) \neq 1$, следило би $f(x) = f(z)$, за све $x, z > 0$, тј. функција f била би константна, што је немогуће јер је f ињективна. Дакле, мора бити $f(1) = 1$. Према томе, претходне релације се своде на $f(xy) = f(x)f(y)$ и $f(u+v) = f(u) + f(v)$, за све $x, y, u, v > 0$. Дакле, функција f је и мултипликативна и адитивна на $(0, \infty)$. Из адитивности и позитивности следи да је f строго растућа (ако је $y > x > 0$, тада је $f(y) - f(x) = f(y-x) > 0$). За сваки позитиван цео број n из адитивности следи $f(n) = nf(1) = n$, а затим, за сваки позитиван рационалан број $q = \frac{m}{n}$, добијамо $nf(q) = f(nq) = f(m) = m$, те је $f(q) = q$.

Нека је сада $x > 0$ произвољно. Ако су (q_n) и (r_n) низови позитивних рационалних бројева такви да $q_n \uparrow x$ и $r_n \downarrow x$, $n \to +\infty$, тада због монотоности важи $q_n = f(q_n) \leq f(x) \leq f(r_n) = r_n$, за свако n, одакле, преласком на граничну вредност кад $n \to +\infty$ добијамо да је $f(x) = x$, $x > 0$. Дакле, у инјективном случају једино решење јесте $f(x) = x$, за свако $x > 0$.

2° Нека f није инјективна.

Тада постоје бројеви $a, b > 0$, $a \neq b$, такви да је $f(a) = f(b)$. Без умањења општости можемо претпоставити да је $b > a$. Ставимо да је $k = \frac{b}{a} > 1$. Применом услова задатка на пар (b, a) добијамо $f\big(k + \frac{1}{k}\big) = \frac{f(b)}{f(a)} + \frac{f(a)}{f(b)} = 2$. Сада, за произвољно $x > 0$, применом услова на пар (kx, x) добијамо $f\big(k + \frac{1}{k}\big) = \frac{f(kx)}{f(x)} + \frac{f(x)}{f(kx)}$. Лева страна је једнака 2, одакле налазимо да је $\frac{f(kx)}{f(x)} + \frac{f(x)}{f(kx)} = 2$. Како за сваки позитиван број t важи $t + \frac{1}{t} \geq 2$, са једнакошћу акко је $t = 1$, следи $\frac{f(kx)}{f(x)} = 1$, тј. $f(kx) = f(x)$, за свако $x > 0$.

Упоредимо сада услов задатка за парове (x,y) и (kx,y). Десне стране су једнаке, јер је $f(kx)=f(x)$, па је $f\Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Big)=f\Big(\frac{kx}{y}+\frac{y}{kx}\Big)$, за све $x,y>0$. Ако ставимо $t=\frac{x}{y}$, последње постаје $f\big(t+\frac{1}{t}\big)=f\big(kt+\frac{1}{kt}\big)$, за све $t>0$. Нека је сада $t>\frac{1}{\sqrt{k}}$. Тада су бројеви $u=t+\frac{1}{t}$ и $v=kt+\frac{1}{kt}$ различити и задовољавају $f(u)=f(v)$. Притом је $v>u$, јер је $v-u=(k-1)\big(t-\frac{1}{kt}\big)>0$. Примена претходног аргумента на пар (v,u) показује да за број $\lambda=\frac{v}{u}>1$ важи $f(\lambda x)=f(x)$, за свако $x>0$. Даље, имамо да је $\lambda=\frac{kt+\frac{1}{kt}}{t+\frac{1}{t}}=\frac{k^2t^2+1}{k(t^2+1)}$. Функција $\phi(t)=\frac{k^2t^2+1}{k(t^2+1)}$ је непрекидна и строго растућа на интервалу $\Big(\frac{1}{\sqrt{k}},\infty\Big)$, јер је $\phi'(t)=\frac{2t(k^2-1)}{k(t^2+1)^2}>0$, а притом важи $\phi\Big(\frac{1}{\sqrt{k}}\Big)=1$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\phi(t)=k$. Дакле, када t пролази кроз интервал $\Big(\frac{1}{\sqrt{k}},\infty\Big)$, број $\lambda=\phi(t)$ пролази кроз цео интервал $(1,k)$. Према томе, за свако $\lambda\in(1,k)$ и свако $x>0$ важи $f(\lambda x)=f(x)$.

Сада нека је $r>1$ произвољно. Изаберимо толико велики природан број n са особином $r^{1/n}<k$. Тада је $r^{1/n}\in(1,k)$, одакле, за свако $x>0$, налазимо $f(r^{1/n}x)=f(x)$. Применом ове једнакости n пута добијамо $f(rx)=f(x)$. Дакле, за свако $r>1$ и свако $x>0$ важи $f(rx)=f(x)$. Заменом r са $\frac{1}{r}$ добијамо исто и за свако $0<r<1$. Зато, за произвољне реалне бројеве $x,y>0$, узимајући $r=\frac{y}{x}$, добијамо $f(y)=f(x)$, те је f константна на $(0,\infty)$.

Стога, нека је $f(x)=c$, за све $x>0$, где је $c>0$. Уврштавањем у задати услов добијамо $c=\frac{c}{c}+\frac{c}{c}=2$. Дакле, у неинјективном случају једино решење јесте $f(x)=2$, за свако $x>0$.

Аутор задатка: Милан Гелић

6. Приметимо да НЗД$(a,b)\mid a\mid b^2+kb+1$, одакле следи да НЗД$(a,b)=1$. Такође, приметимо да $a\mid a^2+la+b^2+kb+1$ и $b\mid b^2+kb+a^2+la+1$, одакле следи да $ab\mid a^2+b^2+la+kb+1$, односно постоји природан број M такав да је

$$a^2+b^2+la+kb+1-Mab=0. \qquad (1)$$

Ако $d=$ НЗД$(a-r,b-s)$, следи да $a\equiv r, b\equiv s \pmod d$, односно $r^2+s^2+lr+ks+1-Mrs\equiv 0 \pmod d$.

Докажимо да ако важи $(r,s)\notin S$, онда је G коначан. Како $(r,s)\notin G$, знамо да за свако $M\in\mathbb{N}$ важи $r^2+s^2+lr+ks+1-Mrs\neq 0$ и да за одређено M постоји само коначно много d таквих да $d\mid r^2+s^2+lr+ks+1-Mrs$. Уколико докажемо да за одређено k,l постоји и коначно много вредности M које задовољавају овај услов, доказаћемо целокупно тврђење. Заиста, узмимо решење (x,y) са минималним $x+y$. Без умањења општости, претпоставимо да је $x\geq y$.

Посматрајући (1) као квадратну једначину по x, видимо да је за $x'=My-l-x=\frac{y^2+ky+1}{x}$, (x',y) поново решење исте једначине, јер $x'\in\mathbb{N}$. Из минималности следи $x'\geq x$. Знамо да важи $x'=\frac{y^2+ky+1}{x}\leq\frac{y^2+ky+1}{y}\leq y+k+1$, из чега произилази да $My-l=x+x' \leq 2x' \leq 2y+2k+2$, те је $M \leq \frac{2y+2k+l+2}{y} \leq 4+2k+l$, одакле следи да их заиста има коначно много.

Докажимо да ако $(r,s) \in S$, онда за свако $N \in \mathbb{N}$ постоји пар природних бројева $(a,b) \in S$ тако да $N \mid$ НЗД$(a-r, b-s)$, одакле се може закључити да ће важити да је скуп G бесконачан. Стога, без умањења општости, претпоставимо да је $r \leq s$. Дефинишимо низ парова (a_n, b_n) почетним условом $(a_0, b_0) = (r,s)$ и рекурентном релацијом

$$a_{n+1} = Mb_n - l - a_n = \frac{b_n^2 + kb_n + 1}{a_n}, \quad b_{n+1} = Ma_{n+1} - k - b_n = \frac{a_{n+1}^2 + la_{n+1} + 1}{b_n}.$$

По Вијетовим формулама, ако (a_n, b_n) задовољава једначину (1), њу ће задовољавати и пар (a_{n+1}, b_n), па самим тим и (a_{n+1}, b_{n+1}), одакле следи да сваки пар (a_n, b_n) припада скупу S. Користећи услов $a_n \leq b_n$ добијамо $a_{n+1} = \frac{b_n^2+kb_n+1}{a_n} \geq \frac{b_n^2+kb_n+1}{b_n} > b_n$. Затим, како је $a_{n+1} > b_n$, следи $b_{n+1} = \frac{a_{n+1}^2+la_{n+1}+1}{b_n} > \frac{a_{n+1}^2}{b_n} > a_{n+1}$, тј. $a_n < b_n < a_{n+1} < b_{n+1}$, за свако $n \geq 1$, што финално показује да је ово бесконачни низ међусобно различитих парова скупа S.

Фиксирајмо произвољан позитиван цео број N. Како остатака парова (a_n, b_n) при дељењу са N има највише N^2, по Дирихлеовом принципу међу првих N^2+1 парова морају постојати индекси $i<j$ такви да

$$(a_j, b_j) \equiv (a_i, b_i) \pmod{N}.$$

Примећујемо да из рекурентних релација можемо директно изразити претходне чланове низа:

$$b_{n-1} = Ma_n - k - b_n, \quad a_{n-1} = Mb_{n-1} - l - a_n = M(Ma_n - k - b_n) - l - a_n.$$

Дакле, ако за било која два индекса важи конгруенција модуло N, иста конгруенција мора важити и за њихове претходнике. Понављајући ово тврђење i пута, добијамо

$$(r,s) = (a_0, b_0) \equiv (a_{j-i}, b_{j-i}) \pmod{N},$$

односно $N \mid a_{j-i} - r, N \mid b_{j-i} - s$, одакле произилази $N \mid$ НЗД$(a_{j-i} - r, b_{j-i} - s)$.

Аутор задатка: Стеван Радивојевић

17. Румунски мастер из математике

Дан 1: 25. фебруар 2026. - Букурешт, Румунија

Језик: Српски

Задатак **1**. Нека је n природан број. Даница на табли црта троугао површине 1. Затим, она изводи n потеза, редом. У сваком потезу бира један већ нацртани троугао Δ који у својој унутрашњости нема означених тачака, означи тачку P у његовој унутрашњости и повлачи дужи које спајају тачку P са сваким теменом троугла Δ, чиме добија три мања троугла.

Након извршених n потеза, Вукашин бира три различита троугла Δ_1, Δ_2 и Δ_3 који у својој унутрашњости немају означених тачака, тако да Δ_2 има једну заједничку страницу са Δ_1, а другу са Δ_3. У зависности од n одредити највећу могућу константу c такву да Вукашин може да направи потез такав да збир површина троуглова Δ_1, Δ_2 и Δ_3 буде најмање c, без обзира на потезе које је извела Даница.

Задатак **2**. Нека је $p \geq 11$ прост број. Претпоставимо да ако су a и b цели бројеви такви да важи $1 \leq a < b \leq p-3$, онда број $b! - a!$ није дељив са p. Доказати да је број $p-5$ дељив са 8.

Задатак **3**. Нека је $\mathcal{S}$ коначан подскуп скупа $\mathbb{R}^3$. Доказати да постоје три полинома $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$, са реалним коефицијентима, таква да уређена тројка реалних бројева (a,b,c) припада скупу $\mathcal{S}$ ако и само ако систем једначина

$$P(x,y,z) = a,$$
$$Q(x,y,z) = b,$$
$$R(x,y,z) = c$$

нема решења (по x, y и z) у скупу $\mathbb{R}^3$.

Сваки задатак вреди 7 поена.
Време за израду задатака: $4\frac{1}{2}$ часова.

17. Румунски мастер из математике

Дан 2: 26. фебруар 2026. - Букурешт, Румунија

Језик: Српски

Задатак **4**. За сваки природан број m нека $\varphi(m)$ означава број природних бројева мањих или једнаких од m који су узајамно прости са m. Дефинишимо $\varphi_0(m) = m$ и

$$\varphi_k(m) = \varphi(\varphi_{k-1}(m)),$$

за сваки природан број k. Доказати да за сваки природан број $n \geq 3$ производ

$$\varphi_0(2^n - 3) \cdot \varphi_1(2^n - 3) \cdot \varphi_2(2^n - 3) \cdot \ \ldots \ \cdot \varphi_n(2^n - 3)$$

има највише n различитих простих делилаца.

Задатак **5**. Нека је O средиште описане кружнице троугла ABC, за који важи $AB < AC$, и нека је четвороугао $XYZT$ паралелограм унутар троугла ABC такав да је

$$\sphericalangle AXB = \sphericalangle AZC, \qquad \sphericalangle AZB = \sphericalangle AXC,$$

$$\sphericalangle AYB = \sphericalangle ATC, \qquad \sphericalangle ATB = \sphericalangle AYC.$$

Доказати да се дијагонале XZ и YT паралелограма $XYZT$ секу у тачки која лежи на описаној кружници троугла BOC.

Задатак **6**. Нека је $k > 1$ природан број. Означимо са S скуп свих $(k+1)$-торки природних бројева $X = (x_1, \ldots, x_{k+1})$ таквих да важи $1 \leq x_1 < \cdots < x_{k+1} \leq k^2 + 1$. Нека је σ пермутација бројева $1, 2, \ldots, k^2 + 1$. За елемент $X \in S$ кажемо да је σ-леп ако је низ $\sigma(x_1), \sigma(x_2), \ldots, \sigma(x_{k+1})$ монотон. Нека је $X = (x_1, \ldots, x_{k+1}) \in S$. Доказати да важи

$$\min_{1 \leq i \leq k} \left\lfloor \frac{x_i}{i} \right\rfloor + \min_{2 \leq i \leq k+1} \left\lfloor \frac{k^2 + 2 - x_i}{k + 2 - i} \right\rfloor \geq k + 1$$

ако и само ако постоји пермутација σ за коју је X јединствена σ-лепа $(k+1)$-торка у скупу S.

Сваки задатак вреди 7 поена.
Време за израду задатака: $4\frac{1}{2}$ часова.

САДРЖАЈ

* * * * *

Уредник: доц. др Миљан Кнежевић, Математички факултет, Београд

* * * * *