Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

8. 3. 2026.

III разред

1. Разлика два броја је 348. Одреди вредност разлике ако:
а) умањеник увећаш за 49;
б) умањилац умањиш за 146.

2. Реши једначину:

$$1000 - (555 + x) = 238.$$

3. У поља квадрата упиши бројеве, тако да он буде магичан.

		25
19		
		37

4. Дешифруј следеће одузимање (иста слова замени истим, а различита различитим цифрама). Одреди сва решења.

$$787 - ABC = CBA$$

5. Јелена је почела да скупља фигурице животиња од 1. новембра 2024. године и сваког месеца скупи по шест фигурица. Милици се допала Јеленина идеја и почела је да скупља месечно по девет фигурица од 1. марта 2025. године. На крају ког месеца ће девојчице имати исти број фигура?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

III РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. а) Разлика се такође увећа за 49 [**5 бодова**], па је нова вредност разлике $348 + 49 = 397$ [**5 бодова**].
(б) Разлика се сада увећа за 146 [**5 бодова**], па је нова вредност разлике $348 + 146 = 494$ [**5 бодова**].

2. (**МЛ 59/3**) Прво одређујемо непознати умањилац $555 + x$ дате једначине:

$$555 + x = 1000 - 238, \quad 555 + x = 762$$ [**10 бодова**].

Затим у претходно добијеној једначини одређујемо непознати сабирак x директно:

$$x = 762 - 555, \quad x = 207$$ [**10 бодова**].

3. Ако је број у централном пољу квадрата x, изједначавањем збира бројева у другој врсти (реду) и трећој колони, добијамо да је $19 + x = 25 + 37$ [**4 бода**], одакле је $19 + x = 62$, односно $x = 43$ [**2 бода**].
Према томе, карактеристични збир овог магичног квадрата је $3 \cdot 43 = 129$ [**4 бода**]. Сада се директно рачунају преостали бројеви који недостају у магичном квадрату [сваки тачан број **по 2 бода**].

49	55	25
19	43	67
61	31	37

4. Дато одузимање може се заменити сабирањем $ABC + CBA = 787$. Јасно је да је $A + C = 7$ [**4 бода**] и $B + B = 8$, тј. $B = 4$ [**4 бода**] јер нема „преноса“ при сабирању (тј. „позајмљивања“ при одузимању). Како цифре A и C морају бити различите од B и не смеју бити 0, једине могућности су $A = 6$, $C = 1$; $A = 5$, $C = 2$; $A = 2$, $C = 5$; $A = 1$, $C = 6$ [свако од 4 решења **по 3 бода**]:

$$787 - 146 = 641,\ 787 - 245 = 542,\ 787 - 542 = 245,\ 787 - 641 = 146.$$

За свако нетачно решење одузимати по 1 бод.

5. Од 1. новембра 2024. године до 1. марта 2025. године протекла су 4 месеца, за време којих је Јелена скупила $4 \cdot 6 = 24$ фигурица животиња [**5 бодова**]. Пошто Милица скупља 9, а Јелена 6 фигурица месечно, сваког месеца Милица „надокнади“ тачно 3 сличице [**5 бодова**]. Према томе, њој је потребно тачно $24 : 3 = 8$ месеци да скупља сличице да би сустигла Јелену [**5 бодова**], што значи да ће на крају октобра 2025. године девојчице имати једнак број фигура [**5 бодова**].

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа
8. 3. 2026.

IV разред

1. Израчунај вредност израза

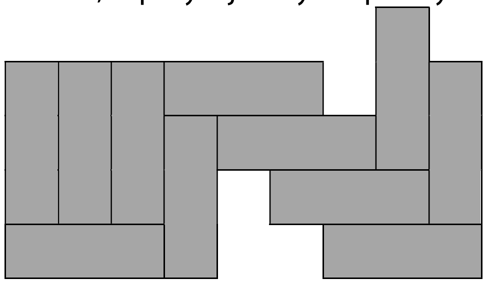
$$(2025 : 5 + 2026) : 11 + 2.$$

2. Колико има четвороцифрених природних бројева чија је цифра на месној вредности стотина парна?

3. Ученик је добио задатак да сабере два броја. При записивању првог сабирка, ученик је направио следеће грешке: уместо цифре јединица 8 написао је цифру 3, цифру десетица 2 заменио је цифром 8, а на месту стотина уместо цифре 6 написао је цифру 7. На овај начин добио је збир 999. Одреди тачан збир при овом сабирању.

4. Зидни сат је 1. јануара 2026. године у 18 часова подешен да показује тачно време. Које ће време тај сат показивати 11. априла 2026. године у 18 часова, ако се зна да је од тренутка подешавања на свака 4 дана журио по 15 секунди?

5. Фигура на слици је састављена од 11 истих правоугаоника. Ако је обим фигуре 238 cm, израчунај њену површину.



Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

IV РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

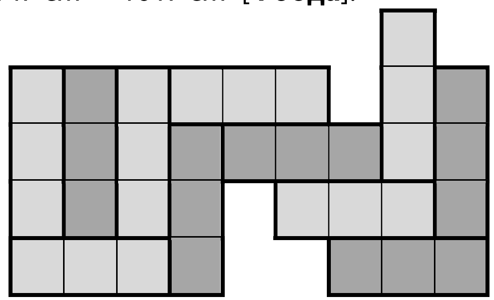
1. Бројевна вредност израза је
(2025 : 5 + 2026) : 11 + 2 = (405 + 2026) : 11 + 2
= 2431 : 11 + 2 [**10 бодова**] = 221 + 2 = 223 [**10 бодова**].

2. (**МЛ 58/1**) Цифра на месној вредности стотина може бити било која од цифара 0, 2, 4, 6, 8, па њу можемо одабрати на 5 начина [**4 бода**]. Цифра на месној вредности хиљада може бити било која од цифара 1, 2, ..., 9 јер не сме бити једнака нули, па њу можемо одабрати на 9 начина [**2 бода**]. Цифре десетица и јединица су произвољне и сваку од њих можемо одабрати на 10 начина [**2 + 2 бода**]. Према томе, тражених бројева има 9 · 5 · 10 · 10 = 4500 [**10 бодова**].

3. Ученик је уместо броја 628 написао број 783 на месту првог сабирка [**5 бодова**].
Први начин. Како се други сабирак није мењао, а добијени збир је 999, то је други сабирак једнак 999 − 783 = 216 [**10 бодова**], па је прави збир заправо 628 + 216 = 844 [**5 бодова**].
Други начин. Први сабирак се, због настале грешке у записивању, повећао за 783 − 628 = 155 [**5 бодова**]. Тиме се и збир повећао за 155 [**5 бодова**], па је прави збир 999 − 155 = 844 [**5 бодова**].

4. Од 1. јануара 2026. године у 18 часова до 11. априла 2026. године у 18 часова прошло је тачно (редом по месецима) 31 + 28 + 31 + 10 = 100 дана [за сваки месец по 2 бода, укупно **8 бодова**]. Како сат на свака четири дана жури по 15 секунди, за ових 100 дана он је пожурио 100 : 4 = 25 пута [**4 бода**], па показује време које је за 25 · 15 = 375 секунди, тј. 6 минута и 15 секунди испред тачног времена [**6 бодова**]. Према томе, овај зидни сат ће 11. априла 2026. године у 18 часова показивати 18 часова, 6 минута и 15 секунди [**2 бода**].

5. Нека је краћа страница сваког правоугаоника x. Због начина слагања правоугаоника у левом делу фигуре, јасно је да је дужа страница сваког правоугаоника $3x$ [**4 бода**]. Пребројавањем видимо да се обим фигуре састоји од 34 краће странице правоугаоника (види слику), па је обим дате фигуре је $34x$ [**6 бодова**]. На основу бројевних вредности у задатку, имамо да је $34 \cdot x = 238$ cm, одакле је $x = 7$ cm [**3 бода**]. Према томе, странице сваког правоугаоника су 7 cm и 21 cm, па је његова површина 7 cm · 21 cm = 147 cm^2 [**3 бода**]. Дата фигура се састоји од 11 таквих правоугаоника, па је њена површина 11 · 147 cm^2 = 1617 cm^2 [**4 бода**].



Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

8. 3. 2026.

V разред

1. Сабирањем четири од пет разломака $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{18}$ добија се збир 1. Који од разломака није употребљен?

2. Угао α је пет пута мањи од свог суплементног угла, а угао β је за $2026'$ мањи од угла комплементног углу α. Израчунај меру збира углова α и β.

3. Количник два природна броја a и b је 32, а остатак је 30. Који су то бројеви, ако им је збир 66888?

4. Дат је правоугаоник са страницом $AB = 2$ m 7 dm. Извршена је операција смањивања правоугаоника на следећи начин: свака од страница AB и CD се смањи за једну трећину своје дужине, а дужина сваке од страница BC и AD се смањи за 2dm. На овај начин добијен је правоугаоник $A_1B_1C_1D_1$. Ова операција смањивања се понови још два пута на исти начин, чиме је добијен прво правоугаоник $A_2B_2C_2D_2$, а затим правоугаоник $A_3B_3C_3D_3$, чија је површина 32 dm^2. Израчунај површину правоугаоника $ABCD$.

5. Колико има природних бројева који нису већи од 2500, а дељиви су бар једним од бројева 4 или 6?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

V РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Како је НЗС(2, 3, 6, 9, 18) = 18 [**5 бодова** за тачно проширивање разломака до неког заједничког имениоца], сабирањем свих пет разломака добија се

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{9}{18}+\frac{6}{18}+\frac{3}{18}+\frac{2}{18}+\frac{1}{18}=\frac{21}{18}=1\frac{3}{18}=1\frac{1}{6}$$ [**10 бодова**].

Збир свих разломака је за $\frac{1}{6}$ већи од 1, па једино разломак $\frac{1}{6}$ није употребљен [**5 бодова**].

2. Углови α и γ су суплементни углови и γ је 5 пута већа од α, тј. важи $\alpha + \gamma = 180°$ и $\gamma = 5\alpha$ [**4 бода**], па је $\alpha = 30°$ [**4 бода**]. Његов комплементан угао има меру 60° [**2 бода**]. Угао β је за 2026′ = 33° 46′ [**4 бода**] мањи од угла који је комплементан углу α, па је $\beta = 60° - 33°\,46' = 26°\,14'$ [**4 бода**]. Тражени збир је $\alpha + \beta = 30° + 26°\,14' = 56°\,14'$ [**2 бода**].

3. Када се природан број a подели природним бројем b добија се количник q и остатак r, што записујемо $a : b = q\ (r)$, тј. $a = bq + r$ $(0 \le r < b)$. На основу бројевних бредности из задатка, имамо $a : b = 32\ (30)$, $a = 32b + 30$ [**6 бодова**], $a + b = 66888$. Заменом a у другу једначину добија се $32b + 30 + b = 66888$, односно $33b + 30 = 66888$ [**6 бодова**], па је $33b = 66858$, одакле је $b = 2026$ [**4 бода**] и $a = 66888 - 2026 = 64862$ [**4 бода**].

4. Страница правоугаоника је $AB = CD = 2$ m 7 dm = 27 dm. Трећина странице AB је 9 dm, па је после првог умањења $A_1B_1 = C_1D_1 = 18$ dm [**3 бода**]. Понављајући поступак добићемо да је $A_2B_2 = C_2D_2 = 12$ dm [**3 бода**], односно $A_3B_3 = C_3D_3 = 8$ dm [**3 бода**]. Страница $B_1C_1 = BC -$ 2 dm [**2 бода**], $B_2C_2 = B_1C_1 - 2$ dm $= BC - 4$ dm [**2 бода**], односно $B_3C_3 = B_2C_2 - 2$ dm $= BC - 6$ dm [**2 бода**].

Површина правоугаоника $A_3B_3C_3D_3 = 32$ dm², па је страница $B_3C_3 =$ 4 dm [**2 бода**]. Враћајући вредност добијене странице добићемо да је страница $BC = 10$ dm [**2 бода**] и површина правоугаоника $ABCD$, $P = 27\text{ dm} \cdot 10\text{ dm} = 270\text{ dm}^2$ [**1 бод**].

5. (**МЛ 58/4**) Нека је A скуп природних бројева мањих или једнаких од 2500 и дељивих са 4, а скуп B скуп природних бројева мањих или једнаких од 2500 и дељивих са 6. Скуп A има 625 елемената [**4 бода**], док скуп B има 416 елемената [**4 бода**]. Међу датим бројевима има и оних бројева који су дељиви и са 4 и са 6, односно који су дељиви са 12 [**4 бода**]. Таквих бројева има 208, што је број елемената скупа A пресек B [**4 бода**]. Укупан број бројева који задовољавају услове задатка, односно број елемената скупа A унија B, једнак је $625 + 416 - 208 = 833$ [**4 бода**].

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

8. 3. 2026.

VI разред

1. Које сабирке треба избрисати у збиру $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$ да би збир преосталих бројева био тачно 1?

2. Дат је паралелограм *ABCD*. Дијагонала *AC* дели оштар угао *BAD* на два дела који се разликују за 15°. Нормала из темена *D* на страницу *BC* сече дијагоналу *AC* у тачки *H* тако да је мера угла $\measuredangle AHD =$ 55°. Одреди мере унутрашњих углова тог паралелограма. Одреди сва решења.

3. Одреди природне бројеве *a*, *b*, *c* тако да следећа једнакост буде тачна

$$\frac{253}{228}=1+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}}.$$

4. Одреди све вредности цифара *a* и *b* за које је број $\overline{202a}+\overline{b026}$ дељив са 36.

5. У унутрашњости једнакостраничног троугла *ABC* одређене су тачке *P* и *Q* тако да је $\measuredangle ABP = 30°$, $\measuredangle BAP = 45°$, $\measuredangle QAB = \measuredangle QBA = 15°$. Докажи да је $AP = AQ$.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

VI РАЗРЕД

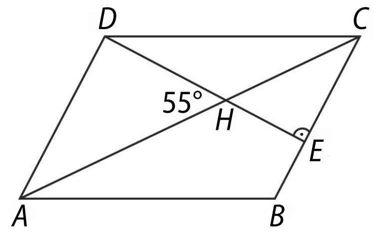
Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Најмањи заједнички садржалац за имениоце ових разломака је 120 [**5 бодова** за тачно проширивање разломака до неког заједничког имениоца], па је њихов збир [**10 бодова**]:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}=\frac{60+30+20+15+12+10}{120}=\frac{147}{120}=1\frac{27}{120}=1\frac{9}{40}.$$

Према томе, треба избрисати разломке чији је збир $\frac{27}{120}=\frac{9}{40}$, а то су разломци $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{10}$ [**5 бодова**].

2. (**МЛ 60/3**) Означимо подножје нормале из тачке *D***,** на праву *BC* са *E*. Како су углови *AHD* и *CHE* унакрсни, они имају исту меру, па је $\measuredangle CHE = 55°$ [**4 бода**]. Збир углова у троуглу *CHE* је 180°, па је $\measuredangle HCE = 180° - \measuredangle CHE - \measuredangle HEC = 180° - 55° - 90° = 35°$ [**4 бода**]. Како су углови $\measuredangle CAD$ и $\measuredangle ACB = \measuredangle HCE$ оштри углови са паралелним крацима, они имају исту меру, па је $\measuredangle CAD = 35°$ [**4 бода**]. Из услова задатка имамо да је $|\measuredangle CAD - \measuredangle BAC| = 15°$, па на даље разликујемо два случаја:
1°) $\measuredangle BAC = 35° - 15° = 20°$, тада је $\measuredangle BAD = \measuredangle BCD = 35° + 20° = 55°$ [**2 бода**] и $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC = 180° - 55° = 125°$ [**2 бода**].
2°) $\measuredangle BAC = 35° + 15° = 50°$, тада је $\measuredangle BAD = \measuredangle BCD = 35° + 50° = 85°$ [**2 бода**] и $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC = 180° - 85° = 95°$ [**2 бода**].



3. Из датог услова добијамо да је $\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}}}=\dfrac{253}{228}-1=\dfrac{25}{228}$, па је

$a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}}=\dfrac{228}{25}$ [**3 бода**]. Приметимо да је $b+\dfrac{1}{c}\geq 1+\dfrac{1}{c}>1$, па је

$0<\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}}<1$. Зато број a мора бити највећи природан број који је

мањи од $\dfrac{228}{25}$ [**3 бода**], а то је број 9, тј. $a=9$ [**3 бода**]. Сада добијамо

$\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}}=\dfrac{228}{25}-9=\dfrac{3}{25}$, односно $b+\dfrac{1}{c}=\dfrac{25}{3}$ [**3 бода**]. Како је $c \geq 1$, то је

$0<\dfrac{1}{c}\leq 1$, па је b највећи природан број који је мањи од $\dfrac{25}{3}$ [**3 бода**],

а то је број 8, тј. $b=8$ [**3 бода**]. Коначно је $\dfrac{1}{c}=\dfrac{25}{3}-8=\dfrac{1}{3}$, па је $c=3$ [**2 бода**].

Напомена. Ако ученик добије тачан одговор $a = 9$, $b = 8$, $c = 3$, без икаквог образложења зашто је то решење и једино, може да освоји највише [**14 бодова**].

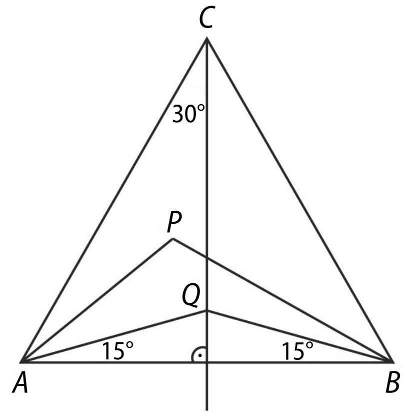
4. Број $N=\overline{202a}+\overline{b026}$ је дељив са 36 уколико је дељив са 4 и са 9 [**2 бода**]. Двоцифрени завршетак $\overline{2a}+26=46+a$ броја N је дељив са 4 једино за $a = 2$ [**2 бода**] или $a = 6$ [**2 бода**].

Уколико је $a = 2$, имамо $N=2022+\overline{b026}=\overline{b000}+2048=1000b+2048$ [**3 бода**]. Како број 2048 даје остатак 5 при дељењу са 9 [**1 бод**], број $\overline{b000}=1000b$ мора да даје остатак 4 при дељењу са 9 [**1 бод**], што је могуће једино уколико је $b = 4$ [**2 бода**].

Уколико је $a = 6$, имамо $N=2026+\overline{b026}=\overline{b000}+2052=1000b+2052$ [**3 бода**]. Како је број 2052 дељив са 9 [**1 бод**], број $\overline{b000}=1000b$ мора такође бити дељив са 9 [**1 бод**], што је могуће једино уколико је $b = 9$ [**2 бода**].

Дакле, постоје тачно два решења задатка: 2022 + 4026 и 2026 + 9026.

5. Како је $\measuredangle QAB = \measuredangle QBA = 15°$, троугао ABQ је једнакокрак, па је $AQ = BQ$ [**2 бода**]. Самим тим је права CQ уједно симетрала странице AB и симетрала унутрашњег угла у темену C, па важи $\measuredangle ACQ = 30°$ [**6 бодова**]. Такође, важи $\measuredangle CAQ = \measuredangle BAC - \measuredangle BAQ = 60° - 15° = 45°$ [**2 бода**], па су троуглови ABP и ACQ подударни (став УСУ: $AB = AC$, $\measuredangle BAP = \measuredangle CAQ = 45°$, $\measuredangle ABP = \measuredangle ACQ = 30°$) [**8 бодова**]. Из ове подударности следи $AP = AQ$ [**2 бода**].



Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

8. 3. 2026.

VII разред

1. Дати су полиноми $A = 5x^2 - 3x + 9$, $B = 2x^2 - 5x - 6$, $C = 5x^2 + x - 3$, $D = -2x + 3$. Одреди полином
$$P = (A - D) - (B - C).$$

2. Симетрала оштрог угла код темена C паралелограма $ABCD$ ($AB > AD$) сече праву AD у тачки E, при чему је $AE = 5$ cm. Израчунај дужине страница паралелограма ако је његов обим 50 cm.

3. Одредити последњу цифру следећег збира (сви непарни бројеви у основи имају експонент 2026, док сви парни бројеви у основи имају експонент 2025)
$$1^{2026} + 2^{2025} + 3^{2026} + 4^{2025} + ... + 2024^{2025} + 2025^{2026} + 2026^{2025}.$$

4. Тачка M припада унутрашњости угла од 60°, и удаљена је од његових кракова 2 cm, односно 5 cm. Израчунај растојање тачке M од темена тог угла.

5. Колико има петоцифрених природних бројева дељивих са 3, чије су све цифре међусобно различите и припадају скупу {0, 1, 2, 7, 8, 9}?

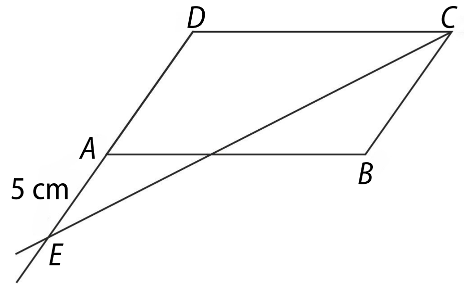
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 60/2**) Како је $A - D = 5x^2 - x + 6$ [**6 бодова**] и $B - C = -3x^2 - 6x - 3$ [**6 бодова**], то је
$$(A - D) - (B - C) = 5x^2 - x + 6 - (-3x^2 - 6x - 3) = 8x^2 + 5x + 9$$ [**8 бодова**].

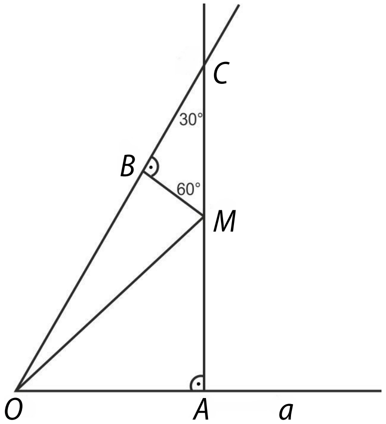
2. Оштри углови DEC и ECB су једнаки, као углови са паралелним крацима [**5 бодова**]. Како је $\measuredangle ECD = \measuredangle ECB$ јер је CE симетрала угла BCD, добијамо да је $\measuredangle DEC = \measuredangle DCE$, тј. троугао DCE је једнакокрак [**5 бодова**]. Одавде добијамо да је $CD = DE$, па је због претпоставке $CD = AB > AD$, тачка E на продужетку странице AD. Сада је $CD = DE = DA + AE = DA + 5$ cm [**4 бода**]. Обим паралелограма је $50 \text{ cm} = 2 \cdot (CD + DA) = 2 \cdot (2DA + 5 \text{ cm})$ [**4 бода**], те су дужина странице паралелограма $DA = BC = 10$ cm и $CD = AB = 15$ cm [**2 бода**].



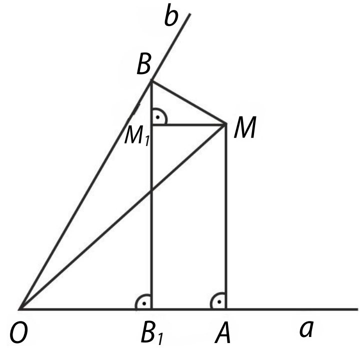
3. Цифре јединице степена бројева који се завршавају цифрама 0, 1, 5 и 6 су увек 0, 1, 5 и 6, респективно [**4 бода** – по 1 за сваку последњу цифру]. Једноцифрени завршеци степена бројева са цифром јединице 4 или 9 алтернирају, завршавајући се цифрама 4 и 6, односно 9 и 1, респективно. Пошто су у изразу сви парни бројеви са експонентом 2025 који је непаран, то се степени бројева са цифром јединице 4 завршавају такође цифром 4 [**1 бод**], док се степени бројева са цифром јединице 9 у изразу завршавају цифром 1 јер је експонент 2026 паран број [**1 бод**]. Цифра јединице степена бројева који се завршавају цифрама 2, 3, 7 и 8 се мењају са периодом 4. Како је $2026 = 4 \cdot 506 + 2$ и како цифра јединице степена бројева са цифром јединице 3 може бити 3, 9, 7 и 1, закључујемо да се степени бројева у изразу са цифром јединице 3 у основи завршавају са 9 [**2

бода], а цифре јединица степена бројева са цифром јединице 7 у основи могу бити 7, 9, 3 и 1, те 2026. степен има цифру јединице 9 [**2 бода**]. Како је 2025 = 4 · 506 + 1 и како су 2, 4, 8 и 6, редом, цифре јединице степена са последњом цифром 2, а 8, 6, 4 и 2 редом цифре јединица за степене са последњом цифром 8, закључујемо да се сви степени бројева у изразу који се завршавају цифром 2 имају цифру јединице 2 [**2 бода**], а сви степени бројева у изразу који се завршавају цифром 8 имају цифру јединице 8 [**2 бода**]. Стога је цифра јединице збира уочених степена у оквиру сваке десетице једнака 5 $(0 + 1 + 2 + 9 + 4 + 5 + 6 + 9 + 8 + 1 = 45)$ [**2 бода**].
У изразу од 1 до 2020 имамо 202 десетице, па је цифра јединице једнака 0 $(202 \cdot 5 = 1010)$ [**2 бода**]. Последња цифра преосталог дела израза $2021^{2026} + 2022^{2025} + 2023^{2026} + 2024^{2025} + 2025^{2026} + 2026^{2025}$ је 7 $(1 + 2 + 9 + 4 + 5 + 6 = 27)$, па је 7 тражена последња цифра [**2 бода**].

4. Нека је дат $\measuredangle aOb = 60°$ и нека су редом A и B подножја нормала из тачке M на полуправе Oa и Ob, при чему је $MA = 5$ cm, $MB = 2$ cm.



Први начин. Означимо са C пресек праве MA и полуправе Ob. Оштри углови $\measuredangle AOB = 60°$ и $\measuredangle CMB$ имају нормалне краке, па имају исту меру, одакле је $\measuredangle CMB = 60°$ [**2 бода**]. Према томе, правоугли троугао MBC има оштре углове чије су мере 30° и 60°, па представља половину једнакостраничног троугла странице MC [**2 бода**]. Како је катета $MB = 2$ cm наспрам угла од 30° у овом правоуглом троуглу, то је његова хипотенуза $MC = 2MB = 4$ cm [**4 бода**]. Сада је $AC = AM + MC = 5$ cm + 4 cm = 9 cm [**1 бод**]. Правоугли троугао OAC такође има оштре углове $\measuredangle AOC = 60°$, $\measuredangle ACO = 30°$, па и он представља половину једнакостраничног троугла странице OC [**1 бод**]. Дуж AC је висина тог троугла, одакле је $AC = \dfrac{OC\sqrt{3}}{2}$ [**2 бода**]. Заменом добијених бројевних вредности, имамо $9\text{ cm} = \dfrac{OC\sqrt{3}}{2}$, па је хипотенуза $OC = 6\sqrt{3}$ cm [**4 бода**], а краћа катета $OA = \dfrac{1}{2}OC = 3\sqrt{3}$ cm [**2 бода**]. Применом Питагорине теоремена правоугли троугао OAM, добијамо $OM = \sqrt{OA^2 + MA^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 5^2}\text{ cm} = \sqrt{52}\text{ cm} = 2\sqrt{13}$ cm [**2 бода**].



Други начин. Са B_1 означимо подножје нормале из тачке B на крак Oa и уочимо да је троугао OB_1B правоугли троугао са правим углом код темена B_1 и $\measuredangle BOB_1 = 60°$, те је $OB = 2OB_1$ [**4 бода**]. Са M_1 означимо подножје висине из тачке M на страницу BB_1 четвороугла (трапеза) BB_1AM. Углови троугла BMM_1 су $\measuredangle BM_1M = 90°$, $\measuredangle MBM_1 = \measuredangle MBO - \measuredangle B_1BO = 90° - 30° = 60°$ и $\measuredangle M_1MB = 30°$, те је из Питагорине теореме $M_1M = \dfrac{\sqrt{3}}{2}BM = \sqrt{3}$ cm [**6 бодова**]. Посматрајући два правоугла троугла OAM и OMB уочавамо да је дуж OM хипотенуза у оба троугла, па се може израчунати коришћењем Питагорине теореме из $OM^2 = OB^2 + BM^2 = OA^2 + AM^2$ [**2 бода**]. Узимајући у обзир претходно уочене односе, то је $4OB_1^2 + 4\text{ cm}^2 = (OB_1 + \sqrt{3}\text{ cm})^2 + 25\text{ cm}^2$, тј. $3OB_1^2 - 2\sqrt{3}\text{ cm} \cdot OB_1 - 24\text{ cm}^2 = 0$. Трансформацијом ове једнакости добијамо $(\sqrt{3}OB_1 - 1\text{ cm})^2 = 25\text{ cm}^2$ [**4 бода**] па је $OB_1 = 2\sqrt{3}$ cm [**2 бода**], а растојање тачке M од темена угла је $OM = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 25}\text{ cm} = 2\sqrt{13}$ cm [**2 бода**].

5. Збир датих цифара је 27, па како је потребно да петоцифрени број у чијем се запису свака од датих цифара користи највише једном буде дељив са 3, закључујемо да је у запису могуће изоставити само цифре 0 или 9 како би збир преосталих 5 цифара био дељив са 3 [**5 бодова**]. Петоцифрених бројева који су записани коришћењем сваке од цифара 1, 2, 7, 8 и 9 тачно једном има $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ [**7 бодова**], а коришћењем сваке од цифара 0, 1, 2, 7 и 8 има $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$ [**7 бодова**]. Тражених бројева је $120 + 96 = 216$ [**1 бод**].

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
Окружно такмичење из математике ученика основних школа
8. 3. 2026.

VIII разред

1. Сања, Ана и Бојана су штеделе новац како би сакупиле џепарац за екскурзију. Бојана је уштедела 1600 динара више од Ане, а Сања 45% мање него што би Ана имала када би јој Бојана дала половину свог износа. Ако су укупно уштеделе 24640 динара, колико је уштедела свака од њих?

2. У правоуглом координатном систему xOy дат је једнакокраки троугао OAB, тако да је мера угла AOB једнака 120°, координате тачке A су (0, 8), док је тачка B у трећем квадранту.
а) Одреди координате тачке B.
б) Израчунај обим и површину троугла OAB.
в) Израчунај растојање тачке O од праве AB.

3. Одреди колико има различитих целих бројева n за које је број $\dfrac{2n^2-2026}{n+3}$ такође цео број.

4. Правилна шестострана пирамида $SABCDEF$ (са врхом S) има основну ивицу дужине $a = 6$ cm и све њене бочне стране нагнуте су према равни основе под углом од 60°. На бочној ивици SF изабрана је тачка G тако да је $SG : GF = 2 : 1$. Израчунај запремину пирамиде $CDFG$.

5. На колико начина је могуће распоредити 12 ученика и то 3 ученика из школе A, 2 ученика из школе B, 1 ученика из школе C и 6 ученика из школе D, у 3 различита аутобуса, по 4 ученика у сваком, ако за ученике из школе A, B, C важи: никоја два ученика из различитих школа не могу да буду у истом аутобусу?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

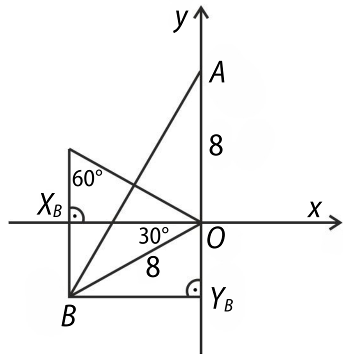
VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Нека је x износ који је уштеделa Ана. Тада је Бојана уштедела $x + 1600$ динара [**2 бода**]. Ако би Бојана дала Ани половину свог новца, Ана би имала $x+\frac{1}{2}(x+1600)=\frac{3}{2}x+800$ динара [**5 бодова**]. Сања је уштедела 45% мање од тог износа, што значи да има 55% тог износа, односно $0{,}55\cdot\left(\frac{3}{2}x+800\right)=\frac{33}{40}x+440$ динара [**5 бодова**].

Оне су укупно уштеделе $x+x+1600+\frac{33}{40}x+440=24640$ динара [**2 бода**], одакле је $\frac{113}{40}x=22600$, односно $x = 8000$. Ана је уштедела 8000 динара [**2 бода**], Бојана је уштедела $8000 + 1600 = 9600$ [**2 бода**] динара, а Сања је уштедела $\frac{33}{40}\cdot 8000+440=7040$ динара [**2 бода**].

2. а) У једнакокраком троуглу OAB, мера угла AOB је 120°, па мора бити $BO = AO = 8$ [**1 бод**]. Нека су подножја нормала из B на x-осу и y-осу редом тачке X_B и Y_B. У правоуглом троуглу BX_BO је $\measuredangle BOX_B=\measuredangle BOA-\measuredangle X_BOA = 120°-90° = 30°$ односно троугао BX_BO је половина једнакостраничног троугла странице $a = 8$ [**1 бод**]. Тада је дужина дужи BX_B половина дужине странице a, односно $OY_B = BX_B = \frac{a}{2} = 4$ [**2 бода**], а дуж X_BO је висина тог једнакостраничног троугла па је $X_BO = \frac{a\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ [**2 бода**]. Сада закључујемо да су x-координата и y-координата тачке B редом једнаке $0-4\sqrt{3}=-4\sqrt{3}$ [**1 бод**] и $0 - 4 = -4$ [**1 бод**], односно $B(-4\sqrt{3},-4)$.



б) Применом Питагорине теореме на правоугли троугао ABY_B добијамо дужину странице AB: $AB^2=AY_B^2+BY_B^2=(8+4)^2+(4\sqrt{3})^2=144+48=192$, па је $AB=8\sqrt{3}$ [**3 бода**]. Обим троугла OAB једнак је $O = AO + BO + AB = 8 + 8 + 8\sqrt{3} = 16 + 8\sqrt{3} = 8\cdot(2+\sqrt{3})$ [**2 бода**]. Површина троугла OAB једнака је

$$P=P_{\triangle ABY_B}-P_{\triangle OBY_B}=\frac{AY_B\cdot BY_B}{2}-\frac{OY_B\cdot BY_B}{2}=\frac{12\cdot4\sqrt{3}}{2}-\frac{4\cdot4\sqrt{3}}{2}=24\sqrt{3}-8\sqrt{3}=16\sqrt{3}$$ [**3 бода**].

Други начин: $P=\frac{OA\cdot BY_B}{2}=\frac{8\cdot4\sqrt{3}}{2}=16\sqrt{3}$.

в) Растојање тачке O од праве AB је дужина висине из тачке O на страницу AB у троуглу OAB. Површина троугла је $16\sqrt{3}=\frac{h\cdot AB}{2}$, одакле је $h\cdot AB=32\sqrt{3}$, односно $h=\frac{32\sqrt{3}}{8\sqrt{3}}=4$ [**4 бода**].

Други начин. У једнакокраком троуглу BAO је $\measuredangle BAO=\frac{180^\circ-120^\circ}{2}=30^\circ$, па је висина наспрам угла од 30° у правоуглом троуглу једнака половини дужине странице $h = 4$ [**4 бода**].

3. Трансформишимо дати израз

$$\frac{2n^2-2026}{n+3}=\frac{2n^2+6n-6n-18-2008}{n+3}=\frac{2n(n+3)-6n(n+3)-2008}{n+3}$$
$$=\frac{(n+3)(2n-6)-2008}{n+3}=2n-6-\frac{2008}{n+3}$$ [**10 бодова**].

Пошто је $2n - 6$ увек цео број, разломак ће бити цео само ако је $\frac{2008}{n+3}$ цео број, што значи да $n + 3$ мора бити целобројни делилац броја 2008 [**2 бода**]. Дакле, $n + 3$ припада скупу {–2008, –1004, –502,

–251, –8, –4, –2, –1, 1, 2, 4, 8, 251, 502, 1004, 2008} који има 16 бројева, па је n елемент скупа {–2011, –1007, –505, –254, –11, –7, –5, –4, –2, –1, 1, 5, 248, 499, 1001, 2005}, према томе одговор је 16 [**8 бодова** – свака два тачна решења по 1 бод].
Други начин. Како је број $2008 = 8 \cdot 251 = 2^3 \cdot 251^1$, то је број његових позитивних делилаца једнак $(3 + 1) \cdot (1 + 1) = 4 \cdot 2 = 8$, а целих делилаца $8 \cdot 2 = 16$. За сваки делилац d броја 2008 добијамо тачно једну вредност $n = d - 3$. Дакле, постоји 16 различитих целих бројева n [**8 бодова**].

4. Висина пирамиде $SABCDEF$ је SO, где је тачка O центар правилног шестоугла $ABCDEF$. Ако је M средиште неке странице шестоугла, на пример странице BC, из услова задатка имамо $\measuredangle OMS = 60°$ [**2 бода**], па је у правоуглом троуглу SOM, страница OM висина једнакостраничног троугла BOC, односно $OM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{6\sqrt{3}}{2}\text{cm} = 3\sqrt{3}\ \text{cm}$ [**2 бода**]. Троугао SOM је половина једнакостраничног троугла странице $2OM = 6\sqrt{3}\ \text{cm}$, па је SO као висина тог троугла једнака $SO = \dfrac{6\sqrt{3}\ \text{cm}\cdot\sqrt{3}}{2} = 9\ \text{cm}$ [**2 бода**].
Основа пирамиде $CDFG$ је троугао CDF чија је страница $CF = 2a = 12\text{cm}$ [**1 бод**], а њој одговарајућа висина h из темена D је и висина једнакостраничног троугла OCD странице a, па је $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{6\sqrt{3}}{2}\ \text{cm} = 3\sqrt{3}\ \text{cm}$ [**2 бода**], и површина основе пирамиде је

$$B = \frac{CF\cdot h}{2} = \frac{12\ \text{cm}\cdot 3\sqrt{3}\ \text{cm}}{2} = 18\sqrt{3}\ \text{cm}^2\ [\textbf{2 бода}].$$

Површину троугла CDF могли смо да израчунамо и ако приметимо да су његови унутрашњи углови $\measuredangle FCD = 60°$, $\measuredangle CFD = 30°$ i $\measuredangle CDF = 90°$, а странице $CD = 6\ \text{cm}$ и $DF = a\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\ \text{cm}$.
Подножје N висине $H = GN$ пирамиде $CDFG$ припада дужи CF јер је нагиб равни троугла FSC према равни основе 90° [**2 бода**]. Правоугли троуглови FGN и FSO са заједничким углом GFN су слични [**2 бода**] па је $GN : SO = FG : FS = 1 : 3$ [**2 бода**], па је $GN = \dfrac{1}{3}SO = 3\ \text{cm}$, односно $H = 3\ \text{cm}$ [**1 бод**]. Коначно, тражена запремина пирамиде $CDFG$ је

$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}\cdot 18\sqrt{3}\ \text{cm}^2\cdot 3\ \text{cm} = 18\sqrt{3}\ \text{cm}^3\ [\textbf{2 бода}].$$

5. (**МЛ 60/1**) Из услова задатка је јасно да сви ученици из школе A морају бити у једном аутобусу, сви ученици из школе B у другом и сви ученици из школе C у трећем аутобусу [**4 бода**]. Према томе, довољно је за ученике ове три школе само одабрати аутобусе на $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ начина [**3 бода**] и још са њима распоредити одговарајући број ученика из школе D.
Са ученицима из школе A бирамо једног ученика из школе D на 6 начина [**3 бода**], са ученицима из школе B бирамо 2 ученика из школе D на $\dfrac{5\cdot 4}{2} = 10$ начина [**4 бода**], док су преостала $6 - 1 - 2 = 3$ ученика из школе D аутоматски распоређени са 1 учеником из школе C у аутобусу [**2 бода**]. Према томе тражени број је $6 \cdot 6 \cdot 10 = 360$ [**4 бода**].
Други начин. Ученике из D (има их 6) треба распоредити у групе величина 1, 2 и 3 по аутобусима, што се може урадити на $\dfrac{6!}{1!\cdot 2!\cdot 3!} = 60$ начина [**9 бодова**]. Коначно решење је $6 \cdot 60 = 360$ начина [**4 бода**].