

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28. фебруар 2026. године

Први разред - А категорија

1. Очигледно важи

$$(a^2 - b^2)(ab - 1) = 0 \iff (a - b)(a + b)(ab - 1) = 0,$$

одакле закључујемо да је

$$a \rho b \iff a = b \text{ или } a = -b \text{ или } ab = 1.$$

Стога, релацију ρ можемо представити таблицом (0 означава да елементи нису у релацији, док 1 означава да су елементи у релацији):

ρ	0	1	-1	2	$\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{3}$
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
-1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	1	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	0	0	1	1	0	1	0	0
-2	0	0	0	1	0	1	1	0	0
$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	1	1	1	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	1	1
$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0	0	0	1	1

(а) Испитајмо особине релације ρ .

Рефлексивност: Јасно је да за свако $a \in A$ важи $a = a$, те је

$$(a^2 - a^2)(a^2 - 1) = 0,$$

односно $a \rho a$, тј. релација ρ је рефлексивна.

Симетричност: Ако је $a \rho b$, тада важи барем једна од следећих импликација:

$$a = b \Rightarrow b = a,$$

$$a = -b \Rightarrow b = -a,$$

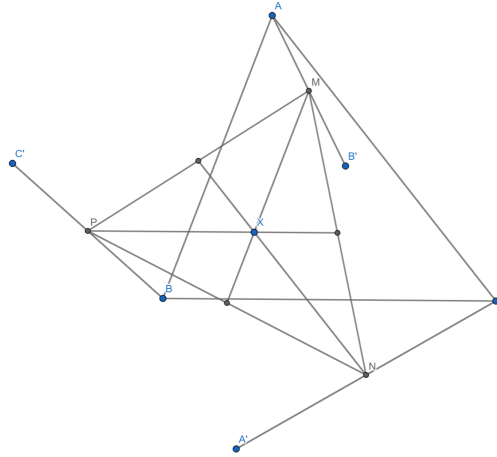
$$ab = 1 \Rightarrow ba = 1.$$

У сва три случаја једноставно закључујемо да произилази $b \rho a$, тј. релација ρ је симетрична.

Антисиметричност: Посматрајмо елементе $a = 1$ и $b = -1$ скупа A . Тада је

$$1 \rho -1 \text{ и } -1 \rho 1,$$

тј. $a \rho b$ и $b \rho a$, јер је $1 = -(-1)$. Међутим, $a = 1 \neq -1 = b$. Дакле, релација ρ није антисиметрична.



Транзитивност. Посматрајмо, сада, елементе $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$ и $c = -\frac{1}{2}$ скупа A . Важи:

$$2 \rho \frac{1}{2} \quad (\text{јер је } 2 \cdot \frac{1}{2} = 1), \quad \frac{1}{2} \rho - \frac{1}{2} \quad (\text{јер је } \frac{1}{2} = -(-\frac{1}{2})).$$

Међутим,

$$2 \not\rho - \frac{1}{2},$$

јер није испуњена нити једна од једнакости:

$$2 = -\frac{1}{2}, \quad 2 = -(-\frac{1}{2}), \quad 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Дакле, релација ρ није транзитивна.

(б) С обзиром да релација ρ није транзитивна, она није релација еквиваленције. Са друге стране, ако дефинишемо подскуп ρ_1 скупа $A \times A$ са

$$\rho_1 = \left\{ \left(2, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -2\right), \left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 2\right) \right\},$$

тада релација

$$\tilde{\rho} = \rho \cup \rho_1$$

постаје транзитивна (проверити - рефлексивност и симетричност остају на снази), одакле закључујемо да је релација $\tilde{\rho}$ релација еквиваленције.

2. Задатак ћемо решити уз помоћ вектора и основне карактеризације тежишта троугла (видети слику изнад). За тачку Y , која представља тежиште троугла $\triangle MNP$, важи

$$6\overrightarrow{AY} = 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{AP} = (\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB'}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC'}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}).$$

Са друге стране имамо:

$$6\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{AX} + 2\overrightarrow{AX} + 2\overrightarrow{AX} = (\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA'}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'}),$$

те је $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AY}$, па се тачке X и Y поклапају, тј. $X = Y$. Самим тим је тачка X тежиште троугла $\triangle MNP$.

3. Ана има победничку стратегију. Након сваког потеза, она ће остављати Бојану број који је дељив са 10. На почетку, Ана брише 2025 са табле и записује број $2025 - 5 = 2020$. Тиме Ана оставља Бојану број који је дељив са 10, па како Бојан не може да одузме 0 од њега, он ће Ани оставити на табли број који сигурно није дељив са 10. Стога, Ана понавља поступак одузимања задње цифре броја ма како Бојан играо.

Након коначног броја корака, на табли ће бити записан број 10 и тада ће Бојан бити на потезу. Бојан записује број 9 на табли и тада Ана записује број $9 - 9 = 0$, чиме побеђује у игри.

4. Перица јесте успео да на табли запише сваки природан број. Заиста, нека је n произвољан природан број и нека је његов декадни запис $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_1}$. Означимо са $s = \sum_{i=1}^k a_i$ збир цифара броја n . Очигледно је $10^k > s$. Тада, број

$$\underbrace{\overline{111 \dots 11}}_{10^k - s} a_k a_{k-1} \dots a_1$$

има збир цифара 10^k и k -тоцифрени завршетак једнак n , па ће Перица на табли записати управо број n .

5. Приметимо да је лева страна не мања од 3, па је $b > 0$. Претпоставимо прво да је и $a > 0$. Посматрајмо обе стране дате једнакости по модулу 3. Тада је

$$1 + 3^a + 2025^b \equiv 1 + 0 + 0 \equiv 1 \pmod{3}, \text{ као и } 2027^b \equiv (-1)^b \pmod{3}.$$

Одавде је b паран број из \mathbb{N} . Слично, посматрањем обе стране дате једнакости по модулу 8 добијамо

$$1 + 3^a + 2025^b \equiv 1 + 3^a + 1 \equiv 2 + 3^a \pmod{8}, \text{ као и } 2027^b \equiv 3^b \pmod{8}.$$

Како је $3^2 = 9 \equiv 1 \pmod{8}$, то је $3^b \equiv 1 \pmod{8}$, за сваки паран природан број b . Међутим, лева страна је по истом модулу конгруентна са $2 + 3^a$, што је конгруентно са 3 или 5 по модулу 8. Дакле, у овом случају нема решења. Следи, $a = 0$, па би за $b > 1$ важило

$$2 = 2027^b - 2025^b = (2027 - 2025)(2027^{b-1} + 2027^{b-2} \cdot 2025 + \dots + 2027 \cdot 2025^{b-2} + 2025^{b-1}) > 2.$$

Коначно, провером налазимо да је једино решење задатка $(a, b) = (0, 1)$.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28. фебруар 2026. године

Други разред - А категорија

1. Нека је L израз који се налази са леве стране неједнакости у поставци задатка. Тада, по АГ неједнакости примењеној на три сабирка у изразу L , имамо да важи

$$L \geq 3 \sqrt[3]{\frac{2x^2+yz+y^2+zx+z^2+xy}{(zx+xy)(xy+yz)(yz+zx)}}.$$

С обзиром да важи $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$, добијамо да је $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$, одакле је

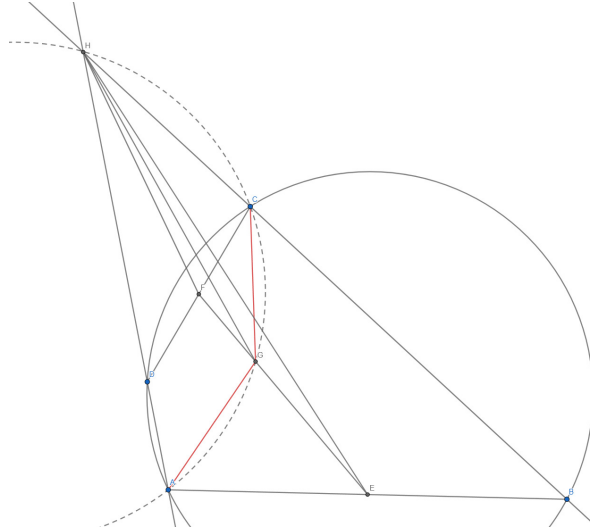
$$L \geq 3 \sqrt[3]{\frac{2^2(xy+yz+zx)}{(zx+xy)(xy+yz)(yz+zx)}} = 3 \sqrt[3]{\frac{2^6}{(zx+xy)(xy+yz)(yz+zx)}}.$$

Примењујући, поново, АГ неједнакост на чиниоце у имениоцу, те користећи услов задатка, добијамо

$$\sqrt[3]{(zx+xy)(xy+yz)(yz+zx)} \leq \frac{(zx+xy)+(xy+yz)+(yz+zx)}{3} = \frac{6}{3} = 2,$$

одакле налазимо да је $L \geq 3 \cdot \frac{2^2}{2} = 6$, чиме је доказ завршен. Напоменимо да једнакост важи ако и само ако је $x = y = z = 1$.

2. Нека је тачка H пресек правих AD и BC . Како је четвороугао $ABCD$ тетиван, знамо да је $\angle CDH = \beta$ и $\angle DCH = \alpha$, одакле закључујемо да је $\triangle HAB$ сличан са $\triangle HCD$. Како су E и F средишта одговарајућих страница у сличним троуглима, имамо да је $\triangle HEB$ сличан са $\triangle HFD$, одакле налазимо да је $\angle DHF = \angle BHE$ (*), као и $\frac{HF}{HE} = \frac{DF}{BE} = \frac{CD}{AB} = \frac{FG}{GE}$, па на основу обрнуте теореме о симетрали угла имамо да је HG симетрала $\angle FHE$. Дакле, $\angle FHG = \angle EHG$, а због (*), добијамо $\angle AHG = \angle CHG$, односно да је HG симетрала $\angle AHC$. Посматрајмо, сада, описани круг $\triangle HAC$. Нека исти симетрала $\angle AHC$ сече у тачки G' . Тада знамо да је тачка G' средиште мањег лука AC , Односно $AG' = CG'$, а како имамо и $AG = CG$, те да су тачке G, G' са исте стране праве AC , закључујемо $G = G'$. Стога је $\angle AGC = 180^\circ - \angle AHC = \alpha + \beta$.



Напомена. Уколико је $AD \parallel BC$, тада је четвороугао $ABCD$ трапезе, одакле тривијално добијамо тврђење.

3. Очигледно је $k > 0$. Докажимо да $k = 1$ задовољава услове задатка, тј. да избацивањем највише једног члана добијамо низ са траженим својством. Доказ изводимо индукцијом по n , при чему случајеви $n = 1$ и $n = 2$ тривијално важе. Претпоставимо да имамо низ дужине $n > 2$. Ако је $a_1 = 0$ или $a_n = 0$, применом индуктивне хипотезе на низ a_2, \dots, a_n , односно на низ a_1, \dots, a_{n-1} , завршавамо индуктивни корак. Даље, ако постоји $i < n$ са својством да је $a_i = a_{i+1}$, можемо применити индуктивну хипотезу на низ без чланова a_i, a_{i+1} , па онда вратити ова два члана. Приметимо да тиме нисмо пореметили тражену суму, одакле закључујемо да тврђење важи. Остао је случај $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) = (1, 0, 1, \dots, 1, 0, 1)$. Очигледно је да тада n мора бити непарно, те је довољно избацити члан $a_{\frac{n+1}{2}}$, чиме је доказ завршен.

4. Нека је $S_k = \{f^k(1), f^k(2), \dots, f^k(2025)\}$, за $k \in \mathbb{N}_0$, при чему је $S_0 = \{1, 2, \dots, 2025\} = A$. За сваки елемент $x \in A = S_0$ функција f одређује његов следбеник $f(x)$. Број x је претходник броја y ако важи $f(x) = y$. Очигледно је да један број може имати више претходника, али (пошто је f функција - једнозначна је) сваки број има тачно једног следбеника.

Јасно је да скуп S_{k+1} добијамо из скупа S_k тако што сваки елемент $x \in S_k$ заменимо његовим следбеником $f(x)$. Другим речима,

$$S_{k+1} = f(S_k) = \{f(x) : x \in S_k\}.$$

Приметимо да елемент $y \in S_k$ се не појављује у скупу S_{k+1} ако и само ако нема претходника у скупу S_k , тј. ако не постоји $x \in S_k$ такав да је $f(x) = y$. Такве елементе ћемо звати листовима (прецизније, листовима у скупу S_k). Ако нема листова, скуп постаје сталан, тј. функцијом f иде у себе. Претпоставимо да у неком кораку, при прелазу $S_k \rightarrow S_{k+1}$ функцијом f , ниједан елемент из S_k није лист. То значи да сваки $y \in S_k$ има бар једног претходника у S_k , тј. постоје $x \in S_k$ са $f(x) = y$. Дакле, пресликавање $f : S_k \rightarrow S_k$ је сурјективно. Како је S_k коначан скуп, из сурјективности следи и његова ињективност, па је $f : S_k \rightarrow S_k$, заправо, бијекција у том случају. Отуда,

$$S_{k+1} = f(S_k) = S_k.$$

Даље, тривијалном индукцијом добијамо да је

$$S_k = S_{k+1} = S_{k+2} = S_{k+3} = \dots,$$

дакле, од тог тренутка надаље скуп се више не мења деловањем функције f (достиге се такозвани фиксни скуп). Међутим, фиксни скуп мора настати најкасније до 2024. корака. Ако у неком кораку постоји барем један лист, тада тај лист нестаје у следећем скупу, па се број елемената строго смањује:

$$|S_{k+1}| < |S_k|.$$

Пошто је $|S_0| = 2025$, такво строго смањивање може да се догоди највише 2024 пута, јер скупови S_k никада нису празни (на пример, увек садрже елемент $f^k(1)$). Зато, најкасније до корака $k = 2024$, мора наступити ситуација без листова, тј. мора се достићи фиксни скуп.

Када се фиксни скуп једном достигне, он остаје исти у свим наредним корацима, па посебно важи

$$S_{2024} = S_{2025}.$$

што значи да је

$$\{f^{2024}(1), f^{2024}(2), \dots, f^{2024}(2025)\} = \{f^{2025}(1), f^{2025}(2), \dots, f^{2025}(2025)\},$$

што је и требало доказати.

5. Претпоставимо да постоји такав природан број x , тј. да је $x = m^2$, за неко $m \in \mathbb{N}$. Тада је

$$1111111111 \cdot 10^9 \leq x < 1111111111 \cdot 10^9 + 10^9,$$

што је еквивалентно са

$$9999999999 \cdot 10^9 \leq 9x < 9999999999 \cdot 10^9 + 9 \cdot 10^9 \Leftrightarrow (10^{11} - 1) \cdot 10^9 \leq 9x < (10^{11} - 1) \cdot 10^9 + 9 \cdot 10^9.$$

С друге стране, приметимо да је

$$(10^{10} - 1)^2 = 10^{20} - 2 \cdot 10^{10} + 1 < (10^{11} - 1) \cdot 10^9 \leq 9x,$$

као и

$$(10^{10} + 1)^2 = 10^{20} + 2 \cdot 10^{10} + 1 > 10^{20} + 8 \cdot 10^9 > 9x,$$

те је

$$(10^{10} - 1)^2 < 9x = (3m)^2 < (10^{10} + 1)^2,$$

одакле следи да је $3m = 10^{10}$. Но, ова једначина, тј. једначина $3m = 10^{10}$, нема решења по m у скупу \mathbb{N} , јер број 10^{10} није дељив са 3.

Дакле, такав број x не постоји.

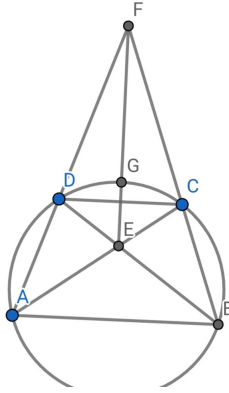
Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28. фебруар 2026. године

Трећи разред - А категорија

1. Дакле, треба наћи све функције $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ за које је $f(x(x+y)) = x^2 + yf(x)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Уврштањем $(x, y) = (0, 0)$ у последњу једнакост добијамо $f(0) = 0$. Уврштањем, затим, $(x, y) = (x, -x)$, за $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, имамо $f(0) = x^2 - xf(x)$, односно $xf(x) = x^2 \iff f(x) = x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Дакле, $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, и лако се проверава да та функција задовољава услове задатк

2. Праве AG и BG су симетрале углова DAE и CBE , редом, па је по теореме о симетрали угла $\frac{AE}{AF} = \frac{BE}{BF} = \frac{EG}{GF}$. Знамо да су троуглови BDF и CAF слични, те је $\frac{AF}{BF} = \frac{AC}{BD}$.



Комбиновањем претходне две једнакости добијамо $\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BD} = \frac{AE+EC}{BE+ED}$, одакле је $\frac{AE}{BE} = \frac{EC}{ED}$. Са друге стране, из сличности троуглова AED и BEC налазимо да је $\frac{AE}{BE} = \frac{ED}{EC}$. Стога, закључујемо да је $ED = EC$, одакле добијамо да је $AE = BE$ и $AB \parallel CD$, чиме је доказ завршен.

3. Важи да је $a_{n+1}^2 - 90a_n a_{n+1} + a_n^2 - 1 = 0$ и $a_{n+2}^2 - 90a_{n+1} a_{n+2} + a_{n+1}^2 - 1 = 0$. Одузимањем прве од друге једначине добијамо да је $a_{n+2}^2 - a_n^2 - 90a_{n+1} a_{n+2} + 90a_n a_{n+1} = 0$, односно $(a_{n+2} - a_n)(a_{n+2} + a_n - 90a_{n+1}) = 0$. Како је низ (a_n) строго растући (јер је $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, одакле се добија да је $a_{n+1} - a_n > 0$), мора важити и $a_{n+2} = 90a_{n+1} - a_n$, те како је $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, принципом математичке индукције, тривијално добијамо да је сваки члан низа (a_n) цео број. Из добијене релације следи да 90 дели $a_{n+2} - a_n$, а како је $a_0 = 0$, индукцијом добијамо да 90 дели a_{2n} за све природне бројеве n .

4. Одговор је $\frac{p-1}{2}$. Приметимо да два суседна броја не могу дати исти остатак при дељењу са p , јер би онда $a_i \equiv a_{i+2} \pmod{p}$, за неко i , што је немогуће. Зато није могуће да тражени максимум буде већи од $\frac{p-1}{2}$.

Докажимо сада да је могуће постићи $\frac{p-1}{2}$. У том циљу, изаберимо x тако да не постоји нити један природан број a за који је $a^2 \equiv x \pmod{p}$. Свакако, овакво x је могуће изабрати, јер је, на пример, $1^2 \equiv (-1)^2 \pmod{p}$. Поделимо бројеве a_i у парове тако да производ бројева у пару даје остатак x при дељењу са p . Конкретно, у пару са бројем a је број $a^{-1}x \pmod{p}$. На основу избора броја x знамо да ниједан број неће бити упарен сам са собом, те смо формирали $\frac{p-1}{2}$ дисјунктних парова и њих можемо

ставити на прве две позиције пермутације, затим на трећу и четврту и тако даље, редом. Овим је доказ завршен.

5. Одговор је свако $n \in \mathbb{N}$, при чему n није потпун степен неког простог броја.

Посматрајмо граф $G_n = (V_n, E_n)$, где је $V_n = \{1, 2, \dots, n\}$ скуп чворова, док је скуп грана E_n одређен на основу захтева: $[i, j] \in E_n$ ако и само ако $(i + j, n) > 1$. Поставка задатка је еквивалентна одређивању свих $n \in \mathbb{N}$ за које је G_n повезан граф. Решење ћемо комплетирати уз помоћ следеће три леме.

Лема 1: Ако је $n = p$ прост број, тада G_n није повезан граф.

Доказ: Приметимо да важи $(1, p) = (2, p) = \dots = (p - 1, p) = 1$, па чвор p није повезан ни са једним другим чвором графа. \square

Лема 2: Ако је $n = p^k$, где је p прост број, а $k \geq 2$ природан број, тада граф G_n није повезан.

Доказ: Посматрајмо чворове $p, 2p, 3p, \dots, p^2, (p + 1)p, \dots, p^k$ (односно све чворове чија ознака је дељива са p). Они су сви међусобно повезани. Произвољно изаберимо неки од осталих чворова и нека је то чвор i . Чвор i не може бити повезан нити са једним чвором облика mp , јер би тада важило $(i + mp, p^k) > 1$, тј. $p|i + mp$, тј. $p|i$, што је немогуће. \square

Дакле, доказали смо да за вредности n које су степени простог броја, граф G_n није повезан. Преостаје нам да докажемо да за све остале вредности n , граф G_n јесте повезан.

Лема 3: Нека је n природан број који има барем два различита проста делиоца p и q . Тада је граф G_n повезан.

Доказ: Нека је $n = pqs$ за $s \in \mathbb{N}$. Посматрајмо чворове $q, 2q, \dots, pq$ - они су сви међусобно повезани. Произвољно изаберимо неки од осталих чворова и нека је то чвор i . Доказаћемо да је чвор i повезан са барем једним чвором из скупа $q, 2q, \dots, pq$. Приметимо да скуп $q, 2q, \dots, pq$ чини потпун систем остатака по модулу p . Самим тим, постоји неко $k \in \{1, \dots, p\}$ тако да је $kq \equiv -i \pmod{p}$, односно $p|(kq + i)$, тј. $kq + i = mp$. Због тога је $(kq + i, n) = (mp, pqs) = p \cdot (m, qs) > 1$. Сада је лако показати да за свака два чвора i, j постоји $[i, j]$ пут у G_n . Разликујемо три случаја:

1. чворови i и j су облика kq , $1 \leq k \leq p$: тада су i и j повезани граном.
2. тачно један од чворова i и j је облика kq , $1 \leq k \leq p$: Нека је $i = kq$, за $1 \leq k \leq p$, на пример. По претходно доказаном, постоји m тако да је $[j, mq] \in E_n$, $1 \leq m \leq p$. Разликоваћемо, стога, два подслучаја:
 - (а) $m = k$: тада су чворови i и j повезани граном.
 - (б) $m \neq k$: Тада имамо пут, који спаја чворове i и j , настао надовезивањем грана $[kq, mq]$ и $[mq, j]$, јер је $i = kq$.
3. Ниједан од чворова i и j није облика kq , $1 \leq k \leq p$: Тада постоје k, m , при чему је $1 \leq k, m \leq p$, такви да $[i, kq], [j, mq] \in E_n$. Аналогно, ако је:
 - (а) $m = k$, тада имамо пут, који спаја чворове i и j , настао надовезивањем грана $[i, kq]$ и $[mq, j]$, јер је $kq = mq$.
 - (б) $m \neq k$, тада имамо пут, који спаја чворове i и j , надовезивањем грана $[i, kq]$, $[kq, mq]$ и $[mq, j]$.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28. фебруар 2026. године

Четврти разред - А категорија

1. Користићемо стандардну ознаку $v_p(t)$, за p -адићку валуацију (највећи степен простог броја p који дели $t \in \mathbb{N}$). Показаћемо сада једну корисну лему на коју ћемо се позивати у решењу.

Лема: Ако су $c, d \in \mathbb{N}$, $c, d \geq 2$, и $p, q \in \mathbb{N}$ такви да важи $c^p = d^q$, тада постоји $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, и постоје узајамно прости природни бројеви a и b такви да је $c = k^a$ и $d = k^b$.

Доказ: За сваки прост број r важи

$$v_r(c^p) = pv_r(c), \quad v_r(d^q) = qv_r(d),$$

одакле, из $c^p = d^q$, следи $pv_r(c) = qv_r(d)$, за свако такво r . Нека је $g = (p, q)$. Тада је $p = gb$ и $q = ga$, за неке природне бројеве a и b , $(a, b) = 1$. Следи $bv_r(c) = av_r(d)$, за сваки прост број r , те како је $(a, b) = 1$, добијамо да $a \mid v_r(c)$, одакле закључујемо да постоји цео број u_r , $u_r \geq 0$, такав да је $v_r(c) = au_r$. Стога, $v_r(d) = bu_r$. Дефинишимо

$$k = \prod_r r^{u_r},$$

где производ узима по свим простим бројевима (само коначно много бројева u_r је различито од нула). Тада је

$$c = \prod_r r^{v_r(c)} = \prod_r r^{au_r} = k^a, \quad d = \prod_r r^{v_r(d)} = \prod_r r^{bu_r} = k^b.$$

□

У наставку, за сваки природан број $k \geq 2$, нека је

$$k = \prod_{i=1}^s p_i^{\alpha_i} \quad (\alpha_i \in \mathbb{N}),$$

факторизација тог броја преко његових простих фактора, одакле следи да је за свако $t \in \mathbb{N}$ испуњено

$$\tau(k^t) = \prod_{i=1}^s (\alpha_i t + 1).$$

Пређимо сада на изворни проблем.

(а) Претпоставимо да важи

$$m^{\tau(m)} = n^{\tau(n)}.$$

Ако је $m = 1$, тада је лева страна једнакости једнака 1, па мора бити и $n = 1$. Дакле, у овом случају нема различитих решења. Аналогно поступамо за $n = 1$. Стога, нека су зато $m, n \geq 2$. Примењујући Лему на једнакост $m^{\tau(m)} = n^{\tau(n)}$, добијамо да постоје $k \geq 2$ и узајамно прости природни бројеви a и b такви да је

$$m = k^a, \quad n = k^b.$$

Убацавањем у полазну једнакост добијамо

$$(k^a)^{\tau(k^a)} = (k^b)^{\tau(k^b)} \implies a\tau(k^a) = b\tau(k^b).$$

Како је $\tau(k^t) = \prod_{i=1}^s (\alpha_i t + 1)$, од интереса ће бити да уведемо функцију:

$$F(t) = t\tau(k^t) = t \prod_{i=1}^s (\alpha_i t + 1), \quad t \in \mathbb{N}.$$

Јасно је да ако је $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$, да је тада $\alpha_i t_1 + 1 < \alpha_i t_2 + 1$, за свако $1 \leq i \leq s$, па је

$$F(t_1) = t_1 \prod_{i=1}^s (\alpha_i t_1 + 1) < t_2 \prod_{i=1}^s (\alpha_i t_2 + 1) = F(t_2).$$

Дакле, функција F је строго растућа на \mathbb{N} , те како је $a\tau(k^a) = b\tau(k^b)$, то је $F(a) = F(b)$, одакле следи $a = b$, односно $m = n$. Дакле, различити m и n у овом делу не постоје.

(б) Претпоставимо, сада, да важи

$$m^{\tau(n)} = n^{\tau(m)}.$$

Као и у првом делу задатка, ако је $m = 1$, тада је лева страна једнакости једнака 1, па мора бити $n = 1$. Исто важи у симетричном случају, тј. за $n = 1$. Дакле, нека су, поново, $m, n \geq 2$.

Применићемо доказану Лему на једнакост $m^{\tau(n)} = n^{\tau(m)}$. У овом случају добијамо да постоје $k \geq 2$ и узајамно прости природни бројеви a и b такви да је

$$m = k^a, \quad n = k^b.$$

Тада, полазна једнакост постаје:

$$(k^a)^{\tau(k^b)} = (k^b)^{\tau(k^a)} \implies a\tau(k^b) = b\tau(k^a).$$

Како је $(a, b) = 1$, закључујемо да $a \mid \tau(k^a)$. Покажимо да је то могуће само за $a = 1$.

Заиста, нека је r прост делилац броја a (ако је $a \geq 2$, такав прост број r постоји) и $k = \prod_{i=1}^s p_i^{\alpha_i}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, за неко $s \in \mathbb{N}$. За сваки i имамо да је

$$\alpha_i a + 1 \equiv 1 \pmod{r},$$

јер из $r \mid a$ следи да је $\alpha_i a \equiv 0 \pmod{r}$. Дакле, r не дели ниједан фактор облика $\alpha_i a + 1$, па не дели ни њихов производ, тј. важи

$$r \nmid \prod_{i=1}^s (\alpha_i a + 1) = \tau(k^a).$$

Међутим, $r \mid a$, па из услова $a \mid \tau(k^a)$ следи да $r \mid \tau(k^a)$, што је контрадикција. Према томе, мора бити $a = 1$.

Слично, важи да је и $b = 1$, одакле је

$$m = k^a = k, \quad n = k^b = k,$$

па је и у овом случају $m = n$, тј. такви различити бројеви не постоје..

2. (а) За дати полином Q , са реалним коефицијентима, уведемо оператор коначне разлике

$$\Delta Q(x) := Q(x+1) - Q(x).$$

Докажимо да је оператор Δ сурјективан на простору реалних полинома, тј. да за сваки полином P постоји полином Q такав да је $\Delta Q(x) = P(x)$, $x \in \mathbb{R}$. У овом делу задатка тврђење ћемо показати применом принципа математичке индукције, по степену полинома P .

База индукције: Нека је $\deg P = 0$, тј. нека је $P(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$. Узмимо да је $Q(x) = cx$, $x \in \mathbb{R}$. Тада је

$$\Delta Q(x) = Q(x+1) - Q(x) = c(x+1) - cx = c = P(x).$$

Индуктивни корак: Претпоставимо да тврђење важи за све полиноме степена највише n (индуктивна хипотеза). Нека је сада P полином степена $n+1$, тј. нека је

$$P(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_nx^n + \dots + a_1x + a_0, \quad a_{n+1} \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Размотримо полином

$$R(x) := \frac{a_{n+1}}{n+2} x^{n+2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тада, користећи биномну формулу, добијамо

$$\Delta R(x) = R(x+1) - R(x) = \frac{a_{n+1}}{n+2} ((x+1)^{n+2} - x^{n+2}) = a_{n+1}x^{n+1} + S(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где је $S(x)$ неки полином степена највише n . Сада, дефинишимо

$$P_1(x) := P(x) - (R(x+1) - R(x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

С обзиром да су водећи чланови полинома P и ΔR једнаки, следи да је $\deg P_1 \leq n$. На основу индуктивне хипотезе постоји полином Q_1 такав да је

$$P_1(x) = Q_1(x+1) - Q_1(x) = \Delta Q_1(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Коначно, ставимо да је

$$Q(x) := R(x) + Q_1(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тада важи

$$\Delta Q(x) = \Delta R(x) + \Delta Q_1(x) = (R(x+1) - R(x)) + P_1(x) = P(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тиме је индукција завршена, те је тврђење у делу (а) показано.

(б) Нека су Q_1 и Q_2 два полинома која одговарају истом полиному P , тј. нека је

$$\Delta Q_1(x) = Q_1(x+1) - Q_1(x) = P(x) = Q_2(x+1) - Q_2(x) = \Delta Q_2(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Одужимањем добијамо

$$(Q_2(x+1) - Q_1(x+1)) - (Q_2(x) - Q_1(x)) = 0,$$

односно, за полином

$$H(x) := Q_2(x) - Q_1(x)$$

важи $H(x+1) = H(x)$, за све $x \in \mathbb{R}$. Претпоставимо да је $\deg H = m \in \mathbb{N}_0$. Ако је $m = 0$, доказ је завршен. Стога, нека је $m \in \mathbb{N}$. Тада су реални бројеви

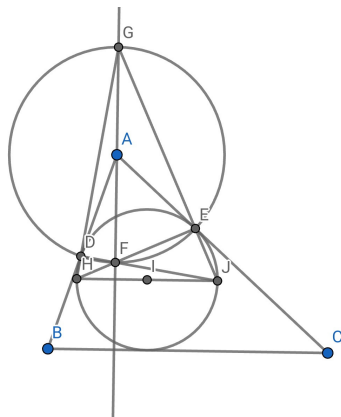
$$H(0), H(1), \dots, H(m)$$

сви међусобно једнаки, јер из једнакости $H(x+1) = H(x)$ следи $H(0) = H(1) = \dots = H(m)$. Посматрајмо полином

$$G(x) := H(x) - H(0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Он је степена $m \geq 1$, а из претходног разматрања видимо да има нуле у тачкама $0, 1, \dots, m$, тј. има барем $m + 1$ различитих нула. То је могуће једино ако је полином G нула-полоном, тј. $G(x) = 0, x \in \mathbb{R}$. Дакле, важи $H(x) = H(0), x \in \mathbb{R}$, тј. полином $H = Q_2 - Q_1$ је константан полином, што се и тврдило.

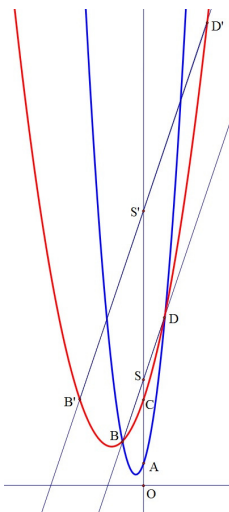
3. Нека је E додирна тачка уписане кружнице и стране AC полазног троугла и нека је G други пресек висине и кружнице са центром у тачки A , полупречника AD . Како је FG пречник те кружнице, то је $\angle GDF = \angle GEF = 90^\circ$.



Нека је H пресек правих GD и EF , а J пресек правих GE и DF . Знамо да је F ортоцентар троугла HJG . Зато је $GF \perp HJ$, те је $HJ \parallel BC$. Кружница $ADEI$ је Ојлерова кружница троугла HJG и дуж AI је пречник исте, одакле је I средиште дужи HJ . С обзиром да је $\angle HDJ = \angle HEJ = 90^\circ$, добијамо да је $IH = IJ = ID = IE$, па се тачке J и H налазе на уписаној кружници, чиме је доказ завршен.

Напомена. Задатак се може решавати уз помоћ рачунања углова. Ако уведемо тачку S , која је пресек паралеле са BC кроз I и уписане кружнице троугла, тако да је четвороугао $BISC$ конвексан, тада посматрањем једнакокраких троуглова DIS и DAF добијамо колинеарност тачака D, F, S .

4. Обележимо пресечне тачке датих графика са B и D , а са S средиште дужи BD . Решавањем једначине $f(x) = g(x)$, чија су решења $x = \pm 1$, добијамо x -координате тачака B и D . Како је $f(1) = a + b + c$ и $f(-1) = a - b + c$, ове тачке, неким редом, имају координате $(1, a + b + c)$ и $(-1, a - b + c)$. Отуда је $S(0, a + c)$.



Нека је $y = kx + n_1$ једначина праве BD . На једном од графика скицираних функција одаберимо произвољну тачку $B' \neq B$ и конструишимо праву кроз B' која је паралелна правој BD . Нека та права сече одабрани график још у тачки D' и нека је S' средиште дужи $B'D'$. Како су праве BD и $B'D'$ паралелне, то је једначина праве $B'D'$ облика $y = kx + n_2$. Благодаревим Вијетовим формулама имамо да збир решења квадратне једначине $f(x) - kx - n = 0$ не зависи од n . Отуда је збир x -координата тачака B и D једнак збиру x -координата тачака B' и D' , те тачке S и S' (као средишта наведених дужи) имају једнаке x -координате. Како је $S(0, a+c)$, права SS' представља y осу. Конструишимо још и x осу. Ако су A и C пресечне тачке скицираних графика са y осом (која је већ конструисана), тада су њихове y -координате једнаке, неким редом, a и c . Имајући на уму да је y -координата тачке S једнака $a+c$, закључујемо да се средишта дужи AC и SO поклапају, где је O координатни почетак. Сада из средишта дужи AC конструишемо кружницу која садржи тачку S . Други пресек те кружнице и y осе је координатни почетак O . Конструкцијом нормале на y осу, кроз тачку O , добијамо и x осу.

5. Нека је a_i број новчића узет у i -том потезу. Посматрајмо збир $A_i = a_i + a_{i+1}$. Покажимо да играч који игра у следећем потезу, тј. потезу $i+1$, може да намести да је $A_i = i+1$ или $A_i = i+2$. Очигледно је да $i+1 - a_i \in \{1, 2, \dots, i\}$, као и $i+2 - a_i \in \{2, 3, \dots, i+1\}$. Нека сада Марко игра овом стратегијом. Дакле, знамо да може да намести $A_{2i-1} = 2i$ или $A_{2i-1} = 2i + 1$, те имамо да је $\sum_{i=1}^n 2i \leq \sum_{i=1}^{2n} a_i \leq \sum_{i=1}^n 2i + 1$, односно $n(n+1) \leq \sum_{i=1}^{2n} a_i \leq (n+1)^2 - 1$. Дакле, за $(n+1)^2 - n - 1 \leq N \leq (n+1)^2 - 1$ побеђује Марко. Иначе, ако Никола игра овом стратегијом, након свог првог потеза (у ком мора да узме један новчић), имамо $1 + \sum_{i=1}^n 2i + 1 \leq \sum_{i=1}^{2n+1} a_i \leq 1 + \sum_{i=1}^n 2i + 2$, тј. $(n+1)^2 \leq \sum_{i=1}^{2n+1} a_i \leq 1 + (n+1)(n+2)$. Дакле, за $(n+1)^2 \leq N \leq (n+2)^2 - (n+2) - 1$ побеђује Никола.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28. фебруар 2026. године

Први разред - Б категорија

1. (а) Да би f била бијекција, мора бити инјективна и сурјективна, тј. „1-1 и „НА”. На интервалу $(-\infty, -1]$ функција f има облик $f(x) = |x+1| = -x-1$, те узима све вредности из $[0, +\infty)$. Слично, на интервалу $(-1, +\infty)$ функција f је задата са $f(x) = -2x + a$, те ће узети све вредности из интервала $(-\infty, a+2)$. Да би функција f била сурјективна, мора важити $[0, \infty) \cup (-\infty, a+2) = \mathbb{R}$, што је могуће само ако је $a+2 \geq 0$, односно $a \geq -2$. У том случају, тј. за $a \geq -2$, функција ће бити инјективна једино за $a = -2$, јер имамо две строго монотонно опадајуће линеарне функције (прва је дефинисана за $x \leq -1$, док је друга дефинисана за $x > -1$) са дисјунктним кодоменима (који се надовезују). Дакле, једино a за које је f бијекција јесте $a = -2$.

(б) За је $a = -2$ одређујемо инверзну функцију f^{-1} функције f која има облик

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1, & x \leq -1, \\ -2x - 2, & x > -1. \end{cases}$$

За $x \leq -1$ је испуњено $f(x) = -x - 1 \geq 0$, та за $y \geq 0$ имамо $y = -(x+1) \implies x = -y - 1$. Слично, за $x > -1$ је испуњено $f(x) = -2x - 2 < 0$, па за $y < 0$ имамо $y = -2x - 2 \implies x = -\frac{y+2}{2}$. Дакле, у овом случају, тј. за $a = -2$, инверзна функција $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функције f је

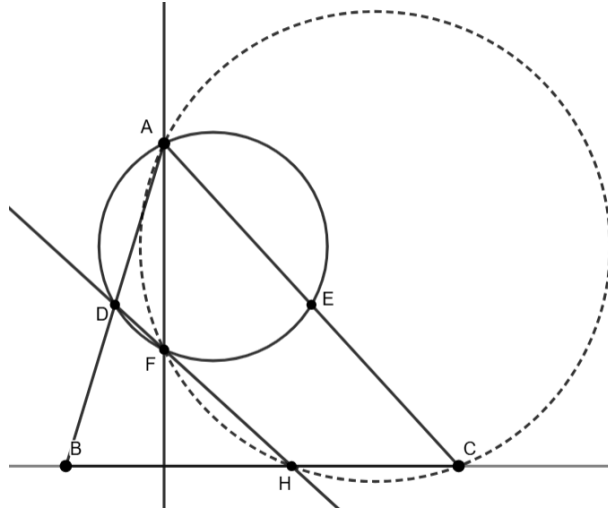
$$f^{-1}(y) = \begin{cases} -y - 1, & y \geq 0, \\ -\frac{y+2}{2}, & y < 0. \end{cases}$$

2. Поновимо да са P означавамо скуп свих простих бројева. Претпоставимо супротно, тј. да постоји 2027 различитих природних бројева $a_1, a_2, \dots, a_{2027}$ таквих да

$$a_1 \rho a_2 \rho a_3 \rho \cdots \rho a_{2027} \rho a_1.$$

Тада је за сваки индекс i (индексе третирамо по модулу 2027) број $a_i + a_{i+1}$ прост. Једини паран прост број је 2, те ако би за неко i важило $a_i + a_{i+1} = 2$, тада би морало бити $a_i = a_{i+1} = 1$, што је немогуће, јер су сви a_i различити. Дакле, број $a_i + a_{i+1}$ је непаран прост, за сваки индекс i , одакле закључујемо да су a_i и a_{i+1} супротне парности за свако i . Стога, парност датих бројева се мора наизменично смењивати дуж целог циклуса. Међутим, бројева $a_1, a_2, \dots, a_{2027}$ има непарно много (плус, кружни циклус је у питању), тј. 2027, одакле следи да бројеви a_1 и a_{2027} имају потпуно исту парност. У том случају, збир $a_{2027} + a_1$ би био паран број, а по услову мора бити прост. Дакле, поново, збир ће бити 2, тј. $a_1 = a_{2027} = 1$, што је немогуће. Зато, не постоји 2027 различитих природних бројева са траженом особином.

3. Како је права DE паралелна правој BC , јер је дуж DE средња линија троугла ABC , и како је четвороугао $ADFE$ тетиван, тврђење тривијано следи из низа једнакости: $\sphericalangle HCA = \sphericalangle DEA = \sphericalangle DFA = 180^\circ - \sphericalangle AFH$.



4. Одговор је n . Заиста, приметимо да ако изабаремо бројеве $2, 4, 6, \dots, 2n$, који су парни, добијамо да је највећи заједнички делилац свака два различита барем 2.

С друге стране, ако из скупа $\{1, 2, \dots, 2n\}$ изабаремо барем $n + 1$ бројева, тада, по Дирихлеовом принципу, ћемо изабрати и нека два узастопна броја, а њихов највећи заједнички делилац је 1, јер, ако за $d \in \mathbb{N}$ важи $d \mid x$ и $d \mid x + 1$, тада $d \mid (x + 1) - x$, односно $d \mid 1$, тј. $d = 1$. Дакле, максимално n елемената полазног скупа у том случају можемо изабрати.

5. Јасно је да ће Перица, ма каквим спајањем, добити број дељив са 5. Да би такав број био потпун куб, мора бити дељив и са $5^3 = 125$, тј. да му троцифрени завршетак буде дељив са 125. Међутим, троцифрени завршетак бројева насталих спајањем картона на којима пишу бројеви 20 и 25 може бити само неки од следећих: $\overline{025}$, $\overline{525}$, $\overline{020}$ и $\overline{520}$. Ниједан од претходна три броја није дељив са 125, па је одговор негативан.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28. фебруар 2026. године

Други разред - Б категорија

1. Видимо да је дискриминанта дате квадратне функције

$$D = b^2 - 4ac.$$

Прво, приметимо да $4 \mid 4ac$ и да број b^2 даје остатке 0 или 1 при дељењу са 4. Према томе, $D \equiv 0 \pmod{4}$ или $D \equiv 1 \pmod{4}$. Са друге стране, избором вредности: $a = 1$, $b = 0$ и $c = -k$, где је $k \in \mathbb{Z}$ произвољан цео број, добијамо да је $D = 4k$, $k \in \mathbb{Z}$, одакле закључујемо да као резултат, тј. за вредност дискриминанте, можемо добити све целе бројеве дељиве са 4. Слично, избором $a = 1$, $b = 1$ и $c = -l$, где је $l \in \mathbb{Z}$ произвољно, имамо $D = 4l + 1$, те овај израз генерише све целе бројеве који дају остатак 1 при дељењу са 4.

Дакле, дискриминанта може узети било коју вредност из скупа $4\mathbb{Z} \cup 4\mathbb{Z} + 1$, где су $4\mathbb{Z} = \{4k : k \in \mathbb{Z}\}$ и $4\mathbb{Z} + 1 = \{4l + 1 : l \in \mathbb{Z}\}$.

2. (ПРВО РЕШЕЊЕ) После сређивања десне стране полазне једначине добијамо да је $y = 2(x + y)^2 + y^2 + xy$. Даље имамо да је $y(1 - y - x) = 2(x + y)^2$. Ставимо да је $x + y = z$. Тада је $y(1 - z) = 2z^2$. Јасно је да је $z \neq 1$, па је $y = \frac{2z^2}{1-z}$. Са друге стране, из $y(1 - z) = 2z^2 - 2 + 2$ следи да је $(1 - z)(y + 2(z + 1)) = 2$, одакле су могуће вредности за $1 - z$ бројеви $\pm 1, \pm 2$, односно $z \in \{0, 2, -1, 3\}$. Коначно, сублимирањем свега, решења дате једначине су парови $(x, y) \in \{(0, 0), (10, -8), (-2, 1), (12, -9)\}$.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Посматрајмо дату једначину као квадратну по x :

$$2x^2 + 5yx + (3y^2 - y) = 0.$$

Да би решења била цела, детерминанта мора да буде целобројна, тј. да је број

$$(5y)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (3y^2 - y) = y^2 + 8y$$

потпун квадрат. Означимо $y^2 + 8y = t^2$, $t \geq 0$, одакле добијамо еквивалентну једначину

$$(y + 4)^2 - t^2 = 16 \Rightarrow (y + 4 - t)(y + 4 + t) = 16.$$

Како су бројеви $y + 4 - t$ и $y + 4 + t$ цели и $y + 4 - t \leq y + 4 + t$, таблица завршава задатак:

$y + 4 - t$	$y + 4 + t$	$y + 4$	t	y	целобројни x
1	16	$\frac{17}{2}$	$\frac{15}{2}$	није цео	—
2	8	5	3	1	$x = \frac{-5 \cdot 1 \pm 3}{4} \Rightarrow x = -2$
4	4	4	0	0	$x = \frac{0}{4} \Rightarrow x = 0$
-16	-1	$-\frac{17}{2}$	$\frac{15}{2}$	није цео	—
-8	-2	-5	3	-9	$x = \frac{45 \pm 3}{4} \Rightarrow x = 12$
-4	-4	-4	0	-8	$x = \frac{40}{4} \Rightarrow x = 10$

3. Три тачке од датих 16 можемо одабрати на укупно $\frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 560$ начина. Од овог броја морамо одузети све тројке колинеарних тачака. Приметимо да имамо 10 четворки колинеарних тачака (4 врсте, 4 колоне и 2 велике дијагонале - све су дужине 4), као и 4 тројке колинеарних тачака (4 краће, тј. споредне, дијагонале - све су дужине 3). Стога, пребројмо колинеарне тројке тачака.

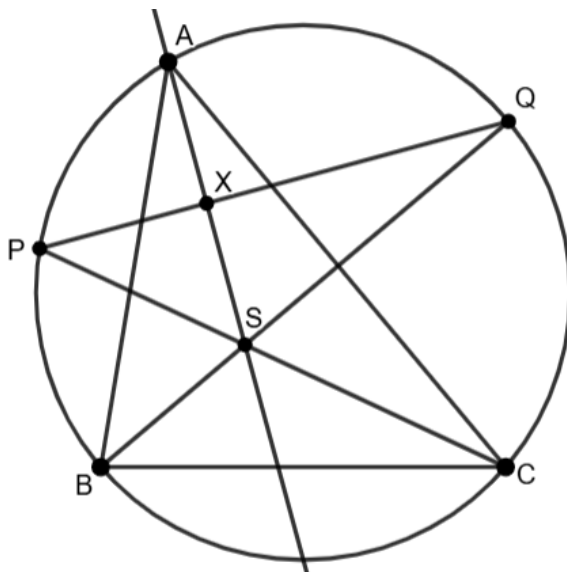
(1) Тројке које припадају некој врсти или колони решетке: У свакој од 4 врста има 4 тачке, па је допринос колинеарних тројки у том случају $4 \cdot \binom{4}{3} = 4 \cdot 4 = 16$. Аналогно, за 4 колоне је још 16, тј. укупно 32.

(2) Главне дијагонале: Постоје 2 главне дијагонале дате решетке дужине 4. Свака даје допринос у броју колинеарних тројки једнак $\binom{4}{3} = 4$, тј. укупно 8.

(3) Споредне дијагонале: У оквиру решетке, постоје и 4 споредне дијагонале решетке дужине 3. Свака даје допринос $\binom{3}{3} = 1$ у броју колинеарних тројки, тј. укупно 4.

Коначно, узимајући у обзир све показано, укупан број троуглова ће бити једнак $560 - 32 - 8 - 4 = 516$ троуглова.

4. Познато је (а може се и лако показати рачунањем периферијских углова) да су тачке P и Q такве да су праве CP и BQ симетрале углова $\angle BCA$ и $\angle ABC$. Као што знамо, симетрале унутрашњих углова неког троугла секу се у центру уписане кружнице истог, те, стога, означимо пресечну тачку CP , BQ и s_α са S . Такође, означимо са X пресечну тачку правих PQ и s_α .



Посматрајмо троугао XSQ и израчунајмо његове унутрашње углове. Прво, имамо да је $\angle XQS = \angle PQB = \angle PCB = \frac{\gamma}{2}$, јер је права CP симетрала угла $\angle BCA = \gamma$. Угао $\angle XSQ$ је спољашњи угао $\triangle ABS$, па је једнак збиру његових несуседних унутрашњих углова, а то су, заправо, углови $\angle BAS$ и $\angle ABS$.

Из чињенице да су праве AS и BS симетрале углова $\angle BAC = \alpha$ и $\angle ABC = \beta$, следи да је $\angle BAS = \frac{\alpha}{2}$ и $\angle ABS = \frac{\beta}{2}$. Дакле, $\angle XSQ = \angle BAS + \angle ABS = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, те је

$$\angle SXQ = \pi - \angle XSQ - \angle XQS = \pi - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

а то управо значи да је $QX \perp XS$, односно да је $PQ \perp s_\alpha$.

5. Приметимо да одбацивање нула са краја декадног записа неког природног броја не утиче на степене тројке који се јављају у канонској факторизацији броја $n!$ (растављање на просте факторе), већ само на степене двојке и степене петице.

Претпоставимо, прво, да је $b \geq 6$. Тада имамо $9 \mid b!_0$, па је $12 + b!_0 \equiv 3 \pmod{9}$. Треба испитати случајеве $a \in \{3, 4, 5\}$. Случај $a = 3$ је немогућ, јер је $3!_0 = 6$, па би требало да буде $b!_0 = -6$. Слично, случај $a = 5$ је немогућ, с обзиром да је $5!_0 = 12$, па би требало да буде $b!_0 = 0$. Коначно, ако је $a = 4$, тада је $b!_0 = 12$. Међутим, за $b \geq 6$ имамо да $9 \mid b!_0$, а знамо да број који као прве две цифре има цифре 1 и 2 (слева на десно), иза којих се налази гомила нула, није дељив са 9, јер му је збир цифара једнак 3. На крају, размотримо случај $b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. За $b = 1$ имамо $a!_0 = 13$, а ово је немогуће, јер $a = 1$ и $a = 2$ нису решења, а за $a > 2$ би овај број морао да буде дељив са 3. Из истих разлога $b = 2$ није решење. Приметимо да за свако $n \geq 7$ имамо $n!_0 \geq 3 \cdot 6 \cdot 7 = 63$. За $n \leq 6$ лако рачунамо: $1!_0 = 1$, $2!_0 = 2$, $3!_0 = 6$, $4!_0 = 24$, $5!_0 = 12$ и $6!_0 = 72$. За $b = 3$ добијамо $a!_0 = 18$, а за $b = 4$ добијамо $a!_0 = 36$, што, на основу претходног разматрања, оставља $b = 5$ као једину могућност. Стога, добијамо једино решење дате једначине пар $(a, b) = (4, 5)$.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28. фебруар 2026. године

Трећи разред - Б категорија

1. У произвољном троуглу важи $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, па је $\cos \gamma = -\cos(\alpha + \beta)$. Из дате једнакости следи $1 = 2 \sin \alpha \sin \beta - \cos \gamma$, па је

$$\cos(\alpha + \beta) + 2 \sin \alpha \sin \beta = 1 \iff \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta = 1$$

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 1 \iff \cos(\alpha - \beta) = 1 \iff \alpha - \beta = 2k\pi, \text{ за } k \in \mathbb{Z}.$$

Како су α и β углови троугла, мора бити $k = 0$, односно $\alpha = \beta$.

2. С обзиром да је еквиваленција у питању, разматраћемо два „смера” у решењу.

(\implies): Нека су вектори \vec{x}, \vec{y} и \vec{z} линеарно независни. Претпоставимо супротно, тј. да постоји неки пар једнаких бројева (међу бројевима a, b и c). Нека је, на пример, $a = b$. Тада је $\vec{x} = \vec{y}$, тј. $1 \cdot \vec{x} + (-1) \cdot \vec{y} + 0 \cdot \vec{z} = \vec{0}$, па су вектори \vec{x}, \vec{y} и \vec{z} линеарно зависни, што је контрадикција.

(\impliedby): Нека су бројеви a, b и c по паровима међусобно различити. Знамо да ће вектори \vec{x}, \vec{y} и \vec{z} бити линеарно независни ако важи импликација

$$\alpha_1 \vec{x} + \alpha_2 \vec{y} + \alpha_3 \vec{z} = \vec{0} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,$$

тј. ако важи

$$\alpha_1(1, a, a^2) + \alpha_2(1, b, b^2) + \alpha_3(1, c, c^2) = (0, 0, 0) \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Лева страна је еквивалентна систему од три једначине:

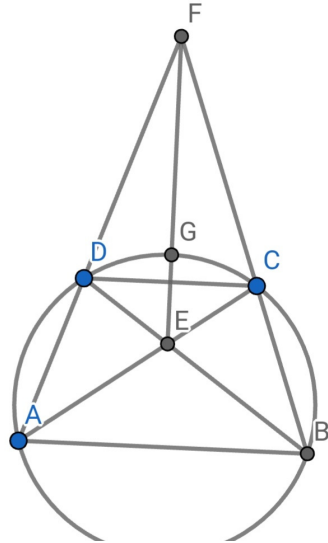
$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c &= 0 \\ \alpha_1 a^2 + \alpha_2 b^2 + \alpha_3 c^2 &= 0. \end{aligned}$$

Стога, треба показати да исти, осим тривијалног решења, тј. решења $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$, нема других. Лако рачунамо детерминанту система:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c).$$

Одавде тривијално налазимо да систем има јединствено решење ако је $D \neq 0$, тј. $(a-b)(a-c)(b-c) \neq 0$, што нам обезбеђује да су бројеви a, b и c по паровима међусобно различити, што се и тврдило у овом смеру.

3. Праве AG и BG су симетрале углова DAE и CBE редом, па је по теореме о симетрали угла $\frac{AE}{AF} = \frac{BE}{BF} = \frac{EG}{GF}$.



Знамо да су троуглови BDF и CAF слични, па је $\frac{AF}{BF} = \frac{AC}{BD}$. Комбиновањем претходне две једнакости добијамо $\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BD} = \frac{AE+EC}{BE+ED}$, одакле је $\frac{AE}{BE} = \frac{EC}{ED}$. Са друге стране, из сличности троуглова AED и BEC знамо да је $\frac{AE}{BE} = \frac{ED}{EC}$. Стога, користећи претходно, закључујемо да је $ED = EC$, те је и $AE = BE$ и $AB \parallel CD$, чиме је доказ завршен.

4. Прво, примећујемо да ако је $y < 0$ да је тада и $z < 0$. Међутим, отуда је $2025^y \in (0, 1)$ и $2026^z \in (0, 1)$, те је $x^{2024} = 2026^z - 2025^y \in (-1, 1)$. Како је $x \in \mathbb{Z}$, то мора бити $x = 0$. Тада остаје једначина $2025^y = 2026^z$, чије је $(0, 0)$ једино решење у скупу $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Дакле, $y \geq 0$ и $z \geq 0$.

Посматрајмо једначину по модулу 4. За $z \geq 2$ је $2026^z \equiv 0 \pmod{4}$, док је $2025^y \equiv 1^y \equiv 1 \pmod{4}$ и $x^{2024} \in \{0, 1\} \pmod{4}$ (квадрат целог броја). Према томе, лева страна даје остатак 1 или 2 при дељењу са 4, док је десна дељива са 4, за $z \geq 2$. Стога, $z = 0$ или $z = 1$.

Ако је $z = 0$, тада остаје $x^{2024} + 2025^y = 1$. Сада је јасно да је једино решење ове једначине пар $(x, y) = (0, 0)$. Са друге стране, ако је $z = 1$, тада остаје $x^{2024} + 2025^y = 2026$, те су једина решења ове једначине парови $(x, y) = \{(-1, 1), (1, 1)\}$.

Коначно, полазна једначина има три решења у скупу $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. То су тројке $(x, y, z) = \{(-1, 1, 1), (0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$.

5. Одговор је позитиван. Наиме, означимо боје бројевима $1, 2, \dots, 2025$. Довољно је обојити тачку $(0, k\sqrt{2})$ из те равни у боју k , $1 \leq k \leq 2024$, и све остале тачке равни у боју 2025. Вредност произвољног полинома са целобројним коефицијентима у нули је цео број (вредност је његов слободни члан), односно ниједна од боја $1, 2, \dots, 2024$ неће припасти нити једном графику полинома са целим коефицијентима, те ће сваки такав график бити у боји 2025.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28. фебруар 2026. године

Четврти разред - Б категорија

1. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Претпоставимо да за неке $a, b \in \mathbb{N}_0$ важи $1 + 2^a + 2025^b = (2n)^k$, где су $n, k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Како је $k > 1$, имамо $k \geq 2$, па је

$$(2n)^k = 2^k n^k \equiv 0 \pmod{4}.$$

Посебно, за $k \geq 3$ важи и

$$(2n)^k \equiv 0 \pmod{8},$$

јер је тада број 2^k дељив са 8. Са друге стране, пошто је $2025 \equiv 1 \pmod{8}$, следи

$$2025^b \equiv 1^b \equiv 1 \pmod{8}, \quad \text{за сваки } b \in \mathbb{N}_0.$$

Зато

$$1 + 2^a + 2025^b \equiv 1 + 2^a + 1 \equiv 2 + 2^a \pmod{8}.$$

Сада посматрамо могуће остатке броја 2^a по модулу 8:

$$2^a \equiv \begin{cases} 1, & \text{ако је } a = 0, \\ 2, & \text{ако је } a = 1, \\ 4, & \text{ако је } a = 2, \\ 0, & \text{ако је } a \geq 3. \end{cases}$$

Отуда, дналазимо да је

$$2 + 2^a \equiv \begin{cases} 3 & (a = 0), \\ 4 & (a = 1), \\ 6 & (a = 2), \\ 2 & (a \geq 3), \end{cases} \pmod{8},$$

те у сваком случају важи

$$2 + 2^a \not\equiv 0 \pmod{8}.$$

Дакле,

$$1 + 2^a + 2025^b \not\equiv 0 \pmod{8},$$

односно број $1 + 2^a + 2025^b$ није дељив са 8. То искључује могућност $k \geq 3$, јер би тада број $(2n)^k$ био дељив са 8, што је већ напоменуто. Дакле, мора важити $k = 2$.

За $k = 2$ проблем се своди на тражење бројева $a, b \in \mathbb{N}_0$ за које је $1 + 2^a + 2025^b = (2n)^2 = 4n^2$, за неко $n \in \mathbb{N}$. Посматрајмо ову једнакост по модулу 8, поново. Знамо да за сваки природан број n важи $4n^2 \equiv 0 \pmod{8}$ или $4n^2 \equiv 4 \pmod{8}$, јер је $n^2 \equiv 0 \pmod{2}$ или $n^2 \equiv 1 \pmod{2}$. Са друге стране, већ смо израчунали да је

$$1 + 2^a + 2025^b \equiv 2 + 2^a \pmod{8},$$

па мора важити

$$2 + 2^a \equiv 0 \pmod{8} \text{ или } 2 + 2^a \equiv 4 \pmod{8}.$$

Међутим, из горе наведених разматрања видимо да је једина могућност

$$2 + 2^a \equiv 4 \pmod{8},$$

која се добија само за $a = 1$. Дакле, $a = 1$, те је

$$1 + 2 + 2025^b = 3 + 2025^b = 4n^2,$$

односно $2025^b + 3 = 4n^2$. Коначно, ако је $b = 0$, тада је $2025^0 = 1$, одакле је $1 + 2^1 + 2025^0 = 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$, што јесте степен парног броја. Дакле, $(a, b) = (1, 0)$ је решење. Нека је сада $b \geq 1$. Како је 2025 дељиво са 5, важи $2025^b \equiv 0 \pmod{5}$, па из $2025^b + 3 = 4n^2$ добијамо $5 \mid 4n^2 - 3$. Међутим, квадрати природних (целих) бројева при дељењу са 5 дају само остатке из скупа $\{0, 1, 4\}$, одакле следи да ће број $4n^2 - 3$ давати остатке који припадају скупу $\{1, 2, 3\}$ при дељењу са 5. Стога, за $b \geq 1$ број $4n^2 - 3$ не може бити дељив са 5 ни за једно n .

Коначно, једино решење је пар $(a, b) = (1, 0)$.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Размотримо следеће случајеве:

1° $a = 0$: Како је 2025^b непаран број, следи да је

$$N = 1 + 2^a + 2025^b = 2 + 2025^b$$

непаран. Међутим, тражимо да N буде степен парног природног броја, па у овом случају нема решења.

2° $a \geq 2$: Тада је 2^a дељиво са 4, па је

$$N = 1 + 2^a + 2025^b \equiv 1 + 0 + 1^b \equiv 2 \pmod{4}.$$

Дакле, N је дељив са 2, али није дељив са 4. Сваки степен парног природног броја дељив је са 4, па N у овом случају не може бити тражени степен.

3° $a = 1$: Тада је $N = 3 + 2025^b$. Како је 2025 дељиво са 3, то за $b \geq 2$ добијамо да је 2025^b дељиво са 9, па је

$$N = 3 + 2025^b \equiv 3 \pmod{9}.$$

Дакле, N је дељив са 3, али није дељив са 9, па не може бити степен природног броја. Остaje испитати још само случајеве $b = 0$ и $b = 1$.

3.1° $b = 0$: Тада је $N = 3 + 1 = 4 = 2^2$, што јесте степен парног природног броја.

3.2° $b = 1$: Тада је $N = 3 + 2025 = 2028 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$, па тај број није степен неког природног броја.

Дакле, једино решење задатка је $(a, b) = (1, 0)$.

2. (ПРВО РЕШЕЊЕ) (а) Очигледно је да је домен дате функције скуп \mathbb{R} . Пођимо од основног тригонометријског идентитета: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Његовим квадрирањем добијамо

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x.$$

Слично, подизањем тог израза на трећи степен, добијамо

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^6 x &= 1 - 3 \sin^4 x \cos^2 x - 3 \sin^2 x \cos^4 x \\ &= 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x. \end{aligned}$$

Свеукупно, имамо

$$f_k(x) = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x + k(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x) = (1 + k) - (2k + 3) \sin^2 x \cos^2 x,$$

односно

$$f_k(x) = (1+k) - (2k+3)\frac{\sin^2 2x}{4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Сада је јасно да је домен функције цело \mathbb{R} . Приметимо да функција $x \mapsto \sin^2 2x$, $x \in \mathbb{R}$, узима све реалне вредности из сегмента $[0, 1]$.

(б) Потребан и довољан услов да би $f_k(x) \leq 0$, на целом домену, је да у тачкама у којима је $\sin^2 2x = 0$ и $\sin^2 2x = 1$ важи $f_k(x) \leq 0$ (једна од ове две вредности је максимум функције, што зависи од знака броја $2k+3$). У тачкама у којима је $\sin^2 2x = 0$ имамо $f_k(x) = 1+k$, што даје $k \leq -1$. Слично, заменом вредности $\sin^2 2x = 1$, добијамо $k \leq -\frac{1}{4}$. Дакле, одговор је $k \in (-\infty, -1]$.

(в) Функција је константна ако и само ако је $2k+3 = 0$, тј. $k = -\frac{3}{2}$. Како је константна на целом скупу \mathbb{R} , то у свакој тачки има исту вредност, па је $f_{-\frac{3}{2}}(2026) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$. (ДРУГО РЕШЕЊЕ) (а) Домен је цело \mathbb{R} . (б) Одредимо све k такве да је $f_k(x) \leq 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$. У том циљу, израчунаћемо извод функције $f_k(x)$ по променљивој x (сматрамо k реалним параметром):

$$\begin{aligned} f'_k(x) &= 6 \sin^5 x \cos x - 6 \cos^5 x \sin x + k(4 \sin^3 x \cos x - 4 \cos^3 x \sin x) \\ &= 2 \sin x \cos x \left(3 \sin^4 x - 3 \cos^4 x + 2k \sin^2 x - 2k \cos^2 x \right). \end{aligned}$$

Приметимо да важи

$$3 \sin^4 x - 3 \cos^4 x = 3(\sin^4 x - \cos^4 x) = 3(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 3(\sin^2 x - \cos^2 x),$$

те је

$$f'_k(x) = 2 \sin x \cos x \left(3(\sin^2 x - \cos^2 x) + 2k(\sin^2 x - \cos^2 x) \right) = 2(3+2k) \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x).$$

Дакле,

$$f'_k(x) = 0 \iff \sin x \cos x = 0 \quad \text{или} \quad \sin^2 x - \cos^2 x = 0 \quad (\text{за } k \neq -\frac{3}{2}), \quad \text{тј.}$$

$$\sin x \cos x = 0 \iff x = \frac{n\pi}{2}, \quad \sin^2 x = \cos^2 x \iff x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

На интервалу $(0, \pi)$ имамо следећу таблицу:

x	$(0, \frac{\pi}{4})$	$(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$	$(\frac{3\pi}{4}, \pi)$
$\sin x$	+	+	+	+
$\cos x$	+	+	-	-
$\sin^2 x - \cos^2 x$	-	+	+	-
$\sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x)$	-	+	-	+
$f'_k(x)$	$-\operatorname{sgn}(3+2k)$	$\operatorname{sgn}(3+2k)$	$-\operatorname{sgn}(3+2k)$	$\operatorname{sgn}(3+2k)$

Из таблице непосредно следи:

$$k > -\frac{3}{2} \implies \begin{cases} x = \frac{n\pi}{2} & \text{локални максимум,} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} & \text{локални минимум.} \end{cases}$$

$$k < -\frac{3}{2} \implies \begin{cases} x = \frac{n\pi}{2} & \text{локални минимум,} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} & \text{локални максимум.} \end{cases}$$

Израчунајмо вредности у тачкама локалних екстремума:

$$f_k\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 1 + k, \quad f_k\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}.$$

Ако је $k > -\frac{3}{2}$, максимум је у тачкама $x = \frac{n\pi}{2}$, па мора да важи $1 + k \leq 0 \iff k \leq -1$, одакле $k \in [-\frac{3}{2}, -1]$.

Ако је $k < -\frac{3}{2}$, максимум је у тачкама $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, па мора да важи $\frac{1}{4} + \frac{k}{2} \leq 0 \iff k \leq -\frac{1}{2}$, што је тачно за свако $k \leq -\frac{3}{2}$.

Ако је $k = -\frac{3}{2}$, тада је $f'_k(x) = 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$, па је функција константна на целом \mathbb{R} . Како је

$$f_{-3/2}(0) = \sin^6 0 + \cos^6 0 - \frac{3}{2}(\sin^4 0 + \cos^4 0) = 0 + 1 - \frac{3}{2}(0 + 1) = -\frac{1}{2},$$

то је на целом \mathbb{R} негативна, па важи услов.

Дакле, спајањем резултата добијамо $k \leq -1$.

(в) Одредимо све k за које је f_k константа на \mathbb{R} и за такво k одредимо $f_k(2026)$. Из претходног дела задатка имамо

$$f'_k(x) = 2(3 + 2k) \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

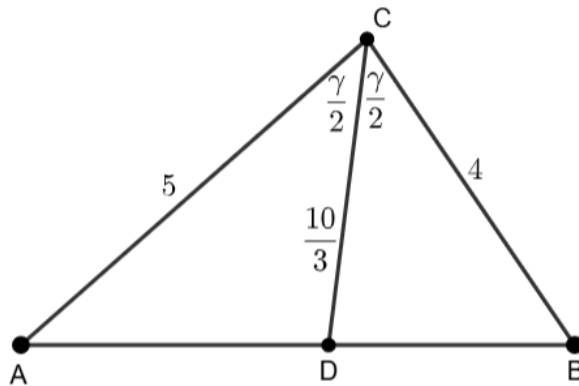
Приметимо да функција $\sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x)$ није идентички једнака нули, па да би $f'_k(x) \equiv 0$ морамо имати

$$3 + 2k = 0 \implies k = -\frac{3}{2}.$$

Како је $f_{-3/2}$ константна на целом скупу \mathbb{R} , то у свакој тачки има исту вредност, па је

$$f_{-3/2}(2026) = -\frac{1}{2}.$$

3. Означимо са D пресечну тачку дате симетрале угла и странице AB . Применом теореме о симетрали угла (или применом синусне теореме на троуглове ADC и CDB) добијамо $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{5}{4}$. Тада је $|AD| = 5k$, $|DB| = 4k$, за неко $k > 0$, $k \in \mathbb{R}$.



Даље, применом косинусне теореме на троуглове ADC и CDB добијамо:

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{5^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 - 25k^2}{2 \cdot 5 \cdot \frac{10}{3}} \quad \text{и} \quad \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{\left(\frac{10}{3}\right)^2 + 4^2 - 16k^2}{2 \cdot 4 \cdot \frac{10}{3}}.$$

Изједначавањем десних страна ових једнакости добијамо:

$$\frac{5^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 - 25k^2}{2 \cdot 5 \cdot \frac{10}{3}} = \frac{\left(\frac{10}{3}\right)^2 + 4^2 - 16k^2}{2 \cdot 4 \cdot \frac{10}{3}},$$

одакле, решавањем једначине по k , добијамо да је $k = \frac{2}{3}$, па је $|AB| = 9k = 6$.

Напомена. Задатак је аналогно могао да се заврши и применом косинусне теореме на троуглове ADC и CDB , али са угловима $\angle ADC$ и $\angle CDB$, користећи да важи $\cos \angle ADC = -\cos \angle CDB$, јер је реч о суплементним угловима.

4. Одговор је, наравно, позитиван. Наиме, означимо боје бројевима $1, 2, \dots, 2025, 2026$. Довољно је обојити тачку $(0, k\sqrt{2})$ те равни у боју k , $1 \leq k \leq 2025$, и све остале тачке равни у боју 2026 . Вредност произвољног полинома са целим коефицијентима у нули је цео број (слободни члан полинома), односно ниједна од боја $1, 2, \dots, 2025$ неће припасти нити једном графику полинома са целобројним коефицијентима, те ће сваки такав график бити у боји 2026 .

5. Нека су $\ln 2 = x$, $\ln 3 = y$, $\ln 5 = z$, где је $\ln x = \log_e x$, $x > 0$. Тада је

$$a = \frac{\ln 30}{\ln 6} = \frac{x + y + z}{x + y}, \quad b = \frac{\ln 24}{\ln 15} = \frac{3x + y}{y + z}.$$

Рачунањем и сређивањем добијамо:

$$\frac{2ab + 2a - 1}{ab + b + 1} = \frac{2x + y + z}{2x + y} = \frac{\ln 60}{\ln 12} = \log_{12} 60 = \log_m 3600.$$

Сада тривијално налазимо да је $m = 144$, јер је $3600 = 60^2$, па је

$$2m + n = 3888.$$