

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије
ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28. март 2026.

Први разред - А категорија

1. Да ли постоји полином $P(x)$ са целобројним коефицијентима такав да за четири, по паровима различита, цела броја a, b, c и d важи $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 2024$, као и:
(а) $P(e) = 2028$, за неки цео број e ?
(б) $P(e) = 2026$, за неки цео број e ?
2. Дат је троугао ABC . Означимо са k његову описану кружницу са центром у тачки O . Конструисати тачку D на кружници k тако да су тежишта троуглова ABC и ABD тачке колинеарне са тачком O .
3. Нека је $S(x)$ збир цифара природног броја x у декадном запису.
(а) Одредити најмањи елемент скупа $\{S(11n^2 + n + 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
(б) Доказати да се за бесконачно много природних бројева n достиже тражена најмања вредност (која је одређена у првом делу задатка).
4. Посматрамо коначан низ од укупно n бројева, $n \in \mathbb{N}$, где је сваки 1 или 0. У једном потезу, узимамо два суседна броја, рецимо x и y , обришемо их, и на њихова места упишемо само један број, $x + y \pmod{2}$. За које највеће k (у функцији од n) можемо да гарантујемо, да након примене неколико оваквих потеза, можемо да добијемо барем k узастопних међусобно једнаких бројева?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије
ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28. март 2026.

Други разред - А категорија

1. Нека су a, b и c реални бројеви и $a^2 + b^2 + c^2 > 0$. Доказати да постоји реалан број d такав да је

$$(ad^2 + bd + c)(bd^2 + cd + a) > 0.$$

2. Дат је троугао ABC са центром описане кружнице у тачки O . Означимо са M средиште странице BC и изаберимо произвољну тачку D са описане кружнице троугла ABC , која је различита од темена тог троугла. Праве DB и DC секу кружницу AOD у тачкама E и F редом, не нужно различитим од тачке D . Ако је средиште дужи EF тачка G , доказати да је $AG = MG$.

3. Нека је $S = \{\text{НЗД}(a^n + b^n + c^n, a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1}, a^{n+2} + b^{n+2} + c^{n+2}) \mid a, b, c, n \in \mathbb{N}, \text{НЗД}(a, b, c) = 1\}$. Одредити, ако постоји, највећи елемент скупа S .

4. Дат је природан број n . Једнакостранични троугао странице n подељен је на n^2 јединичних једнакостраничних троуглова правима паралелним са страницама оригиналног троугла. Два јединична једнакостранична троугла су суседна ако деле заједничку страницу. Пут је низ неколико суседних једнакостраничних троуглова у којем се сваки једнакостранични троугао појављује највише једном. Наћи све природне бројеве n за које постоји n путева који сви садрже тачно n једнакостраничних троуглова и за које важи да се сваки од n^2 јединичних једнакостраничних троуглова налази у тачно једном од њих.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије
ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

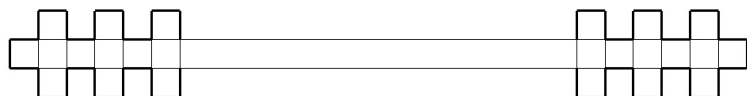
28. март 2026.

Трећи разред - А категорија

1. (а) Ако је $z \in \mathbb{C}$ комплексан број јединичног модула, доказати да је $z^{2020} + z^3 + 1 \neq 0$.
(б) Одредити све природне бројеве n такве да за сваки комплексан број z , за који је $|z| = 1$, важи једнакост

$$\left| \frac{z^{2020} + z^n + 1}{z^{2020} + z^3 + 1} \right| = 1.$$

2. Дата је табла која садржи по 1011 јединичних поља у „горњем” и „доњем” реду, а 2023 поља у „средњем” (видети слику). Кенгур у једном потезу скаче са једног јединичног поља табле на неко друго јединично поље табле. Потез AB , којим кенгур скаче са неког поља A на поље B , подударан је потезу CD , којим кенгур скаче са поља C на поље D табле, ако и само ако је вектор од центра поља A до центра поља B једнак вектору од центра поља C до центра поља D . Да ли постоји низ потеза $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{4044}A_{4045}$, при чему су свака два од поља $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{4044}$ и A_{4045} различита, такав да никоја два потеза нису подударна?



3. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева m који се не могу представити у облику збира $m = n + \varphi(n)$, за неки природан број n , где је $\varphi(n)$ укупан број природних бројева, не већих од n , који су узајамно прости са n .
4. Дат је троугао ABC са ортоцентром у тачки H . Праве BH и CH секу симетралу спољашњег угла у темену A тог троугла у тачкама D и E , редом. Нека је M средиште странице BC , а K подножје висине из тачке H на праву AM . Доказати да су тачке D, K, H и E концикличне.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије
ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28. март 2026.

Четврти разред - А категорија

1. Одредити све вредности позитивних реалних параметара a и b за које неједнакост

$$4^x + a^x + b^x \geq 6^x + 3^x + 2^x$$

важи за сваки реалан број x .

2. Одредити све уређене парове $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ за које важи једнакост

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdots 2024! = x^2 \cdot n!.$$

3. Дат је троугао ABC са центром описане кружнице у тачки O . Тачке E и F су одабране на правама AB и AC , редом, тако да је четвороугао $AEOF$ паралелограм. Тачка D је произвољна тачка са дужи BC , а симетрала дужи BD сече праву OE у тачки P , а праву AB у тачки Q , док симетрала дужи CD сече праву OF у тачки R и праву AC у тачки S . Доказати да се праве QR и PS секу на правој EF .

4. Дати су природни бројеви m и n . Правоугаона табла димензија $m \times n$ подељена је на mn јединичних поља (квадрата) и попуњена је природним бројевима од 1 до mn (у сваком пољу је различит број). Правоугаоник чије су обе странице веће од 1 и паралелне страницама табле, а сва четири темена су му нека од темена јединичних квадрата, називамо *лошим* ако му је збир бројева у горњем левом ћошку и доњем десном ћошку различит од збира бројева у доњем левом ћошку и горњем десном ћошку. Ако је познато да постоји барем један лош правоугаоник, одредити највеће k за које можемо тврдити да постоји k лоших правоугаоника.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења задатака детаљно образложити.