

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
31. јануар 2026.

Први разред - А категорија

1. Нека су a, b, c, d и e цели бројеви за које важи $a \neq b \neq c \neq d \neq e \neq a$. Одредити најмању могућу вредност израза $I = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$.
2. Нека су $a_1, a_2, \dots, a_n$ различити бројеви из скупа $\{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је
$$(a_1 - 1) + (a_2 - 2)^2 + \dots + (a_n - n)^n$$
увек паран број.
3. Две кружнице k_1 и k_2 , које се секу у две различите тачке, имају заједничку тетиву AB . Нека је тачка P изабрана на кружници k_1 и нека се налази у спољашности кружнице k_2 . Праве PA и PB секу по други пут кружницу k_2 , редом, у тачкама X и Y . Показати да је, без обзира на избор тачке P , дужина дужи XY константна.
4. Наћи све природне бројеве, који су степени броја 3 и који се у бази са основом 12 записују само уз помоћ цифара 6 и 9.
5. Бројеви 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 су подељени у три дисјунктна и непразна скупа. Нека су P_1 , P_2 и P_3 производи бројева у првом, другом и трећем скупу, редом, и нека је P највећи од та три броја. Одредити најмању могућу вредност броја P .

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

31. јануар 2026.

Други разред - А категорија

1. Дат је број $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[4]{2}$.

(а) Да ли је број α рационалан?

(б) Доказати да постоји неконстантан полином $P(x)$, са целим коефицијентима, такав да је $P(\alpha) = 0$.

2. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n за које је

$$\sin(n^\circ) = \sin(\sqrt{n}^\circ).$$

3. На шаховском турниру играју n играча, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Сваки такмичар игра са сваким такмичарем на турниру тачно по један пут. За сваку партију сваки такмичар добија 0 поена за сваки пораз, 0.5 поена за сваки реми и 1 поен за сваку победу. Одредити највећи могући број нерешених партија, тако да сваки такмичар има цео број поена.

4. Дат је троугао ABC чији је центар уписане кружнице тачка I . Та кружница додирује праве AB и AC у тачкама E и F , редом. Права EF сече праву BC у тачки H . Кружнице k_1 и k_2 пролазе кроз тачку H и додирују поменућу уписану кружницу у тачкама E и F , редом. Ако је O други пресек кружница k_1 и k_2 , доказати да је $\angle HOI = 90^\circ$.

5. На табли је написан број 2. Након сваког минута са табле се брише број x , који је у том тренутку написан на табли, и записује тачно један од бројева $x + 7$, x^{10} или $x + 1001$. Да ли је могуће да у неком тренутку на табли буде написан број:

(а) $2024^{2024} + 2025$?

(б) 2025?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

31. јануар 2026.

Трећи разред - А категорија

1. Нека је A квадратна матрица, са целим бројевима, димензија 2023×2023 . Доказати да је детерминанта матрице $A + 2024 \cdot A^T$ дељива са 2025, где је са A^T означена транспонована матрица матрице A .

2. Одредити све комплексне бројеве z , $z \neq 0$, такве да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\left| z^n + \frac{1}{z^n} \right| = \left| z + \frac{1}{z} \right|.$$

3. Решити једначину $10^x + 2^y = 5202^z$ у скупу природних бројева.

4. Дат је троугао ABC и произвољна тачка D на његовој описаној кружници, различита од темена тог троугла. Са M , N и P означимо, редом, средишта дужи AB , BC и CA , а са E означимо средиште дужи CD . Уколико је тачка F таква да је четвороугао $MDEF$ паралелограм, доказати да је четвороугао $MNPF$ тетиван.

5. Нека је дато k , $k \in \mathbb{N}$, не нужно различитих природних бројева $a_1, a_2, \dots, a_k$, који су већи од 1. Са n означимо производ $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k$. За свако $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ партиционисимо скуп $\{1, 2, \dots, n\}$ на a_i скупова једнаких величина (сви скупови који учествују у партиционисању су међусобно дисјунктни и сваки има по $\frac{n}{a_i}$ елемената). Доказати да је могуће извршити партиционисања тако да, како год одабрали по тачно један скуп из сваког од поменутих k партиционисања, постоји тачно један елемент који се налази у свим одабраним скуповима.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
31. јануар 2026.

Четврти разред - А категорија

1. На случајан начин се бирају три различита темена дате коцке. Колика је вероватноћа да изабрана темена представљају уједно и темена правоуглог троугла?

2. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви такви да важи $a + b + c = 1$. Наћи највећу могућу вредност израза

$$S(a, b, c) = a \log(1 + b) + b \log(1 + c) + c \log(1 + a).$$

3. Решити једначину $n! + n = n^m$ у скупу природних бројева.

4. Дат је троугао ABC са центром описане кружнице у тачки O . Тачка D , која припада правој BC , је таква да су тачке A , O и D колинеарне, а различите тачке E и F су одабране на правој BC тако да је $DE = DA = DF$. Ако је тачка G други пресек кружница описаних око троуглова ABE и ACF , а тачка H други пресек кружница описаних око троуглова ABF и ACE , доказати да је $GH \perp BC$.

5. Нека је $n \geq 2$ природан број. На кружници се налази n различитих тачака. Изломљена линија је *добра* уколико се састоји од $n - 1$ дужи и садржи сваку од n тачака на кружници, а не пресеца саму себе. У зависности од n , одредити број добрих изломљених линија.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
31. јануар 2026.

Први разред - Б категорија

1. Нека су a, b и c цели бројеви за које важи $a \neq b \neq c \neq a$. Одредити најмању могућу вредност израза $I = a^2 + b^2 + c^2$.
2. За функцију f дефинишимо $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$, за свако $n \in \mathbb{N}$, при чему је $f^1(x) = f(x)$. Ако је $f(x) = -\frac{4}{x+2}$, $x \neq -2$, одредити $f^{2025}(2025)$.
3. Да ли постоји цифра $a \in \{0, 1, \dots, 9\}$ тако да је број $\overline{2a0a2a5}$ барем други степен неког природног броја?
4. Доказати да права дели дати правоугаоник на два дела једнаких површина ако и само ако пролази кроз пресек дијагонала тог правоугаоника.
5. Нека су $a_1, a_2, \dots, a_{2025}$ различити бројеви из скупа $\{1, 2, \dots, 2025\}$. Доказати да је
$$(a_1 - 1)^2 + (a_2 - 2)^2 + \dots + (a_{2025} - 2025)^2$$
 увек паран број.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
31. јануар 2026.

Други разред - Б категорија

1. Одредити све вредности реалног параметра a за које једначина $(a-1)x^2 + ax + 2 = 0$ има оба решења у интервалу $(1,2)$.

2. У скупу комплексних бројева решити једначину

$$z^3 + |z|^2 + \operatorname{Re} z = 0.$$

3. Познато је да је $n! = 2432902008176640000$, за неко $n \in \mathbb{N}$. Одредити n .

4. Две кружнице k_1 и k_2 , које се секу у две различите тачке, имају заједничку тетиву AB . Нека је тачка P изабрана на кружници k_1 и нека се налази у спољашности кружнице k_2 . Праве PA и PB секу кружницу k_2 , редом, у тачкама X и Y . Ако је $AB = 6$, $PA = 5$, $PB = 7$ и $AX = 16$, одредити дужину дужи XY .

5. Да ли се бројеви $1, 2, 3, \dots, 9$ могу распоредити на кружници тако да међу збировима свака два суседна броја нема дељивих ни са 3, ни са 5, ни са 7?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
31. јануар 2026.

Трећи разред - Б категорија

1. Одредити минималну вредност функције f , где је

$$f(x) = (3 \sin x - 4 \cos x - 10)(3 \sin x + 4 \cos x - 10), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} x^{\ln y} + y^{\ln x} &= 2 \\ x^{\ln x} + y^{\ln y} &= e + 1, \end{aligned}$$

при чему је $x > 0$ и $y > 0$ ($\ln a = \log_e a$, $a > 0$).

3. Наћи све просте бројеве p , q и r такве да важи $p^2 + q^3 = r^4$.

4. Дат је правоугли троугао ABC са правим углом код темена C . Нека су $ABPQ$, $BCRS$ и $CATU$ квадрати конструисани над страницама датог троугла са његове спољашње стране. Ако је $PS = 58$, а $QT = 59$, израчунати дужину дужи AB .

5. На нека поља табле величине 88×88 постављени су жетони. Жетон се може уклонити са табле ако је најмање половина поља у његовој врсти или његовој колони празна. Колики је минималан (позитиван) број жетона потребан да буде на табли, тако да ниједан жетон не може бити уклоњен са табле?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
31. јануар 2026.

Четврти разред - Б категорија

1. Одредити једначину праве која садржи дату тачку $A(2, 1)$, која сече обе координатне осе са позитивне стране и са њима гради троугао најмање могуће површине.

2. Представити скупове A и B у комплексној равни, при чему је

$$A = \{z \mid z - \bar{z} + i = 0\} \text{ и } B = \{z \mid \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z-1}\right) = 1\}.$$

Одредити, затим, сва решења система једначина $z - \bar{z} + i = 0$ и $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z-1}\right) = 1$.

3. У скупу природних бројева решити једначину $n! + n = n^n$.

4. У разностраничном троуглу ABC симетрала унутрашњег угла код темена A сече страницу BC у тачки D . Ако симетрала дужи AD сече праву BC у тачки E , доказати да је права AE уједно и тангента на описану кружницу око троугла ABC .

5. На шаховском турниру играју n играча, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Сваки такмичар игра са сваким такмичарем на турниру тачно по један пут. За сваку партију сваки такмичар добија 0 поена за сваки пораз, 0.5 поена за сваки реми и 1 поен за сваку победу. Одредити највећи могући број нерешених партија, тако да сваки такмичар има цео број поена.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.