Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28. фебруар 2026.

Први разред - А категорија

1. Дата је релација $\varrho = \{(a,b) \in A \times A : (a^2 - b^2)(ab-1) = 0\}$ на скупу A, где је $A = \{0, 1, -1, 2, \frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}\}$.
(а) Да ли је релација ϱ рефлексивна, симетрична, антисиметрична или транзитивна?
(б) Испитати да ли је ϱ релација еквиваленције. У случају да није, одредити барем један скуп $\varrho_1 \subset A \times A$ такав да је релација $\varrho \cup \varrho_1$ релација еквиваленције.

2. Дат је троугао ΔABC и тачка X у његовој равни. Тачке A,B и C су пресликане централном симетријом у односу на тачку X у тачке A', B' и C', редом. Нека су M, N и P средишта дужи AB', BC' и CA', редом. Доказати да је тачка X тежиште троугла ΔMNP.

3. На табли је записан број 2025. Ана и Бојан играју следећу игру, наизменично вукући потезе: Потез се састоји од брисања написаног броја и замењивања истог са разликом тог броја и неке његове цифре која није нула (играч сам бира цифру). Победник је онај који напише 0 на табли. Ако Ана игра прва, одредити који играч има победничку стратегију.

4. Перица је за сваки природан број на табли написао остатак при дељењу тог броја са збиром својих цифара у декадном запису. Да ли је на овај начин Перица на табли написао сваки природан број?

5. Одредити све парове $(a,b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, где је $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, за које важи
$$1 + 3^a + 2025^b = 2027^b.$$

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28. фебруар 2026.

Други разред - А категорија

1. Нека су x, y и z позитивни реални бројеви такви да је $xy + yz + zx = 3$. Доказати неједнакост:

$$\frac{2^{x^2+yz}}{zx+xy} + \frac{2^{y^2+zx}}{xy+yz} + \frac{2^{z^2+xy}}{yz+zx} \geqslant 6.$$

Када важи знак једнакости?

2. Дат је тетиван четвороугао $ABCD$ са угловима $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$. Тачке E и F су средишта страница AB и CD, редом. Нека постоји тачка G на дужи EF таква да је $\frac{EG}{GF} = \frac{AB}{CD}$, као и $AG = CG$. Одредити величину $\angle AGC$.

3. Нека је n природан број. Одредити најмање k са следећим својством: Из произвољног низа $a_1, ..., a_n$, где $a_i \in \{0, 1\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, је могуће, избацивањем највише k чланова, добити низ којем је збир чланова на парним позицијама једнак збиру чланова на непарним позицијама.

4. Нека је $A = \{1, 2, \dots, 2025\}$ дати скуп и $f : A \to A$ дата функција. Дефинишимо $f^0(x) = x$ и $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$, за $k \in \mathbb{N}$, $x \in A$. Доказати једнакост скупова $\{f^{2024}(1), f^{2024}(2), \dots, f^{2024}(2025)\} = \{f^{2025}(1), f^{2025}(2), \dots, f^{2025}(2025)\}$.

5. Доказати да 20-оцифрени природан број, који почиње са 11 јединица слева, не може бити квадрат неког природног броја.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28. фебруар 2026.

Трећи разред - А категорија

1. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи $f(x(x+y)) = x^2 + yf(x)$.

2. Дат је тетиван четвороугао $ABCD$. Дијагонале AC и BD се секу у тачки E, а праве AD и BC се секу у тачки F. Нека је G средиште лука CD кружнице описане око четвороугла $ABCD$, који не садржи тачке A и B. Ако су тачке E, F и G колинеарне, доказати да је четвороугао $ABCD$ једнакокраки трапез.

3. Нека је (a_n) низ реалних бројева за који је $a_0 = 0$ и

$$a_{n+1} = 45a_n + \sqrt{2024a_n^2 + 1}, \ \ n = 0, 1, 2, \dots .$$

Доказати да је сваки члан низа (a_n) цео број и да 90 дели a_{2n}, за све природне бројеве n.

4. Нека је $p > 2$ прост број и $(a_1, a_2, ..., a_{p-1})$ пермутација бројева $\{1, 2, ..., p-1\}$. Колико највише од бројева $a_1a_2, a_2a_3, ..., a_{p-2}a_{p-1}, a_{p-1}a_1$ може да даје исти остатак при дељењу са p?

5. У мору Енморе, налази се n острва, при чему се на i-том острву налази град са именом i-град. Сви ови градови заједно чине државу Ентију. Превозник Ентранспорт организује поласке из i-града до j-града ако и само ако важи $(i + j, n) > 1$ (где са (x, y) означавамо највећи заједнички делилац бројева x и y). Одредити све природне бројеве n за које важи да се из било ког града може доћи у било који други град.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28. фебруар 2026.

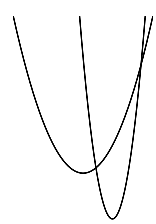
Четврти разред - А категорија

1. Постоје ли различити $m, n \in \mathbb{N}$, при чему је:
(а) $m^{\tau(m)} = n^{\tau(n)}$?
(б) $m^{\tau(n)} = n^{\tau(m)}$?
Са $\tau(a)$ смо означили укупан број позитивних делилаца природног броја a.

2. (а) Доказати да за сваки полином $P(x)$, са реалним коефицијентима, постоји одговарајући полином $Q(x)$ такав да је $P(x) = Q(x+1) - Q(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
(б) Доказати да је за свака два полинома $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ који одговарају полиному $P(x)$, тј. за које је испуњено $P(x) = Q_1(x+1) - Q_1(x) = Q_2(x+1) - Q_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$, важи да је полином $Q_2(x) - Q_1(x)$ константан.

3. Дат је троугао ABC. Његова уписана кружница, са центром у тачки I, додирује страницу AB у тачки D. Нека је F тачка на висини из темена A, таква да је $AF = AD$. Доказати да се права кроз I паралелна са правом BC и права DF секу на уписаној кружници троугла ABC.

4. Перица је одабрао реалне бројеве a, b и c и скицирао графике функција $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, које су задате са $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = cx^2 + bx + a$, за свако $x \in \mathbb{R}$. Након тога избрисао је координатне осе (видети слику) равни у којој су ти графици скицирани.



Конструисати координатне осе.

5. Никола и Марко играју игру са гомилом од N новчића. У i-том потезу, играч може да узме највише i новчића (мора бар 1). Побеђује онај који узме последњи новчић. Ако Никола игра први, одредити ко има победничку стратегију у зависности од N.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28. фебруар 2026.

Први разред - Б категорија

1. Дата је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, која је дефинисана са

$$f(x) = \begin{cases} |x+1|, & x \leqslant -1, \\ -2x + a, & x > -1. \end{cases}$$

(а) Да ли постоји реалан број a такав да је f бијекција?
(а) Ако постоји такво a, одредити f^{-1}.

2. Релација ρ, на скупу природних бројева $\mathbb{N}$, дефинисана је са: $x\ \rho\ y \iff x + y \in P$, где смо са P обележили скуп свих простих бројева. Доказати да не постоји 2027 различитих природних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_{2026}, a_{2027}$ таквих да важи $a_1\ \rho\ a_2\ \rho\ a_3\ \rho\ \ldots\ \rho\ a_{2026}\ \rho\ a_{2027}\ \rho\ a_1$.

3. Дат је троугао ABC. Нека су тачке D и E средишта страница AB и AC, редом, а h_a висина из темена на A на праву BC. Означимо са F пресек описане кружнице троугла ADE са висином h_a, а са H пресек праве која пролази кроз тачке D и F са правом BC. Доказати да тачке A, F, H и C леже на једној кружници.

4. Наћи максималан број елемената скупа $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ које можемо изабрати тако да међу изабранима не постоје нека два елемента, рецимо a и b, тако да је НЗД$(a, b) = 1$.

5. Перица је добио бесконачне количине картона на којима пише број 20 и бесконачне количине картона на којима пише број 25. Спајањем ових картона на произвољан начин, он може добити различите природне бројеве, нпр. 25, 2025, 202520 итд. Може ли Перица спајањем коначно много картона добити број који је куб неког природног броја?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

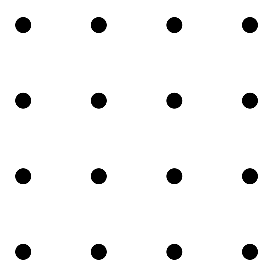
28. фебруар 2026.

Други разред - Б категорија

1. Нека су a, b и c цели бројеви и $a \neq 0$. Које све вредности може имати дискриминанта квадратне функције
$$f(x) = ax^2 + bx + c\,?$$

2. Одредити све парове целих бројева (x, y) који представљају решења једначине $y = 2x^2 + 5xy + 3y^2$.

3. Дата је квадратна решетка 4×4 сачињена од 16 тачака (видети слику). Колико има троуглова са теменима у овим тачкама?



4. Нека су P и Q средишта краћих лукова AB и AC кружнице описане око троугла ABC, а s_α симетрала унутрашњег угла $\angle BAC$. Доказати да важи $PQ \perp s_\alpha$.

5. За природан број n означимо са $n!_0$ природан број који се добија одбацивањем свих нула које се налазе на крају декадног записа броја $n!$ (нпр. $4!_0 = 24$, $7!_0 = 504$). Решити једначину
$$a!_0 = 12 + b!_0$$
у скупу природних бројева.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28. фебруар 2026.

Трећи разред - Б категорија

1. У троуглу ABC углови код темена A, B и C означени су са α, β и γ, редом. Ако важи
$$\cos\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta - 1,$$
доказати да је тај троугао једнакокраки.

2. Доказати да су вектори $\vec{x} = (1, a, a^2)$, $\vec{y} = (1, b, b^2)$ и $\vec{z} = (1, c, c^2)$ линеарно независни ако и само ако су a, b и c по паровима различити (тј. $a \neq b \neq c \neq a$).

3. Дат је тетиван четвороугао $ABCD$. Праве AC и BD се секу у тачки E, а праве AD и BC се секу у тачки F. Нека је G средиште лука CD кружнице описане око $ABCD$ који не садржи тачке A и B. Ако су тачке E, F и G колинеарне, доказати да је четвороугао $ABCD$ једнакокраки трапез.

4. Одредити све тројке $(x, y, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ за које важи
$$x^{2024} + 2025^y = 2026^z.$$

5. Да ли је могуће сваку тачку координатне равни обојити у једну од 2025 боја, тако да постоји тачка у свакој од ових боја и да је график сваког полинома са целобројним коефицијентима једнобојан?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28. фебруар 2026.

Четврти разред - Б категорија

1. Одредити све $a, b \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ такве да је број $1 + 2^a + 2025^b$ степен неког парног природног броја, при чему је тај степен природан број већи од 1.

2. Дата је функција $f_k(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + k(\sin^4 x + \cos^4 x)$, где је k неки реалан број.
(а) Одредити домен функције f.
(б) Одредити све k такве да је $f_k(x) \leqslant 0$ на целом домену.
(в) Одредити све k за које је $f_k(x)$ константна функција на целом домену и за тако добијено k одредити $f_k(2026)$.

3. Дужине страница троугла ABC су $BC = 4$ и $AC = 5$, а дужина дела симетрале угла $\angle ACB$, који се налази унутар троугла, је $s = \frac{10}{3}$. Израчунати дужину странице AB.

4. Да ли је могуће сваку тачку координатне равни обојити у једну од 2026 боја, тако да постоји тачка у свакој од ових боја и да је график сваког полинома са целобројним коефицијентима једнобојан?

5. Нека су $a = \log_6 30$ и $b = \log_{15} 24$ дати позитивни реални бројеви. Познато је да важи

$$\frac{2ab + 2a - 1}{ab + b + 1} = \log_m n,$$

где су m и n природни бројеви. Ако је $n = 3600$, одредити вредност израза $2m + n$.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.