

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28. март 2026. године

Први разред - А категорија

1. (а) Одговор је *да*. Нека је $P(2022) = P(2023) = P(2025) = P(2026) = 2024$. Један од полинома за који ово важи је

$$P(x) = (x - 2022)(x - 2023)(x - 2025)(x - 2026) + 2024,$$

па је $P(2024) = 2028$.

(б) Одговор је *не*. Претпоставимо да постоји овакав полином. Одавде следи

$$a - e \mid P(a) - P(e) = -2,$$

$$b - e \mid P(b) - P(e) = -2,$$

$$c - e \mid P(c) - P(e) = -2,$$

$$d - e \mid P(d) - P(e) = -2.$$

Како су a, b, c, d по паровима различити цели бројеви, то су и бројеви $a - e, b - e, c - e$ и $d - e$ по паровима различити. Стога, $\{a - e, b - e, c - e, d - e\} = \{-2, -1, 1, 2\}$. Приметимо да су a, b, c, d нуле полинома $Q(x) = P(x) - 2024$, па је

$$Q(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) \cdot P_1(x).$$

Како је $Q(e) = (e - a)(e - b)(e - c)(e - d) \cdot P_1(e)$, добијамо $2 = 4 \cdot P_1(e)$, односно $P_1(e) = \frac{1}{2}$. Међутим, како полином P_1 има целобројне коефицијенте (ово следи, на пример из стандардног алгоритма за дељење полинома), то P_1 има целобројне вредности у свим целобројним тачкама. Контрадикција!

2. Анализа: Нека су T_1 и T_2 тежишта троуглова ABC и ABD , редом, а H_1 и H_2 њихови ортоцентри. Како су тачке A, B, C, D на истој кружници k са центром O , права $H_1 - O - T_1$ је Ојлерова права троугла ABC , док је права $H_2 - O - T_2$ Ојлерова права троугла ABD . Према томе, из колинеарности H_1, O, H_2 непосредно следи и колинеарност тачака T_1, O, T_2 . Дакле, довољно је конструисати тачку $D \in k$ тако да су H_1, O, H_2 колинеарне.

Нека је M средиште дужи AB . Посматрајмо централну симетрију са центром у тачки M . Познато је да се ортоцентар троугла при тој симетрији пресликава у тачку описане кружнице која је дијаметрално супротна темењу наспрам посматране стране. Стога се ортоцентар H_1 троугла ABC пресликава у тачку C' , дијаметрално супротну тачки C на кружници k , а ортоцентар H_2 троугла ABD у тачку D' , дијаметрално супротну тачки D на истој кружници. Нека је, даље, O' слика тачке O при истој централној симетрији. Како централна симетрија чува колинеарност, услов да су тачке H_1, O и H_2 колинеарне еквивалентан је услову да су и тачке C', O' и D' колинеарне.

Конструкција: За дати троугао ABC конструирамо његову описану кружницу k и њен центар O , као и средиште M дужи AB . Потом, конструирамо тачку C' , дијаметрално супротну тачки C на кружници k , и тачку O' , симетричну тачки O у односу на M . Затим повучемо праву $C'O'$. Ако права $C'O'$ сече кружницу k у још једној тачки, тај други пресек означимо са D' . Најзад, тачку D конструирамо као тачку дијаметрално супротну тачки D' на кружници k .

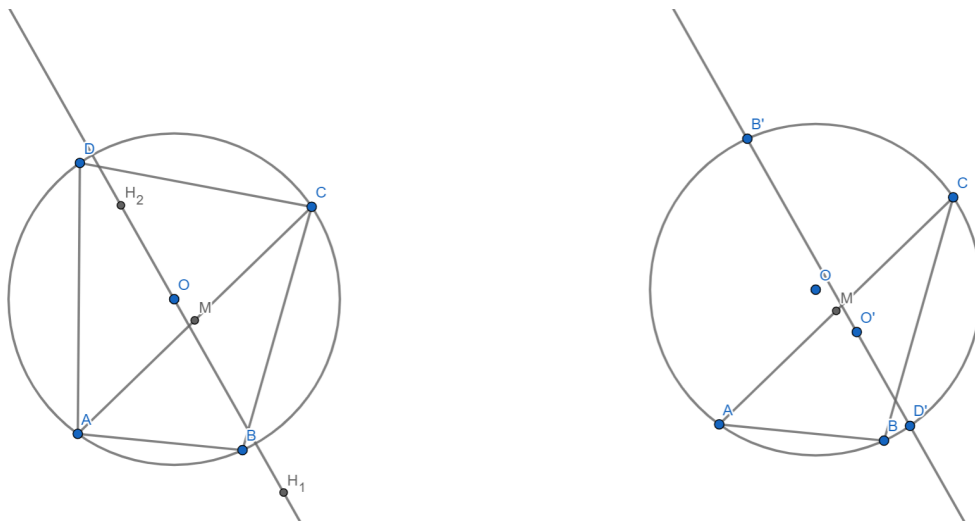
Доказ: По конструкцији, тачке C', O', D' су колинеарне. Како централна симетрија чува колинеарност, из тога следи да су и њихове прецике H_1, O, H_2 колинеарне. Са друге стране, тачке H_1, O, T_1 су колинеарне као тачке Ојлерове праве троугла ABC , а тачке H_2, O, T_2 као тачке Ојлерове праве троугла ABD . С обзиром да су H_1, O, H_2 колинеарне, обе Ојлерове праве поклапају се са истом правом кроз тачку O . Отуда следи да су и тачке T_1, O, T_2 колинеарне.

Дискусија: Ако је $O' = C'$, онда права $C'O'$ није одређена. Пошто су O' и C' слике тачака O и H_1 при истој централној симетрији са центром M , услов $O' = C'$ еквивалентан је услову $O = H_1$. То је могуће ако и само ако је троугао ABC једнакостраничан. У том случају је $T_1 = O$, па је за сваку тачку $D \in k$ услов задатка аутоматски испуњен. Дакле, ако је ABC једнакостраничан, свака тачка D на кружности k представља решење.

Нека је сада $O' \neq C'$. Тада је права $C'O'$ у потпуности одређена. Ако она сече кружницу k у још једној тачки $D' \neq C'$, онда је на тај начин добијена тачка $D \neq C$ једино недегенерисано решење. Може се, међутим, десити да је права $C'O'$ тангента на кружницу k у тачки C' . Тада други пресек не постоји, па недегенерисано решење не постоји. Ако се допушта дегенерисан случај, тада формално можемо узети $D' = C'$, одакле следи $D = C$; заиста, тада се троуглови ABC и ABD поклапају, па је услов задатка испуњен.

Према томе:

- ако је троугао ABC једнакостраничан, свака тачка $D \in k$ је решење;
- ако троугао ABC није једнакостраничан и права $C'O'$ није тангента на кружницу k у тачки C' , постоји јединствено недегенерисано решење;
- ако троугао ABC није једнакостраничан и права $C'O'$ јесте тангента на кружницу k у тачки C' , онда недегенерисано решење не постоји, а једино формално решење је $D = C$.



Напомена. Постоји алтернативно решење у којем учачавамо $\overrightarrow{H_1B} = \overrightarrow{H_2D}$. Конструкција, стога, непосредно следи.

3. Нека је $A = 11n^2 + n + 1$. За $n = 1$ добијамо број $A = 13$, односно $S(A) = 4$. Докажимо да је ово најмања вредност броја $S(A)$. Јасно, A је непаран број већи од 12 јер важи

$$A \equiv n^2 + n + 1 = n(n + 1) + 1 \equiv 1 \pmod{2},$$

па не може имати збир цифара 1. С друге стране, важи и

$$A \equiv -n^2 + n + 1 = -n(n-1) + 1 \pmod{3}.$$

Ако је $n \equiv 0 \pmod{3}$ или $n \equiv 1 \pmod{3}$, онда је $A \equiv 1 \pmod{3}$. Слично, ако је $n \equiv 2 \pmod{3}$, добијамо $A \equiv 2 \pmod{3}$. Познато је да важи $x \equiv S(x) \pmod{3}$ за сваки природан број x . Стога, како A није дељив са 3, није ни $S(A)$, па $S(A) \neq 3$.

Покажимо и да важи $S(A) \neq 2$. Претпоставимо супротно тј. да постоји n такво да је $S(A) = 2$. Како је број A непаран (бар двоцифрен) и има збир цифара 2, то су његова прва и последња цифре једнаке 1, а остале су нуле, па једначина

$$11n^2 + n + 1 = 10^m + 1$$

има решења у скупу природних бројева, из чега добијамо

$$n(11n + 1) = 2^m \cdot 5^m.$$

Еуклидовим алгоритмом се лако показује да важи $(n, 11n + 1) = 1$, па како важи $n < 11n + 1$, имамо два случаја:

1. $n = 1$ и $11n + 1 = 2^m \cdot 5^m$. У овом случају добијамо $12 = 2^m \cdot 5^m$, што нема решења за $m \in \mathbb{N}$.

2. $n = 2^m$ и $11n + 1 = 5^m$. Одавде добијамо $11 \cdot 2^m + 1 = 5^m$. Дељењем обе стране са 5^m добијамо

$$11 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^m + \left(\frac{1}{5}\right)^m = 1.$$

Јасно је да је лева страна строго опадајућа функција по m (као збир две опадајуће функције). Како за $m = 2$ и $m = 3$ имамо

$$11 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{9}{5} > 1 \text{ и } 11 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{89}{125} < 1,$$

добијамо да дата једначина нема решења у скупу природних бројева. Добили смо контрадикију са претпоставком, па $S(A) \neq 2$.

Дакле, најмањи збир цифара је 4.

Приметимо да за бројеве $n = 10^k$ ($k \geq 1$) имамо да је $11n^2 + n + 1$ облика

$$11 \underbrace{000 \dots 000}_{k-1} 1 \underbrace{000 \dots 000}_{k-1} 1,$$

па постоји бесконачно много природних бројева n за које је $S(11n^2 + n + 1) = 4$.

Коментар 1.1. Принципом математичке индукције можемо да покажемо неједнакост $11 \cdot 2^m + 1 < 5^m$ за све природне бројеве $m \geq 3$. За $m = 3$ имамо $11 \cdot 2^3 + 1 = 89$ и $5^3 = 125$, па неједнакост важи. Претпоставимо да за природне бројеве $m \geq 3$ важи $5^m > 11 \cdot 2^m + 1$. Докажимо да одатле следи $5^{m+1} > 11 \cdot 2^{m+1} + 1$. Заиста,

$$5^{m+1} = 5 \cdot 5^m > 5 \cdot (11 \cdot 2^m + 1) = 55 \cdot 2^m + 5 > 22 \cdot 2^m + 1 = 11 \cdot 2^{m+1} + 1,$$

што повлачи $5^m > 11 \cdot 2^m + 1$ за $m \geq 3$.

Коментар 1.2. Лако се показује да за $m \geq 3$ важи

$$5^m = 5^3 \cdot 5^{m-3} > 2^4 \cdot 7 \cdot 5^{m-3} \geq 2^4 \cdot 7 \cdot 2^{m-3} = 14 \cdot 2^m > 11 \cdot 2^m + 1.$$

4. Тврдимо да је највеће гарантовано

$$k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Најпре уочимо шта један потез заправо ради. Ако суседне бројеве $x, y \in \{0, 1\}$ заменимо бројем $x + y \pmod{2}$, онда нови број представља збир тог пара по модулу 2. После више потеза, сваки члан добијеног низа представља збир по модулу 2 неког узастопног блока почетног низа. Дакле, сваки крајњи низ одговара некој подели почетног низа на узастопне блокове, при чему је сваки нови члан парност збира елемената у одговарајућем блоку.

Зато је задатак еквивалентан следећем: треба поделити почетни низ на узастопне блокове тако да што више узастопних блокова има исту суму по модулу 2.

Доња граница: Нека су почетни чланови низа $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0, 1\}$. Посматрајмо парцијалне суме по модулу 2:

$$s_0 = 0, \quad s_i \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_i \pmod{2} \quad (1 \leq i \leq n).$$

Имамо укупно $n + 1$ бројева $s_0, s_1, \dots, s_n$, а сваки је или 0 или 1. Зато се бар једна од ове две вредности јавља најмање $\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ пута.

Нека су $s_{i_0} = s_{i_1} = \dots = s_{i_t}$ све појаве те исте вредности, где је $t + 1 \geq \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$. Тада за сваки $j = 1, 2, \dots, t$ блок $a_{i_{j-1}+1}, a_{i_{j-1}+2}, \dots, a_{i_j}$ има збир по модулу 2 једнак

$$s_{i_j} - s_{i_{j-1}} \equiv 0 \pmod{2}.$$

Према томе, можемо добити t узастопних нула. Одатле следи

$$t \geq \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil - 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

па је увек могуће добити бар $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ узастопних једнаких бројева. Дакле, $k \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Горња граница: Показаћемо да се уопште не може гарантовати више од тога. Посматрајмо низ који садржи тачно једну јединицу, а све остало су нуле, и то тако да су нуле распоређене што равномерније са леве и десне стране те јединице. На пример, ако је $n = 2m + 1$, узмимо низ

$$\underbrace{0, 0, \dots, 0}_m, 1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_m,$$

а ако је $n = 2m$, узмимо

$$\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m-1}, 1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_m.$$

У сваком потезу укупна сума свих чланова низа по модулу 2 остаје непромењена. Пошто је на почетку та сума једнака 1, сваки добијени низ мора имати непарну суму, па зато мора садржати бар једну јединицу.

С друге стране, сваки члан добијеног низа представља збир по модулу 2 неког узастопног блока почетног низа. Пошто почетни низ садржи тачно једну јединицу, неки блок даје вредност 1 ако и само ако садржи ту јединицу. Зато у свакој подели почетног низа тачно један блок има вредност 1, а сви остали имају вредност 0.

Према томе, у сваком добијеном низу постоји тачно једна јединица, која раздваја нуле на леви и десни део. Број узастопних нула са било које стране не може бити већи од $\lfloor n/2 \rfloor$. Зато ни број узастопних једнаких чланова не може бити већи од $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Дакле, $k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Из доње и горње границе закључујемо $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28. март 2026. године

Други разред - А категорија

1. Посматрајмо функције $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, дефинисане са $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = bx^2 + cx + a$ и $h(x) = f(x)g(x)$, за свако $x \in \mathbb{R}$. Треба доказати да постоји реалан број d за који важи $h(d) > 0$. Приметимо да је $h(1) = f(1)g(1) = (a+b+c)^2 \geq 0$. (♥) Размотримо следеће случајеве:

1° $a + b + c \neq 0$. Због (♥) можемо одабрати $d = 1$, пошто је $h(1) > 0$.

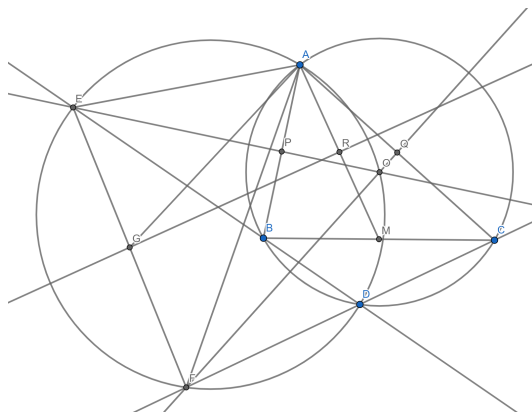
2° $a + b + c = 0$. Сада је $f(x) = ax^2 + bx - a - b = a(x-1)(x+1) + b(x-1) = (x-1)(ax+a+b)$ и аналогно $g(x) = (x-1)(bx+b+c)$, те је $h(x) = (x-1)^2(ax-c)(bx-a)$. Бројеви a и b не могу бити истовремено једнаки нули, пошто би тада због $a+b+c=0$ важило $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, што је супротно услову задатка. Отуда можемо размотрити следеће случајеве:

2.1° $a = 0, b \neq 0$. Тада је $h(x) = b^2(x-1)^2x$, те је $h(2) > 0$.

2.2° $b = 0, a \neq 0$. Тада је $h(x) = -a^2(x-1)^2(x+1)$, те је $h(-2) > 0$.

2.3° $ab \neq 0$. Приметимо да је $\frac{c}{a} \neq \frac{a}{b}$. Претпоставимо супротно. Тада би имали $-\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$, што је контрадикција. Сада имамо да квадратна функција $i(x) = (ax-c)(bx-a)$ има две различите реалне нуле, те није константног знака на $(-\infty, \infty)$. Отуда постоји интервал I на ком је она позитивна. Како је $h(x) = (x-1)^2 \cdot i(x)$, то због претходног имамо да за сваки број $d \in I \setminus \{1\}$ важи $h(d) > 0$. Овим је доказ комплетиран.

2. Како је O средиште краћег лука AD круга AOD , права EO је симетрала угла $\angle AED$, па је самим тим и симетрала странице AB троугла $\triangle ABC$. Аналогно је и тачка F на симетрали дужи AC . Нека су сада P , Q и R редом средишта дужи AB , AC и AM . Троуглови $\triangle AEP$ и $\triangle AFQ$ су слични ($\angle AEP = \angle AFQ$ због тетивности четвороугла $AEFO$, и по претходно доказаном имају по један прав угао). Одавде је $\frac{AE}{AF} = \frac{AP}{AQ} = \frac{AB}{AC}$, и $\angle EAF = \angle BAC$, па су троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle AEF$ слични. Одатле, имајући у виду да су AM и AG тежишне дужи, следи да су и троуглови $\triangle ABM$ и $\triangle AEG$ слични, те је и $\frac{AG}{AM} = \frac{AE}{AB}$, односно $\frac{AG}{AR} = \frac{AE}{AP}$, па како је и $\angle EAP = \angle GAR$, троуглови $\triangle AEP$ и $\triangle AGR$ су слични, односно $\angle ARG = 90^\circ$, одакле је троугао $\triangle AGM$ једнакокрак, чиме је тврђење задатка доказано.



3. Нека су a, b, c и n природни бројеви за које важи $(a, b, c) = 1$, а $p > 3$ произвољан прост број, при чему је $(u, v, w) = \text{НЗД}(u, v, w)$, $u, v, w \in \mathbb{N}$. Означимо са $S_k = a^k + b^k + c^k$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Претпоставимо да $p \mid S_{n+2}, S_{n+1}$ и S_n . Због $p \mid S_n$ и $(a, b, c) = 1$ број p дели највише један од бројева a, b и c . Размотримо најпре случај $p \nmid abc$. Важи

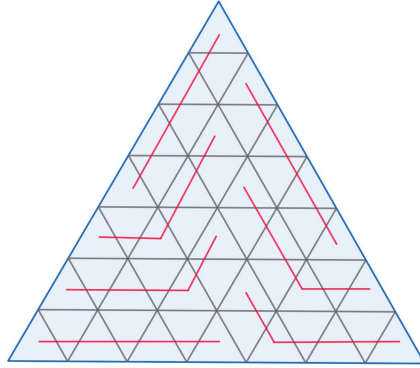
$$S_{k+3} - (a + b + c)S_{k+2} + (ab + bc + ca)S_{k+1} = abcS_k, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (\dagger)$$

Како $p \mid S_{n+2}, S_{n+1}, S_n$, заменом $k = n-1$, имајући на уму да $p \nmid abc$, у $(\dagger)$ добијамо $p \mid S_{n-1}$. Даљом заменом за $k = n-2, n-3, \dots, 0$, добијамо $p \mid S_0 = 3$. Контрадикција. Нека сада $p \mid abc$. Одређености ради, нека $p \mid c$ и $p \nmid ab$. Тада је $a^{n+1} \equiv_p -b^{n+1} \equiv_p b(-b^n) \equiv_p ba^n$, па је $a \equiv_p b$. Зато $p \mid 2a^n$, односно $p \mid a$. Контрадикција. На овај начин смо доказали да не постоји $p > 3$ тако да $p \mid S_{n+2}, S_{n+1}$ и S_n , за неке $(a, b, c) = 1$.

Слично као у претходном делу доказује се да није могуће да $9 \mid a^n + b^n + c^n, a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1}, a^{n+2} + b^{n+2} + c^{n+2}$. Такође, није могуће да $4 \mid a^n + b^n + c^n, a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1}, a^{n+2} + b^{n+2} + c^{n+2}$. Заиста, ако би важило $4 \mid a^n + b^n + c^n$, онда би тачно једнак од бројева a, b, c био паран. Међутим, тада за паран број $m \in \{n+1, n+2\}$ важи $a^m + b^m + c^m \equiv_4 0 + 1 + 1 \equiv_4 2$, што је у супротности са $4 \mid S_m$.

Из свега наведеног закључујемо да је $(a^n + b^n + c^n, a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1}, a^{n+2} + b^{n+2} + c^{n+2}) \leq 6$, те је највећи елемент скупа S не већи од 6. Како је за $a = b = n = 1, c = 4$ посматрани највећи заједнички делилац једнак 6, то је највећи елемент скупа S управо једнак 6.

4. Тражена подела је могућа ако и само ако је n непаран. Нека је $n = 2m + 1$. Конструкција се задаје овако. Са леве стране великог троугла повлачимо $m + 1$ путева. Први почиње у доњем левом углу и иде водоравно удесно кроз n троуглова.



Други почиње у следећем реду изнад и иде водоравно удесно кроз $n - 2$ троуглова, па се затим ломи и наставља косо нагоре удесно кроз 2 троугла. Трећи почиње још један ред више, иде водоравно удесно кроз $n - 4$ троуглова, па затим косо нагоре удесно кроз 4 троугла. Тако редом, k -ти леви пут, рачунајући одоздо, почиње на левој страници у $(k + 1)$ -вом реду, иде најпре водоравно удесно кроз $n - 2k$ троуглова, а затим косо нагоре удесно кроз $2k$ троуглова, где је $k = 0, 1, \dots, m$. Зато сваки леви пут има укупно $(n - 2k) + 2k = n$ троуглова. Са десне стране повлачимо m путева. Први десни пут почиње у највишем преосталом троуглу уз десну страну и иде косо надолу удесно кроз n троуглова. Други почиње у следећем највишем преосталом троуглу, иде косо надолу удесно кроз $n - 2$ троуглова, па се затим ломи и наставља водоравно удесно кроз 2 троугла. Трећи почиње у следећем највишем преосталом троуглу, иде косо надолу удесно кроз $n - 4$ троуглова, па затим водоравно удесно кроз 4 троугла. Тако редом, j -ти десни пут, рачунајући одозго, почиње у највишем још непокривеном троуглу десног дела, иде најпре косо надолу удесно кроз $n - 2j + 2$ троуглова, а затим водоравно удесно кроз $2j - 2$ троугла, где је $j = 1, 2, \dots, m$. Зато и сваки десни пут има укупно $(n - 2j + 2) + (2j - 2) = n$ троуглова. Леви путеви се међусобно не секу, јер

им водоравни делови леже у различитим редовима, а после прелома сваки иде другом косом дијагоналом. Исто тако се ни десни путеви међусобно не секу. Најзад, леви и десни путеви се не могу сећи јер после свих левих путева остаје непокривен само један „десни” степенести део троугла, а десни путеви се управо у њему повлаче, редом одозго надоле. Другим речима, леви путеви испуне цео леви део фигуре до једне цик-цак границе, а сваки десни пут лежи у потпуности са десне стране те границе; зато леви и десни путеви немају заједничких троуглова. Тако добијамо $(m + 1) + m = 2m + 1 = n$ међусобно дисјунктних путева, сваки од по n троуглова, који заједно покривају цео троугао. Ако је, међутим, n паран, онда би сваки пут имао парну дужину, па би у њему био једнак број троуглова оријентисаних нагоре и надоле, што је немогуће јер је у целом троуглу број таквих троуглова $\frac{n(n+1)}{2}$, односно $\frac{n(n-1)}{2}$. Дакле, тражена подела постоји ако и само ако је n непаран.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28. март 2026. године

Трећи разред - А категорија

1. Прво решење: (а) Посматрајмо полином $P(x) = x^{2020} + x^3 + 1$. Претпоставимо да је број $x = z$, где је $|z| = 1$, једна нула полинома $P(x)$. Како је полином $P \in \mathbb{R}[x]$ то је и број $\bar{z} = \frac{1}{z}$ његова нула. Отуда, заменом $P(\frac{1}{z}) = 0$ добијамо да је $1 + z^{2017} + z^{2020} = 0$, те је $z^3 = z^{2017}$. Из последње једнакости, како је $z \neq 0$, имамо да је $z^{2014} = 1$. Зато је сада $0 = P(z) = z^6 + z^3 + 1$, те је $z^9 - 1 = (z^3 - 1) \cdot P(z) = 0$. Дакле, за број z важи $z^{2014} = z^9 = 1$. Зато је $z^7 = \frac{z^{2014}}{(z^9)^{223}} = 1$, одакле је и $z^2 = \frac{z^9}{z^7} = 1$ и $z = \frac{z^7}{(z^2)^3} = 1$. Зато је $0 = P(1) = 3$, што је контрадикција.

Друго решење: (а) Претпоставимо супротно-нека важи $z^{2020} + z^3 + 1 = 0$ за неко z за које је $|z| = 1$. Тада из једнакости модула леве и десне стране у једнакостима (које су еквивалентне са $z^{2020} + z^3 + 1 = 0$) $z^3(z^{2017} + 1) = -1$ и $z^{2020} + 1 = -z^3$ имамо да је $|z^{2017} + 1| = 1$ и $|z^{2020} + 1| = 1$. Из последњих једнакости закључујемо да се бројеви z^{2020} и z^{2017} налазе на растојању 1 од броја -1 , односно налазе се на кружници чији је центар у броју -1 , а полупречник 1. Како је $|z| = 1$, то је и $|z^{2020}| = |z^{2017}| = 1$, те се бројеви z^{2020} и z^{2017} налазе и на кружници чији је центар број 0, а полупречник 1. Пресек поменутих кружница су бројеви $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ и $\varepsilon^2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$, те је $z^{2020}, z^{2017} \in \{\varepsilon, \varepsilon^2\}$. Отуда, како је $\varepsilon^3 = 1$, имамо $z^3 = \frac{z^{2020}}{z^{2017}} \in \{1, \varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$. За $z^3 = 1$ имамо $z^{2020} = -z^3 - 1 = -2$, те је $|z^{2020}| = 2$, што је у супротности са $|z^{2020}| = 1$. Ако је пак $z^3 \in \{\varepsilon, \varepsilon^2\}$, онда из једнакости $z^{2020} + z^3 + 1 = 0 = \varepsilon^2 + \varepsilon + 1$, добијамо да је $z^{2020} = \varepsilon^2$ (када је $z^3 = \varepsilon$) или $z^{2020} = \varepsilon$ (када је $z^3 = \varepsilon^2$). Овадве, како је $(z^{2020})^3 = (z^3)^{2020}$ добијамо да је $(\varepsilon^2)^3 = \varepsilon^{2020}$ или $\varepsilon^3 = (\varepsilon^2)^{2020}$. Имајући на уму да је $\varepsilon^3 = 1$, последње једнакости нас доводе до закључка да је $1 = \varepsilon$ или $1 = \varepsilon^2$. Контрадикција.

(б) Под условом $|z| = 1$, односно $\bar{z} = \frac{1}{z}$, дата једнакост је еквивалентана са

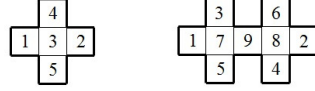
$$\begin{aligned} |z^{2020} + z^n + 1| = |z^{2020} + z^3 + 1| &\Leftrightarrow (z^{2020} + z^n + 1)\left(\frac{1}{z^{2020}} + \frac{1}{z^n} + 1\right) = (z^{2020} + z^3 + 1)\left(\frac{1}{z^{2020}} + \frac{1}{z^3} + 1\right) \\ &\Leftrightarrow z^{2020-n} + z^{n-2020} + z^n + z^{-n} = z^{2017} + z^{-2017} + z^3 + z^{-3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z^{4040} + z^{2n} + z^{2020+2n} + z^{2020} - z^{4037+n} - z^{3+n} - z^{2023+n} - z^{2017+n} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Дакле, број $n \in \mathbb{N}$ је решење ако је једнакост (1) испуњена за све бројеве z за које је $|z| = 1$.

Нека је $n \in \mathbb{N}$ неко решење. Посматрајмо полином $P(x) = x^{4040} + x^{2n} + x^{2020+2n} + x^{2020} - x^{4037+n} - x^{3+n} - x^{2023+n} - x^{2017+n}$. Нуле овог полинома су сви бројеви $x = z$, где је $|z| = 1$, те посматрани полином има бесконачно много нула. Зато је $P(x)$ једнак нула полиному, те су сви његови коефицијенти једнаки нули. Зато мора да важи $4040 = 4037 + n$ или $2020 + 2n = 4037 + n$, односно $n = 3$ или $n = 2017$. Лако проверавамо да за $n = 3$, односно $n = 2017$, важи једнакост (1), те су ови бројеви заиста решења задатка.

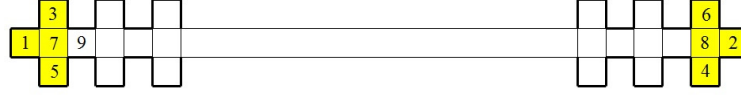
2. Постоји. Нека у "средњем" реду има $2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, јединичних поља. Доказаћемо математичком индукцијом (по n), са кораком 2, да постоје жељени потези, при чему је први потез са поља које је прво (са леве стране) у "средњем" реду.

База индукције: На сликама су дати примери жељених потеза за $n = 1$ и $n = 2$.



Индуктивна хипотеза: Нека наведено тврђење важи за n .

Индуктивни корак: Посматрајмо таблу у чијем је "средњем" реду $2(n+2)+1$ јединичних поља. Првих 8 потеза изводимо као на следећој слици.



Међу наведених 8 потеза очигледно нема подударних, при чему на белој табли, која у "средњем" реду има $2n+1$ јединично поље, није могуће одиграти потез који би био подударан неком од 8 наведених потеза. Поље означено бројем 9 је заправо прво поље беле табле која у "средњем" реду има $2n+1$ јединичних поља. По индуктивној хипотези, за ту белу таблу, могуће је извести жељени низ потеза. Овим је комплетиран доказ.

3. Претпоставимо супротно, тј. да таквих бројева има само коначно много. Нека је њихов укупан број једнак k . Потребна нам је следећа доња оцена за Ојлерову функцију:

$$\varphi(t) \geq \sqrt{\frac{t}{2}} \quad \text{за свако } t \in \mathbb{N}.$$

Стога, запишимо $t = 2^\alpha q$, где је $\alpha \geq 0$, а q непаран број. Ако је $q = 1$, онда је

$$\varphi(t) = \varphi(2^\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha = 0, \\ 2^{\alpha-1}, & \alpha \geq 1. \end{cases}$$

За $\alpha = 0$ добијамо $\varphi(t) = 1 \geq \sqrt{1/2}$, а за $\alpha \geq 1$ важи

$$2^{\alpha-1} \geq 2^{\alpha/2-1/2} = \sqrt{\frac{2^\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{t}{2}}.$$

Дакле, и у овом случају важи $\varphi(t) \geq \sqrt{t/2}$.

Нека је сада $q > 1$. Ако је $q = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_s^{\beta_s}$ канонска факторизација броја q , онда је

$$\varphi(q) = \prod_{i=1}^s p_i^{\beta_i-1} (p_i - 1).$$

За сваки непаран прост број p и свако $\beta \geq 1$ важи $p^{\beta-1}(p-1) \geq p^{\beta/2}$. Заиста, за $\beta = 1$ то је еквивалентно неједнакости $p-1 \geq \sqrt{p}$, што важи за сваки $p \geq 3$, а за $\beta \geq 2$ имамо

$$p^{\beta-1}(p-1) \geq p^{\beta-1} \geq p^{\beta/2}.$$

Множењем ових неједнакости по свим простим делиоцима броја q добијамо $\varphi(q) \geq \sqrt{q}$.

Сада, ако је $\alpha = 0$, онда је $t = q$ непаран, па

$$\varphi(t) = \varphi(q) \geq \sqrt{q} = \sqrt{t} \geq \sqrt{\frac{t}{2}}.$$

Ако је $\alpha \geq 1$, онда је

$$\varphi(t) = \varphi(2^\alpha) \varphi(q) = 2^{\alpha-1} \varphi(q) \geq 2^{\alpha-1} \sqrt{q}.$$

Пошто је $2^{\alpha-1} \geq 2^{\alpha/2-1/2}$, следи

$$\varphi(t) \geq 2^{\alpha/2-1/2} \sqrt{q} = \sqrt{\frac{2^{\alpha} q}{2}} = \sqrt{\frac{t}{2}}.$$

Тиме је тражена доња оцена доказана.

Изаберимо сада природан број N тако да важи $\sqrt{\frac{N}{2}} > k$. На пример, можемо узети $N = 2k^2 + 1$. Тада за свако $d \geq N$, по доказаној оцени, важи

$$\varphi(d) \geq \sqrt{\frac{d}{2}} \geq \sqrt{\frac{N}{2}} > k,$$

па је

$$d + \varphi(d) > d + k \geq N + k.$$

Према томе, ако је неки број $m \leq N + k$ представљив у облику $m = c + \varphi(c)$, онда мора бити $c < N$, јер за $c \geq N$ добијамо $c + \varphi(c) > N + k$.

Дакле, бројеви не већи од $N + k$ који су представљиви у облику $c + \varphi(c)$ могу настати само за

$$c = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Пошто таквих вредности c има највише $N - 1$, следи да међу првих $N + k$ природних бројева има највише $N - 1$ представљивих бројева.

С друге стране, међу бројевима

$$1, 2, \dots, N + k$$

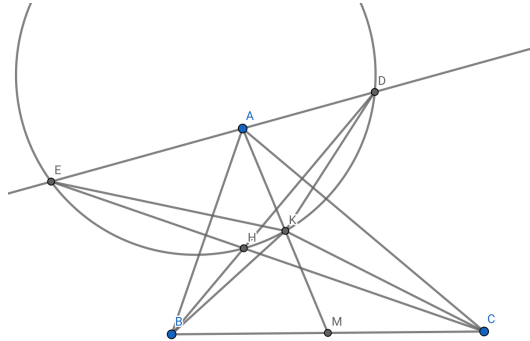
има укупно $N + k$ бројева. Зато најмање

$$(N + k) - (N - 1) = k + 1$$

њих није представљиво у облику $n + \varphi(n)$. Међутим, то је немогуће, јер смо претпоставили да укупно постоји само k таквих бројева.

Коначно, следи да постоји бесконачно много природних бројева m који се не могу представити у облику $m = n + \varphi(n)$ ни за један природан број n .

4. Прво, троуглови EAC и DAB су слични. Заиста, $\angle ECA = \angle ABD = 90^\circ - \alpha$ и $\angle EAC = \angle BAD = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Закључујемо да је $\frac{EC}{BD} = \frac{AC}{AB}$. Како је K заправо A -*Humpty* тачка, познато је да је $\angle MBK = \angle BAM$. Како је и $\angle CHK = 180^\circ - \angle KHC' = \angle BAM$ (C' је подножје висине из C на AB), то је четвороугао $BHKS$ тетиван (и ово је генерално познато). Пошто су троуглови BMK и AMB слични, то је $\frac{BM}{AM} = \frac{BK}{AB}$. Аналогно је $\frac{CM}{AM} = \frac{CK}{AC}$. Пошто је $BM = CM$, то је $\frac{BK}{CK} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE}$. Како је због тетивности четвороугла $BHKS$ и $\angle KBD = \angle KCE$, троуглови BKD и CKE су слични. Зато је $\angle HDK = \angle HEK$, чиме је доказ завршен.



Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28. март 2026. године

Четврти разред - А категорија

1. Нека су a и b неке вредности параметара за које важи наведена неједнакост. Посматрајмо функцију $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, за коју је $f(x) = 4^x + a^x + b^x - 6^x - 3^x - 2^x$, за свако $x \in \mathbb{R}$. Функција $f(x)$ је непрекидно диференцијабилна на $\mathbb{R}$. Докажимо да је $f'(0) = 0$. Претпоставимо супротно. Како постоји $f'(0)$, нека је $f'(0) = \alpha \neq 0$. Ако је $\alpha > 0$, то постоји нека околина броја 0, таква да је функција $f(x)$ строго монотонно растућа у тој околини. Међутим, тада за свако x из те околине за које важи $x < 0$, имамо $f(x) < f(0) = 0$, што је у супротности са особином бројева a и b (бројеви a и b су такви да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи $f(x) \geq 0$). Ако је пак $\alpha < 0$, то постоји нека околина броја 0, таква да је функција $f(x)$ строго монотонно опадајућа у тој околини. Међутим, тада за свако x из те околине за које важи $x > 0$, имамо $f(x) < f(0) = 0$, што је у опет у супротности са особином бројева a и b . Дакле, ако тражена вредност параметара a и b постоји, онда мора бити $f'(0) = 0$. Како је $f'(0) = \ln 4 + \ln a + \ln b - \ln 6 - \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{ab}{9}$, то једнакост $ab = 9$ даје једине потенцијалне вредности тражених параметара.

Без умањења општости можемо претпоставити да је $a \geq b$. Докажимо да мора бити $a \geq 6$. Претпоставимо супротно, $a < 6$. Дељењем полазне неједнакости са 6^x добијамо да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$L(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{a}{6}\right)^x + \left(\frac{b}{6}\right)^x \geq 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x = D(x). \quad (1)$$

Како је $\lim_{x \rightarrow \infty} L(x) = 0$, а $\lim_{x \rightarrow \infty} D(x) = 1$, то за довољно велико x неједнакост (1) не важи. Контрадикција. Овим смо доказали (под претпоставком да је $a \geq 6$) да уколико тражени параметри постоје, мора важити $a \geq 6$ и $b = \frac{9}{a}$. Докажимо сада да параметри одређени овим условима заиста задовољавају полазну неједнакост. Фиксирајмо реалан број x , $x \neq 0$ (за $x = 0$ наведени параметри задовољавају полазну неједнакост). Нека је $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ функција задата са $g(a) = 4^x + a^x + \left(\frac{9}{a}\right)^x - 6^x - 3^x - 2^x$. Докажимо да је $g(a) \geq 0$ за свако $a \geq 6$. Функција $g(a)$ је непрекидно диференцијабилна на $\mathbb{R}^+$. Лако налазимо да је $g'(a) = \frac{x(a^x + 3^x)(a^x - 3^x)}{a^{x+1}}$. За $x > 0$ израз $a^x - 3^x$ је позитиван само за $a > 3$, док је за $x < 0$ израз $a^x - 3^x$ је негативан само за $a > 3$. Дакле, $g'(a) > 0 \iff a > 3$. Овим је доказано да је функција $g(a)$ строго монотона растућа на интервалу $(3, \infty)$. Како је још $g(6) = 4^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 3^x - 2^x = (2^x - \left(\frac{3}{2}\right)^x)(2^x - 1) > 0$ (за $x > 0$ важи $2^x - \left(\frac{3}{2}\right)^x, 2^x - 1 > 0$, док за $x < 0$ важи $2^x - \left(\frac{3}{2}\right)^x, 2^x - 1 < 0$), то за свако $a \geq 6$, на основу монотоности, важи $g(a) > 0$, а тиме и полазна неједнакост.

Све тражене вредности су из скупа $\{(a, b) \mid ab = 9, a \geq 6 \vee b \geq 6\}$.

2. Приметимо да је

$$\begin{aligned} A &= 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdots 2024! = (1! \cdot 2!) \cdot (3! \cdot 4!) \cdots (2023! \cdot 2024!) \\ &= (1! \cdot 1! \cdot 2) \cdot (3! \cdot 3! \cdot 4) \cdots (2023! \cdot 2023! \cdot 2024) = (1!)^2 \cdot (3!)^2 \cdot (5!)^2 \cdots (2023!)^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2024 \\ &= (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdots 2023!)^2 \cdot 2^{1012} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 1012 = (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdots 2023! \cdot 2^{506})^2 \cdot 1012!, \end{aligned}$$

одакле налазимо једно решење $(n, x) = (1012, 1! \cdot 3! \cdot 5! \cdots 2023! \cdot 2^{506})$. Докажимо да других решења нема.

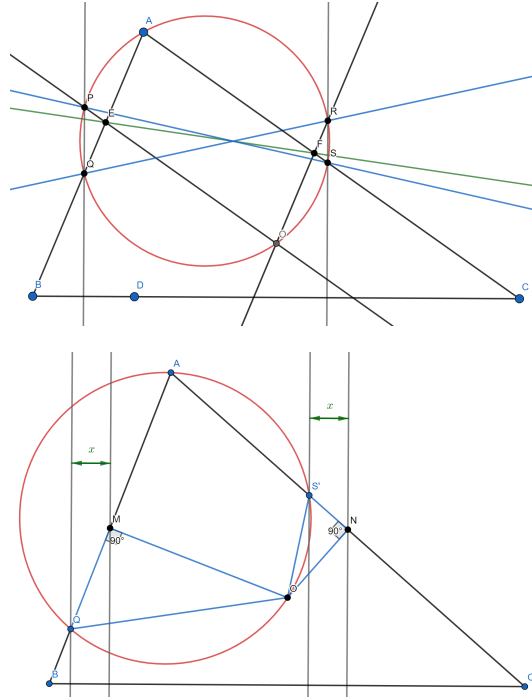
Претпоставимо супротно, да је неко $n \neq 1012$ решење ове једначине. Тада број $\frac{A}{n!}$ треба

да буде квадрат природног броја.

Ако је $n \leq 1008$, тада је $\frac{A}{n!} = (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdots 2023! \cdot 2^{506})^2 \cdot 1012 \cdot 1011 \cdot 1010 \cdot 1009 \cdots (n+1)$. Лако се проверава да је број 1009 прост, а његов експонент је непаран, те овај број није потпун квадрат. За $n = 1009$, имамо $\frac{A}{n!} = (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdots 2023! \cdot 2^{506})^2 \cdot 1012 \cdot 1011 \cdot 1010$, а за $n = 1010$ је $\frac{A}{n!} = (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdots 2023! \cdot 2^{506})^2 \cdot 1012 \cdot 1011$, па ови бројеви нису потпуни квадрати јер је степен броја 3 непаран. Такође, $n = 1011$ није решење пошто 1012 није потпун квадрат.

Коначно, ако је $n \geq 1013$, тада је $\frac{A}{n!} = \frac{(1! \cdot 3! \cdot 5! \cdots 2023! \cdot 2^{506})^2}{1013 \cdot 1014 \cdots n}$. Број 1013 је прост, његов експонент у $\frac{A}{n!}$ је непаран за $n < 2026$, па не може бити потпун квадрат. С друге стране, $\frac{A}{n!}$ није цео број за $n \geq 2027$, пошто је 2027 прост број који не дели A . Број $n = 2026$ није решење нпр. јер је 1019 прост број који има непаран експонент у $\frac{A}{n!}$.

3. Доказаћемо да је шестоугао $APQOSR$ тетиван, па по Паскаловој теорему применјеној на овај шестоугао директно следи тврђење задатка. Да бисмо доказали да је поменути шестоугао тетиван доказаћемо да су тетивни четвороуглови $APQO$, $ARSO$ и $AQOS$. Знамо да је $\angle QPO = 90^\circ - \angle ACB$, јер је једнак углу између висине из A троугла $\triangle ABC$ и праве AC као угао са паралелним крацима. Како је такође и $\angle BAO = 90^\circ - \angle ACB$, закључујемо да је четвороугао $APQO$ тетиван. Аналогно је и четвороугао $ARSO$ тетиван, па остаје показати да је четвороугао $AQOS$ тетиван. Обележимо са M и N редом средишта AB и AC , и обележимо други пресек круга AOQ са AC са S' . Троуглови $\triangle OMQ$ и $\triangle ONS'$ су слични (правоугли су и притом је $\angle OQM = \angle OS'N$), па је одатле $\frac{QM}{S'N} = \frac{OM}{ON} = \frac{\cos \gamma}{\cos \beta}$, где је $\angle ABC = \beta$ и $\angle ACB = \gamma$. Одавде закључујемо да су пројекције дужи QM и $S'N$ на BC једнаких дужина, одакле је дужина пројекције дужи QS' на BC једнака $\frac{BC}{2}$, па закључујемо да је $S' \equiv S$. Дакле, четвороугао $AQOS$ је тетиван, одакле по претходној дискусији следи тврђење задатка.



4. Највеће такво k је $(m-1)(n-1)$. На слици је дат пример са $(m-1)(n-1)$ лоших правоугаоника (сви који садрже доње десно поље табле). Остаје да докажемо да мора да постоји бар $(m-1)(n-1)$ лоших правоугаоника. Уочимо неки лош правоугаоник који постоји према услову задатка. Обележимо бројеве у ћошковима овог правоугаоника као на слици. Тада је $a+d \neq b+c$, односно $a-c \neq b-d$. Уочимо сада још два поља, назовимо их e и f , на следећи начин. e и f су у истој колони, $e \neq a, e \neq b, f \neq c, f \neq d$, e је у истом реду као a и b , f је у истом реду као c и d . Како не може истовремено да важи $e-f = a-c$ и $e-f = b-d$, барем један од правоугаоника $ea fc$ и $eb fd$ је лош. Како овакве парове поља e и f можемо изабрати на $n-2$ начина добили смо још $n-2$ лоших правоугаоника, који су сви очигледно различити. Изаберимо било који од $n-1$ лоших правоугаоника који су нам до сада познати. Ако аналоган поступак поновимо кренувши од изабраног правоугаоника само у вертикалном смеру добијамо још $m-2$ различитих лоших правоугаоника. Јасно је да ни два правоугаоника добијена од различитог иницијалног лошег правоугаоника не могу бити иста. Дакле, пронашли смо $(m-1)(n-1)$ лоших правоугаоника, чиме је доказ завршен.

1	$m+1$			$(n-2)m+1$	$(n-1)m+2$
2	$m+2$			$(n-2)m+2$	$(n-1)m+3$
$m-1$	$2m-1$			$(n-1)m-1$	mn
m	$2m$			$(n-1)m$	$(n-1)m+1$

e	a			b
f	c			d