

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ
31. јануар 2026.

Први разред - А категорија

1. Уколико је $(a, b, c, d, e) = (1, 0, 1, 0, -1)$ тада је $I = 3$. Докажимо да је под наведеним условима увек $I \geq 3$. Претпоставимо супротно. Тада је $I \leq 2$, па су међу бројевима a, b, c, d и e бар три једнака нули (пошто је квадрат целог броја који је различит од нуле не мањи од 1). Сада због цикличности услова $a \neq b \neq c \neq d \neq e \neq a$, без умањења општости можемо претпоставити да је $a = 0$. Тада је $b \neq 0$ и $e \neq 0$, па како су бар три броја међу бројевима a, b, c, d и e једнака нули, мора бити $c = d = 0$. Контрадикција. Овим је доказано да је најмања вредност израза I једнака 3.

2. Нека су $a_1, a_2, \dots, a_n$ различити бројеви из скупа $\{1, 2, \dots, n\}$. Посматрајмо збир

$$S = (a_1 - 1) + (a_2 - 2)^2 + \dots + (a_n - n)^n = \sum_{i=1}^n (a_i - i)^i.$$

За сваки цео број x и сваки $i \geq 1$ важи

$$x^i \equiv x \pmod{2},$$

јер степен не мења парност датог броја. Отуда,

$$(a_i - i)^i \equiv a_i - i \pmod{2},$$

одакле следи

$$S \equiv \sum_{i=1}^n (a_i - i) \pmod{2}.$$

С обзиром да је $(a_1, \dots, a_n)$ пермутација скупа $\{1, \dots, n\}$, имамо

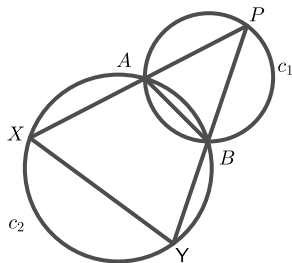
$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n i,$$

те је

$$\sum_{i=1}^n (a_i - i) = 0.$$

Дакле, S је паран број.

3. Приметимо да је тетива AB константне дужине, тј. не зависи од избора тачке P . На кружницама k_1 (на слици је означена са c_1) нека је $\angle APB = \alpha$, а на k_2 (на слици је означена са c_2) нека је $\angle AXB = \angle AYB = \beta$.



Такође, ови углови су константне величине јер је тетива AB константна. Отуда важи да је $\sphericalangle XBP = \sphericalangle PAY = \pi - (\alpha + \beta)$ па је $\sphericalangle XAY = \sphericalangle YBX = \alpha + \beta$. Како су ова два последња угла константне вредности, без обзира на позицију тачке P , тада је и дуж XU такође константне величине.

4. Одговор су бројеви 9_{12} и 69_{12} . Докажимо да су то једина решења. Нека је $x = \overline{c_n \dots c_3 c_2 c_1 c_0}$, $c_i \in \{6, 9\}$ решење. Број x мора бити непаран, па је $c_0 = 9$ и $x = 9 + c_1 \cdot 12^1 + \dots + c_n \cdot 12^n$. Ако је $c_1 = 9$ онда $9 \mid x$, али $27 \nmid x$, што је немогуће, па је $c_1 = 6$. Дакле, $x = 81 + c_2 \cdot 12^2 + \dots + c_n \cdot 12^n$. Ако је $c_2 = 6$, онда $27 \mid x$, али $81 \nmid x$ јер једино члан $12^2 \cdot 6$ није дељив са 81. Зато је $c_2 = 9$ и $x = 1377 + c_3 \cdot 12^3 + \dots + c_n \cdot 12^n$. Ако је $c_3 = 9$ онда $81 \mid x$, али $243 \nmid x$ јер једино број 1377 није дељив са 243. Закључујемо да је $c_3 = 6$. Коначно, сада је $x = 11745 + c_4 \cdot 12^4 + \dots + c_n \cdot 12^n$. Међутим сада опет $81 \mid x$, а $243 \nmid x$ јер $243 \nmid 11745$, чиме је доказ завршен.

5. Приметимо да је $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = 8! = 40320$. Даље, $40320 = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \leq P \cdot P \cdot P$, па је $P \geq 35$.

Размотримо случај $P = 35$. Како је $35 = 5 \cdot 7$, то се у једном скупу налазе само бројеви 5 и 7 (и евентуално 1). Како међу бројевима од 1 до 8 имамо тачно један број дељив са 5 и тачно један дељив са 7, то је у остала два скупа производ бројева мањи од 35. Такође, ни у једном скупу производ бројева не може да буде $34 = 2 \cdot 17$ јер $17 \notin \{1, 2, \dots, 8\}$. Из истог разлога ни у једном скупу производ бројева не може да буде $33 = 3 \cdot 11$, па је производ у сва три скупа не већи од $35 \cdot 32 \cdot 32 = 35840 \leq 40320$, па $P \neq 35$. Са друге стране, подела на скупове $\{1, 5, 7\}$, $\{2, 3, 6\}$ и $\{4, 8\}$ даје $P_1 = 35$, $P_2 = 36$ и $P_3 = 32$, односно $P = 36$, што је и решење задатка.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ
31. јануар 2026.

Други разред - А категорија

1. (а) Пребацивањем $\sqrt{2}$ на другу страну имамо $\alpha - \sqrt{2} = \sqrt[4]{2}$, па квадрирањем имамо $(\alpha - \sqrt{2})^2 = \sqrt{2}$, $\alpha^2 + 2 - 2\alpha\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$, $\sqrt{2} = \frac{\alpha^2+2}{1+2\alpha}$ ($1 + 2\alpha > 0$), лева страна је ирационална, а ако је α рационалан, десна страна је такође рационална, те долазимо до контрадикције. Дакле, α није рационалан.

(б) Од раније $\sqrt{2} = \frac{\alpha^2+2}{1+2\alpha}$, квадрирањем имамо $2 = \frac{(\alpha^2+2)^2}{(1+2\alpha)^2}$, $2(1+2\alpha)^2 = (\alpha^2+2)^2$, $(\alpha^2+2)^2 - 2(1+2\alpha)^2 = 0$, па полином $P(x) = (x^2+2)^2 - 2(1+2x)^2$ задовољава тражени услов.

Дакле, једино решење је $x = 1, y = 2, z = 1$.

2. Нека је $x = \sqrt{n}$ и $x^2 = x + 360k$, за $k \in \mathbb{N}$. Важи $\sin((x^2)^\circ) = \sin(x^\circ)$. Докажимо да се природан број x може изабрати на бесконачно много начина. Решавамо квадратну једначину $x^2 - x - 360k = 0$. За $x > 1$, решење је облика $x = \frac{1 + \sqrt{1 + 1440k}}{2}$.

Преостало је доказати да постоји бесконачно много квадрата природних бројева облика $1 + 1440k$. Напоменимо да ако је $1 + \sqrt{1 + 1440k}$ цео број, онда је и паран због непарности броја $1 + 1440k$. Записујемо $m^2 = 1 + 1440k \iff 1440k = (m-1)(m+1)$. Могуће је изабрати $m-1 = 1440t$ и $m+1 = 1440t+2$, за било које $t \in \mathbb{N}$.

3. За сваког такмичара, број поена је $\frac{1}{2}a + b$, где је a број нерешених партија које је играч одиграо, а b број победа, одатле следи да такмичар има цео број поена ако и само ако је број нерешених партија паран. Даље решење зависи од парности броја n , тј. броја играча.

1° n је непаран: Тада сваки играч игра укупно $n-1$ партија, а број $n-1$ је паран. Зато је могуће да све партије на турниру буду нерешене. У том случају, сваки играч има паран број ремија, па самим тим и цео број поена. Како нема више партија од $\frac{n(n-1)}{2}$, што је укупан број партија на турниру, овај број, тј. $\frac{n(n-1)}{2}$, представља највећи могући број нерешених партија у овом случају.

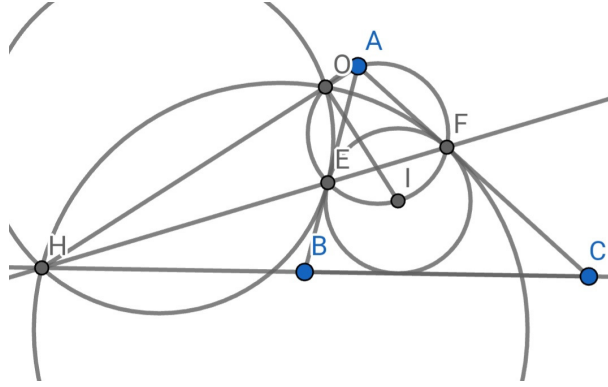
2° n је паран: Аналогно, сваки играч игра тачно $n-1$ партија, што је непаран број. Стога, играч не може имати све партије нерешене, јер би тада имао непаран број ремија. Са друге стране, највећи паран број који је мањи од $n-1$ јесте $n-2$, те сваки играч може имати највише $n-2$ нерешене партије.

Ово се може остварити тако што, на пример, играче упаримо:

$$(1, 2), (3, 4), \dots, (n-1, n),$$

и нека у сваком од ових парова партија буде одлучена (није нерешено), док су све остале партије нерешене. Тада сваки играч има тачно једну одлучену партију (победа или пораз) и $n-2$ нерешене партије, што је паран број, те сви играчи имају цео број поена. Дакле, у овом случају добијамо да је $\frac{n(n-2)}{2}$ највећи могући број нерешених партија.

4. Пошто се k_1 и уписани круг додирују у тачки E то је права AB тангента на круг k_1 . Слично, права AC је тангента на круг k_2 . Тачка A има једнаке потенције у односу на кругове k_1 и k_2 и оне износе $AE^2 = AF^2$.



Зато се A налази на радикалној оси ових кругова, односно на правој HO . Остаје да докажемо да је $\angle AOI = 90$. Како је $\angle AEO = \angle OHE = \angle OHF = \angle AFO$ (тангентни и периферијски углови) четвороугао $OAFE$ је тетиван. Пречник његовог описаног круга је AI , те је $\angle AOI = 90$ чиме је доказ завршен.

5. (а) Приметимо да се након сваког потеза, остатак броја на табли при дељењу са 7 не мења. Заиста, $x + 7 \equiv x \pmod{7}$, $x + 1001 \equiv x \pmod{7}$ и $2^{10} = 1024 \equiv 2 \pmod{7}$. Са друге стране, $2024^{2024} + 2025 \equiv 1^{2024} + 2 \equiv 3 \pmod{7}$, те је одговор не.
- (б) Да! На пример, након прве минуте уместо броја 2 запишемо $2^{10} = 1024$, те након друге минуте записујемо $1024 + 1001 = 2025$.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ
31. јануар 2026.

Трећи разред - А категорија

1. Нека је $B = A + 2024A^T$, $B = [b_{ij}]_{2023 \times 2023}$, $B^T = [b_{ij}^t]_{2023 \times 2023}$. Тада је $B + B^T = 2025(A + A^T)$, одакле добијамо да је $b_{ij} \equiv -b_{ij}^t \pmod{2025}$, $i, j = 1, 2, \dots, 2023$. На основу особина детерминанти, ако посматрамо све елементе матрица по модулу 2025, следи да је $\det B = \det(-I) \det(B^T) = (-1)^{2023} \det B = -\det B$, односно да је $2 \det B \equiv 0 \pmod{2025}$. Дакле, $\det B$ је дељиво са 2025.

2. Доказаћемо да су бројеви $z = \pm 1$ једина решења. Посматрајмо најпре бројеве са наведеном особином код којих је $|z| > 1$. Из неједнакости троугла имамо

$$|z|^n + \frac{1}{|z|^n} \geq |z^n + \frac{1}{z^n}| = |z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}| \geq |z|^{n+1} - \frac{1}{|z|^{n+1}},$$

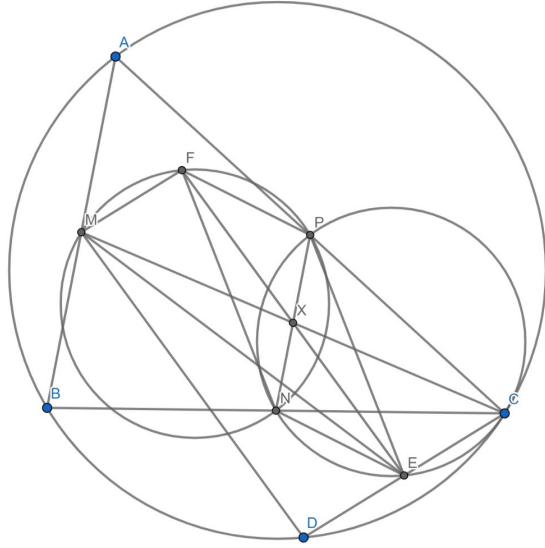
одакле због $|z| > 1$ важи $|z|^{n+1} \leq |z|^n + \frac{1}{|z|^n} + \frac{1}{|z|^{n+1}} < |z|^n + 2$. Дакле, за сваки природан број n важи

$$|z|^n < \frac{2}{|z| - 1}. \quad (1)$$

Како је $|z| > 1$, то величина $|z|^n$, када n пролази скупом природних бројева није одозго ограничена, што је у супротности са (1). Овим смо добили да не постоје бројеви z са наведеном особином код којих је $|z| > 1$. Приметимо да је неки број z решење задатка акко је $\frac{1}{z}$ решење задатка. Зато ако би неки број z за који је $|z| < 1$ био решење задатка, онда би и број $\frac{1}{z}$ био решење и за њега би важило $|\frac{1}{z}| > 1$. Међутим, како смо већ доказали да нема решења међу бројевима којима је модуо већи од 1, одавде закључујемо да нема решења ни међу бројевима којима је модуо мањи од 1. Размотримо још случај $|z| = 1$. Тада је $\bar{z} = \frac{|z|^2}{z} = \frac{1}{z}$, те је $|z^n + \frac{1}{z^n}| = |z^n + \bar{z}^n| = 2|\operatorname{Re}(z^n)|$. Нека је $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, при чему је $a^2 + b^2 = 1$. Сада из једнакости $|z + \frac{1}{z}| = |z^2 + \frac{1}{z^2}| = |z^3 + \frac{1}{z^3}|$ лако добијамо да је $|a| = |2a^2 - 1| = |4a^3 - 3a|$. Решавањем последњег система налазимо да је $a = \pm 1$, чиме је $b = 0$, односно $z = \pm 1$. Бројеви $z = \pm 1$ очигледно јесу решења задатка, а из свега наведеног закључујемо и да су једина.

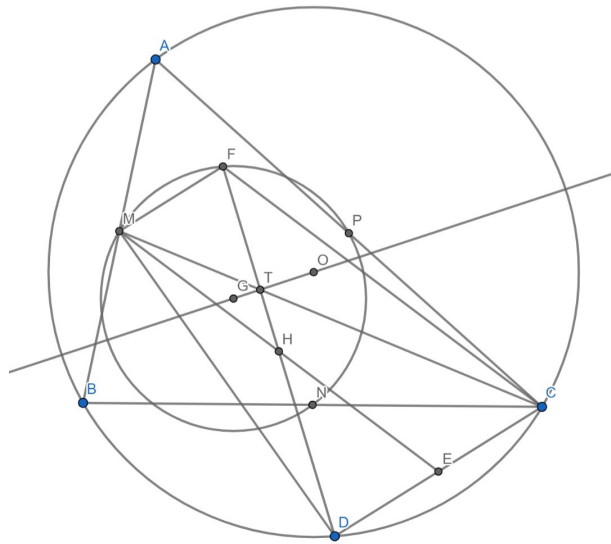
3. По модулу 9 имамо $1 + 2^y \equiv 0 \pmod{9}$, $2^y \equiv 8 \pmod{9}$. Степен броја 2 при дељењу са 9 даје остатке, периодично, 2, 4, 8, 7, 5, 1, па 3 дели y . По модулу 7 имамо да је $5202 \equiv 1 \pmod{7}$, $10^x + 1 \equiv 1 \pmod{7}$, те добијамо да 7 дели 10^x , што је контрадикција.

4. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Приметимо да је и четвороугао $MECF$ паралелограм, и пресек његових дијагонала обележимо са X . Како је MN и MP средње линије троугла $\triangle ABC$, знамо да је и четвороугао $MNCP$ паралелограм, односно X је такође средиште и дужи NP . Сада знамо да је и четвороугао $NEPF$ паралелограм.



Да бисмо доказали тврђење задатка довољно је да докажемо да је $\angle NMP = \angle NFP$, односно да је $\angle NEP = \angle NCP$. Последња једнакост важи јер је четвороугао $CPEN$ тетиван, са описаним кругом који је хомотетичан са описаним кругом троугла $\triangle ABC$ кроз C са коефицијентом $\frac{1}{2}$ (E, N и P су редом средишта дужи CD, CB и CA). Овиме је тврђење задатка доказано.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Са H обележимо пресек дијагонала паралелограма $MDEF$. Знамо да права DF пролази кроз средиште тежишне дужи троугла $\triangle MDC$, па зато сече његову страну MC у тачки T таквој да је $CT : MT = 2 : 1$. Дакле, тачка T је тежиште троугла $\triangle ABC$.



Даље, из сличности троуглова $\triangle FMT$ и $\triangle DCT$ добијамо да је $DT : FT = 2 : 1$, односно тачка F је слика тачке D при хомотетији са центром у T и коефицијентом $-\frac{1}{2}$. Како је познато да ова хомотетија слика описани круг троугла у његов Ојлеров круг, F се налази на Ојлеровом кругу троугла $\triangle ABC$ чиме смо доказали тврђење задатка.

5. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Конструисаћемо тражена партиционисања индукцијом по k . У случају базе ($k = 1$), имамо a_1 једночланих скупова, па који год изабрали, постојаће тачно 1 елемент у њему. Претпоставимо сада да постоје тражена партиционисања за неко $k \in \mathbb{N}$. Ако је $n_0 = a_1 a_2 \dots a_k$, тада је $n = n_0 a_{k+1}$. Да бисмо од старих партиционисања направили нова, у сваки од претходно конструисаних скупова треба да додамо још по $a_{k+1} - 1$ елемената, и треба да одрадимо још једно партиционисање на a_{k+1} скупова. То ћемо једноставно урадити: у сваки од претходних скупова ћемо свуда где се налазио неки елемент између 1 и n_0 додати све елементе који су са њим једнаки по модулу n_0 , а у новом партиционисању ћемо скуп $\{1, 2, \dots, n\}$ поделити на скупове облика $\{m \cdot n_0 + 1, m \cdot n_0 + 2, \dots, (m+1) \cdot n_0\}$ за $m = \overline{0, a_{k+1} - 1}$. Сада, за било којих одабраних k скупова из првих k партиционисања, због индукцијске хипотезе и наше конструкције имамо тачно одређену вредност по модулу n_0 коју узимају сви елементи у њиховом пресеку, а када додамо и последњи скуп, пресек постаје једночлан, јер у сваком од скупова из новог партиционисања имамо по тачно један елемент који даје сваки остатак по модулу n_0 . Тиме је доказ завршен.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Уочимо n k -торки природних бројева, где i -ти елемент k -торке узима вредности из скупа $\{1, 2, \dots, a_i\}$ за свако $i = \overline{1, k}$. Приметимо да елемената са фиксном i -том координатом има $\frac{n}{a_i}$, за свако $i = \overline{1, k}$, те можемо ове k -торке делити у скупове по њиховим координатама. Дакле, у i -том партиционисању j -ти скуп ће садржати све k -торке које на i -тој позицији имају број j , за све $i = \overline{1, k}$ и $j = \overline{1, a_i}$. Сада, за сваки одабир скупова, знамо тачно које координате мора имати k -торка у пресеку свих тих скупова, па је по конструкцији јасно да постоји тачно једна таква k -торка за сваки одабир скупова. Како је k -торки n , сваком броју ћемо доделити по тачно једну k -торку, и уместо k -торки ћемо посматрати бројеве. Овиме је тврђење задатка доказано.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ
31. јануар 2026.
Четврти разред - А категорија

1. Укупно има $\binom{8}{3} = 56$ начина да се изаберу три различита темена коцке.

Покажећемо да су сви тако добијени троуглови правоугли, осим оних који су сачињени од три дијагонале страна коцке.

Заиста, нека су изабрана три различита темена A, B, C дате коцке. Посматрајмо троугао ABC .

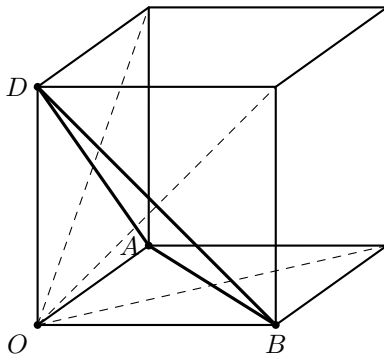
Ако је једна од дужи AB, BC, CA ивица коцке, рецимо да је то дуж AB , тада су тачке A и B суседна темена коцке. Треће теме C се налази у једној од страна коцке које садрже ивицу AB , или у некој од преосталих страна које са њом немају заједничку ивицу.

У оба случаја, једна од дужи AC или BC лежи у правцу ивице коцке која је нормална на ивицу AB . Пошто су све ивице коцке које излазе из истог темена међусобно нормалне, следи да је један од углова троугла ABC прав.

Према томе, ако троугао ABC има бар једну страну која је ивица коцке, онда је тај троугао правоугли.

Једини преостали случај је када ниједна од дужи AB, BC, CA није ивица, тј. када су све три дужи дијагонале неких страна. То се дешава управо када су A, B, C три темена суседна неком темену коцке. Тада су AB, BC, CA три дијагонале трију страна које се секу у поменутом темену коцке, те добијени троугао није правоугли (он је једнакостраничан). Стога, за свако теме коцке постоји тачно један такав троугао, па их има тачно 8. Дакле, неповољних избора је 8, па је тражена вероватноћа

$$P = 1 - \frac{8}{\binom{8}{3}} = 1 - \frac{8}{56} = \frac{6}{7}.$$



2. (ПРВО РЕШЕЊЕ:) Почетни израз можемо написати у облику

$$a \log(1+b) + b \log(1+c) + c \log(1+a) = \log((1+b)^a (1+c)^b (1+a)^c).$$

Како је функција $f(x) = \log x$ растућа, довољно је наћи највећу могућу вредност израза унутар логаритма. Применимо на тај израз тежинску аритметичко-геометријску неједнакост:

$$(1+b)^a (1+c)^b (1+a)^c \leq \frac{a(1+b) + b(1+c) + c(1+a)}{a+b+c} = 1 + ab + bc + ca.$$

Највећа могућа вредност израза $ab + bc + ca$ је $\frac{1}{3}$. Заиста,

$$\begin{aligned} 1 &= (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca + 3(ab + bc + ca) \\ &= \frac{1}{2}((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2) + 3(ab + bc + ca) \geq 3(ab + bc + ca). \end{aligned}$$

Одавде добијамо

$$S(a, b, c) \leq \log(1 + ab + bc + ca) \leq \log\left(\frac{4}{3}\right),$$

при чему се обе неједнакости постижу управо када је $a = b = c = \frac{1}{3}$. Дакле, највећа могућа вредност израза је

$$\log\left(\frac{4}{3}\right).$$

(ДРУГО РЕШЕЊЕ:) Приметимо да је функција $f(x) = \log(1+x)$ конкавна на интервалу дефинисаности, тј. за $x \in (-1, +\infty)$. Пошто је $a+b+c = 1$, можемо применити Јенсенову неједнакост на почетни израз (за случај конкавне функције):

$$S(a, b, c) = af(b) + bf(c) + cf(a) \leq f(ab + bc + ca) = \log(1 + ab + bc + ca).$$

Једнакост се постиже за $a = b = c$, те је наставак исти као и у првом решењу.

3. Из неједнакости $n^m = n! + n \geq 1 + 1 = 2$ закључујемо да је $n \geq 2$.

Дељењем обе стране са n , добијамо $(n-1)! + 1 = n^{m-1}$, па како је $n^{m-1} > 1$, то је $m \geq 2$. Из овог записа видимо да $n \nmid (n-1)!$, па ако би n био облика $n = ab$, за неке $a \neq b$, при чему су оба већа од 1 и мања од n , имали бисмо $ab \mid (n-1)!$, што је контрадикција, па $n = a^2$ или је n прост број.

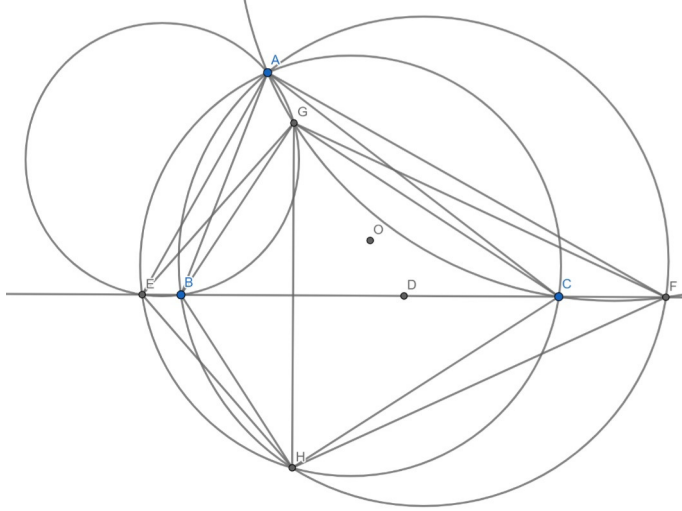
1° Нека је $n = a^2$: Имамо $a \mid n^{m-1}$ и $a \mid (n-1)!$, па $a \mid 1$, тј. $a = 1$ и $n = 1$. Међутим, показали смо да мора да важи $n \geq 2$, па у овом случају нема решења.

2° Нека је n прост број: За $n = 2$ добијамо $m = 2$, за $n = 3$ имамо $m = 2$, док за $n = 5$ добијамо $m = 3$.

Нека је сада $n \geq 7$ прост број. Тада је $(n-1)! = 2 \cdot 3 \cdots (n-1) < n^{n-2}$, па $(n-1)! + 1 \leq n^{n-2}$. Како важи и $n^{m-1} \leq n^{n-2}$, то је $m < n$. Како је $n \geq 7$, то је $2 < \frac{n-1}{2} < n-1$, па $(n-1)^2 \mid (n-1)!$. Сада $(n-1)^2 \mid n^{m-1} - 1$, тј. $(n-1)^2 \mid ((n-1) + 1)^{m-1} - 1$. Из биномне формуле одавде следи $(n-1)^2 \mid (m-1)(n-1)$, тј. $n-1 \mid m-1$. Међутим, како смо већ показали да важи $n > m \geq 2$, закључујемо да је немогуће да важи $n-1 \mid m-1$.

Дакле, задатак има три решења: $(m, n) \in \{(2, 2), (2, 3), (3, 5)\}$.

4. Доказаћемо да је тачка H заправо тачка G пресликана преко праве BC , одакле директно следи тврђење задатка. Израчунајмо прво пар углова. Знамо да је $\sphericalangle AGB = 180^\circ - \sphericalangle AEB$, као и $\sphericalangle AGC = 180^\circ - \sphericalangle AFC$, па како је $\sphericalangle EAF = 90^\circ$ (тачка A је на кругу са пречником EF), лако добијамо да је и $\sphericalangle BGC = 90^\circ$.



Из тетивности четвороугла $AEBG$ добијамо $\angle EGB = \angle EAB = \angle EAD - \angle BAD = (90^\circ - \frac{\angle ADB}{2}) - (90^\circ - \frac{\angle AOE}{2}) = \frac{\angle AOB - \angle ADB}{2} = \frac{\angle OBC}{2} = \theta$. Слично добијамо и $\angle CGF = \angle CAF = \frac{\angle OCB}{2} = \theta$. Обележимо сада са H' тачку добијену пресликавањем тачке G преко BC . Знамо да је $\angle BH'F = \angle BGF = \angle BGC + \angle CGF = 90^\circ + \theta$, док је с друге стране $\angle BAF = \angle EAF - \angle EAB = 90^\circ - \theta$. Дакле, $\angle BAF + \angle BH'F = 180^\circ$, па је четвороугао $ABH'F$ тетиван. Слично је и четвороугао $AEH'C$ тетиван, па је $H \equiv H'$, чиме смо доказали тврђење задатка.

5. Фиксирајмо почетак изломљене линије (постоји n начина да то урадимо). Исту ћемо правити итеративно почев од датог почетка. У сваком од наредних $n - 2$ корака потребно је спојити тренутни крај изломљене линије са новом тачком преко дужи. Кандидати за нови крај су две суседне тачке од крајева скупа тачака које смо до сада обишли. Напомињемо да је тај скуп повезан. Уколико тај скуп није повезан, односно нису сви његови елементи суседни, онда наш процес мора направити изломљену линију која сече саму себе. У последњем $n - 1$ -ом кораку, спајамо тренутни крај са једином преосталом тачком. Број начина да извршимо поменути процес је $n \cdot 2^{n-2}$. Приметимо да одређена линија не разликује свој почетак и последњи крај, те смо сваку избројали двапут. Коначан резултат је $n \cdot 2^{n-3}$.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ
31. јануар 2026.

Први разред - Б категорија

1. Узмимо $(a, b, c) = (-1, 0, 1)$. Тада је

$$I = a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 0 + 1 = 2.$$

Докажимо да је увек $I \geq 2$. Пошто су a, b, c различити цели бројеви, највише један од њих може бити нула. Према томе, бар два од бројева a, b, c су ненула, те су њихови квадрати најмање 1. Отуда

$$I = a^2 + b^2 + c^2 \geq 1 + 1 = 2.$$

Дакле, најмања могућа вредност је $\boxed{2}$, и постиже се за $(a, b, c) = (-1, 0, 1)$ (и за било коју његову пермутацију).

2. Кренимо са прерачунавањем самих композиција да бисмо уочили правило. Имамо: $f^2(x) = \frac{-2x-4}{x}$. Једноставно се добија

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = x.$$

Сада је $f^4(x) = f(f^3(x)) = f(x)$, што имплицира следеће: $f^5(x) = f^2(x), f^6(x) = f^3(x), f^7(x) = f(x), \dots$

Како је 2025 дељиво са 3, следи да је

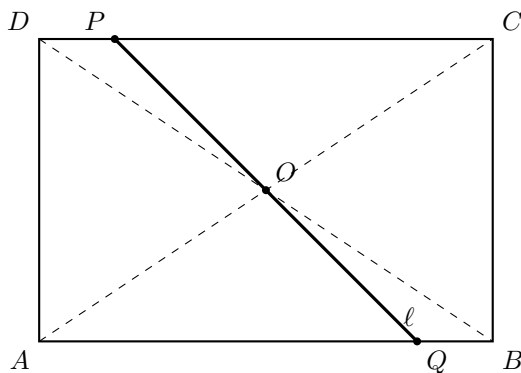
$$f^{2025}(2025) = f^3(2025) = 2025.$$

3. Видимо да 5 дели дати број, те 25 дели могући степен, па $25 | \overline{a5}$, па је $a \in \{2, 7\}$. Следи, ако је у питању барем трећи степен, 125 ће делити дати број, тј. $125 | \overline{2a5}$, те a не може бити нити један од претходних. Стога, тражени број може бити само потпун квадрат, те ће дати остатак 0 или 1 при дељењу са 4. Следи, $a = 7$ не испуњава услов (75 не даје остатак 0 или 1 при дељењу са 4), те може бити само $a = 2$. Испитујемо да ли је број 2202225 квадрат неког природног броја. Збир цифара му је 15, што значи да је дељив са 3, али не и са 9. Дакле, не постоји таква цифра a .

4. Нека је $ABCD$ дати правоугаоник и нека је O пресек његових дијагонала. Означимо са ℓ дату праву. С обзиром да се у формулацији задатка јасно истичу речи - ако и само ако, решење спроводимо у два смера.

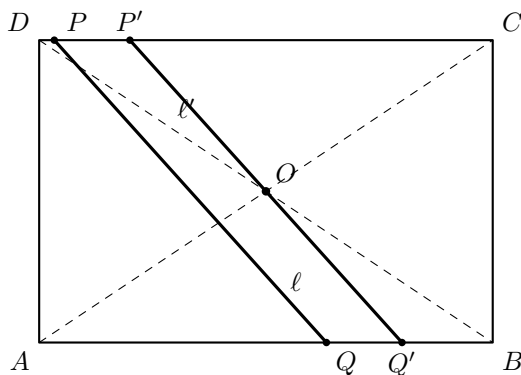
($\Leftarrow$) Претпоставимо да права ℓ пролази кроз тачку O и, без ограничења општости, претпоставимо да сече ивице правоугаоника у тачкама P и Q , које су различите од темена датог правоугаоника (видети слику). У осталим случајевима, тј. уколико права ℓ , која садржи тачку O , заузме неки други положај, тврђење у овом смеру постаје тривијално.

Јасно је да су троуглови BOQ и DOP подударни, јер је $BO = DO$, $\angle BOQ = \angle DOP$ (унакрсни), $\angle QBO = \angle PDO$ (наизменични), одакле закључујемо да су дужи BQ и DP подударне, а самим тим и AQ и CP . Стога, трапези $AQPD$ и $CPQB$ су подударни, те имају једнаке површине. Напоменимо да бисмо исти закључак добили да смо оба трапеза поделили одговарајућим нормалама из тачака P и Q на праве AB и CD , редом, на по један троугао и правоугаоник, који су подударни (троугао настао деобом



првог трапеца са одговарајућим троуглом другог трапеца, односно, правоугаоник настао деобом првог трапеца са одговарајућим правоугаоником који настаје деобом другог трапеца).

($\Rightarrow$) Нека сада права ℓ дели правоугаоник на два дела једнаких површина. Претпоставимо супротно, тј. да права ℓ не пролази кроз тачку O . Означимо са ℓ' праву која садржи тачку O и паралелна је са правом ℓ (видети слику испод). Праве ℓ и ℓ' су различите, јер ℓ не садржи тачку O , па је део праве ℓ , тј. отворена дуж PQ , унутар једног од трапеца $AQ'P'D$ или $CP'Q'B$. На основу првог дела решења (први смер), права ℓ' дели полазни правоугаоник на два дела једнаких површина. Међутим, и права ℓ има то својство, одакле ће следити да фигура која припада појасу између две паралелне праве ℓ и ℓ' и која се налази унутар правоугаоника $ABCD$, што може бити паралелограм $QQ'P'P$ или петоугао $QQ'P'DP$ (ово ће се десити када P припада отвореној дужи AD) има површину једнаку нула, што је немогуће. Дакле, супротна претпоставка доводи до контрадикције, одакле закључујемо да права ℓ садржи тачку O .



5. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Бројеви $(a_i - i)^2$ су исте парности као и $a_i - i$, за свако $1 \leq i \leq 2025$. Како је збир свих ових других бројева нула (паран), јер је

$$S = (a_1 - 1) + (a_2 - 2) + \cdots + (a_{2025} - 2025) = \sum_{i=1}^{2025} (a_i - i) = \sum_{i=1}^{2025} a_i - \sum_{i=1}^{2025} i = 0,$$

то је полазни израз паран број.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Из једнакости

$$(a_1 - 1)^2 + (a_2 - 2)^2 + \cdots + (a_{2025} - 2025)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{2025} a_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{2025} i a_i + \sum_{i=1}^{2025} i^2 = 2 \left(\sum_{i=1}^{2025} i^2 - \sum_{i=1}^{2025} i a_i \right),$$

јер је $(a_1, a_2, \dots, a_{2025})$ пермутација од $(1, 2, \dots, 2025)$, добијамо да је полазни број паран.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ
31. јануар 2026.

Други разред - Б категорија

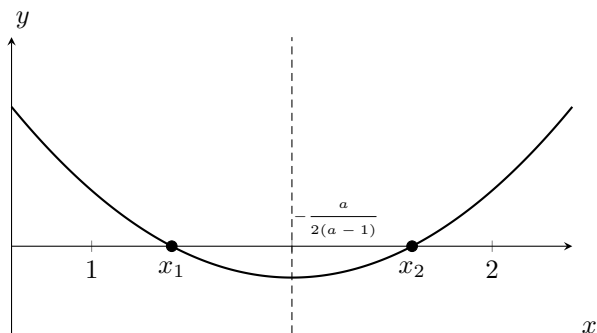
1. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Разликоваћемо три случаја:

1° Нека је $a = 1$. Тада једначина није квадратна, тј. постаје линеарна, те не може имати два решења (за оне који то не примете, случај би свакако отпао, јер у истом је решење $x = -2 \notin (1, 2)$).

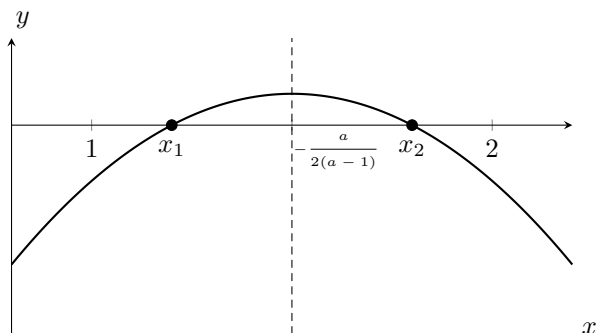
Нека је $a \neq 1$. У даљем подразумевамо да у случају квадратне једначине, уколико је дискриминанта исте једнака нула, да она има два реална решења, која су једнака. Разматрамо квадратну функцију

$$f(x) = (a-1)x^2 + ax + 2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a \neq 1.$$

Да би полазна једначина имала два реална решења мора бити $D \geq 0$, где је $D = a^2 - 8(a-1) = a^2 - 8a + 8$ дискриминанта те једначине. Дакле, услови задатка, за сада, су $D \geq 0$ и $a \neq 1 \iff a^2 - 8a + 8 \geq 0$ и $a \neq 1 \iff (a \leq 4 - 2\sqrt{2} \text{ или } a \geq 4 + 2\sqrt{2})$ и $a \neq 1$.



2° Нека је сада $a > 1$. Да би у овом случају једначина имала оба решења у интервалу $(1, 2)$ мора бити $f(1) > 0$, $f(2) > 0$, $1 < -\frac{a}{2(a-1)} < 2$ (x координата темена параболе мора припадати интервалу $(1, 2)$) и $f(-\frac{a}{2(a-1)}) \leq 0$, тј. $a > -\frac{1}{2}$, $a > \frac{1}{3}$, $a \in \emptyset$ и $-\frac{D}{4(a-1)} \leq 0$, тј. $a \in \emptyset$, јер неједначина $1 < -\frac{a}{2(a-1)} < 2$ нема решења за $a > 1$.



3° Нека је сада $a < 1$. Да би у овом случају једначина имала оба решења у интервалу $(1, 2)$ мора бити $f(1) < 0$, $f(2) < 0$, $1 < -\frac{a}{2(a-1)} < 2$ и $f(-\frac{a}{2(a-1)}) \geq 0$, тј. $a < -\frac{1}{2}$, $a < \frac{1}{3}$, $a \in (\frac{2}{3}, \frac{4}{5})$ и $-\frac{D}{4(a-1)} \geq 0$, односно, $a < -\frac{1}{2}$, $a < \frac{1}{3}$, $a \in (\frac{2}{3}, \frac{4}{5})$ и $a < 1$, тј. $a \in \emptyset$.

Коначно, полазна једначина ни за једно реално a неће имати два реална решења у интервалу $(1, 2)$ (укључујући она, дупла, која су једнака).

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Ако је $a = 1$, једначина има једно решење $x = -2$. У супротном, за нуле квадратне функције $f(x) = (a-1)x^2 + ax + 2$, на основу Вијетових формула, важи

$$x_1 x_2 = \frac{2}{2(a-1)}.$$

Како је услов задатка да обе нуле припадају интервалу $(1, 2)$, то је њихов производ позитиван број, па $a > 1$ (заправо, неопходно је да производ припада интервалу $(1, 4)$, одакле добијамо јачу оцену: $a \in (\frac{5}{4}, 2)$, што ће се испоставити да није неопходно у овом задатку).

Јасно је да x -координата темена квадратне функције f мора припадати интервалу $(1, 2)$. Стога, једноставно добијамо да је x -координата темена квадратне функције f једнака $x_T = -\frac{a}{2(a-1)}$. Како је $a > 1$, то је $x_T < 0$. Контрадикција!

Дакле, ниједан реалан број a не испуњава услове задатка.

2. Стандардно, ставимо да је $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Заменом у полазну једначину и груписањем сабирака добијамо

$$\begin{aligned}(x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3) + (x^2 + y^2) + x &= 0 \\ (x^3 - 3xy^2 + x^2 + y^2 + x) + (3x^2y - y^3)i &= 0,\end{aligned}$$

одакле је $x^3 - 3xy^2 + x^2 + y^2 + x = 0$ и $3x^2y - y^3 = 0$. Друга једначина је еквивалентна са $y(3x^2 - y^2) = 0$, односно $y = 0$ или $y^2 = 3x^2$. У првом случају, заменом у једначину реалног дела добијамо $0 = x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1)$, одакле је $x = 0$ или $x^2 + x + 1 = 0$. Но, последња једначина нема реалних решења, па остаје једино $x = 0$. У другом случају, заменом у једначину реалног дела налазимо $0 = x^3 - 9x^3 + x^2 + 3x^2 + x = -8x^3 + 4x^2 + x$, одакле је $x = 0$ (и $y = 0$) или $8x^2 - 4x - 1 = 0$. Решења последње квадратне једначине су $x = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$ и $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$. Коначно, услов $y^2 = 3x^2$ нам даје $y = \pm x\sqrt{3} = \pm \frac{1\pm\sqrt{3}}{4}\sqrt{3} = \frac{\pm 3\pm\sqrt{3}}{4}$. Дакле, сва решења једначине су дата паровима:

$$\begin{aligned}(x, y) \in \{ & (0, 0), (\frac{1+\sqrt{3}}{4}, \frac{3+\sqrt{3}}{4}), (\frac{1+\sqrt{3}}{4}, -\frac{3+\sqrt{3}}{4}), \\ & (\frac{1-\sqrt{3}}{4}, \frac{3-\sqrt{3}}{4}), (\frac{1-\sqrt{3}}{4}, -\frac{3-\sqrt{3}}{4}) \}.\end{aligned}$$

3. Ако би важило $n \geq 25$, тада би $5^5 \mid n!$ и $2^5 \mid n!$, па би се број завшавао са бар 5 нула, што није случај. Са друге стране, за $n < 20$ имамо $5^4 \nmid n!$, што такође није случај. Дакле, $20 \leq n < 25$.

Приметимо да $n!$ можемо записати као

$$n! = x \cdot \prod_{0 \leq i \leq 3} (5i+1)(5i+2)(5i+3)(5i+4)(5i+5),$$

где је $x = \frac{n!}{20!}$ природан број. Даље, $n! = x \cdot 5^4(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot \prod_{0 \leq i \leq 3} (5i+1)(5i+2)(5i+3)(5i+4)$.

По модулу 5^6 имамо да је $2432902008176640000 \equiv 640000 \pmod{5^6}$, те је

$$640000 \equiv 5^4 \cdot 24 \cdot x \cdot \prod_{0 \leq i \leq 3} (5i+1)(5i+2)(5i+3)(5i+4) \pmod{5^6}.$$

Како је $640000 = 64 \cdot 10^4 = 2^4 \cdot 5^4 \cdot 64$, па

$$5^6 \mid 5^4 \left(64 \cdot 16 - 24 \cdot x \cdot \prod_{0 \leq i \leq 3} (5i+1)(5i+2)(5i+3)(5i+4) \right),$$

па 5^2 дели израз у загради. Како је

$$(5i+1)(5i+2)(5i+3)(5i+4) \equiv 24 + 5 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot i \equiv 24 \pmod{25},$$

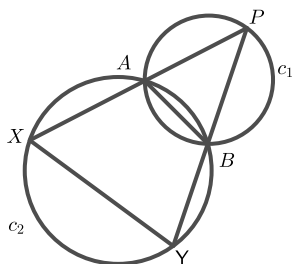
то је $\prod_{0 \leq i \leq 3} (5i+1)(5i+2)(5i+3)(5i+4) \equiv 24^4 \equiv 1 \pmod{25}$, па је

$$64 \cdot 16 - 24 \cdot x \cdot \prod_{0 \leq i \leq 3} (5i+1)(5i+2)(5i+3)(5i+4) \equiv 14 \cdot 16 + x \equiv x - 1 \pmod{25}.$$

Према томе, мора да важи $25 \mid x-1$. С друге стране, $x \in \{1, 21, 21 \cdot 22, 21 \cdot 22 \cdot 23, 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24\}$. Ови бројеви су, редом, конгруентни са $1, -4, 12, -24, 24$ по модулу 25. Дакле, $n = 20$ или $n = 23$.

Ако би важило $n = 23$, тада би важило $3 \cdot 10^{18} > 23! > 7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10^{10} \cdot 20^4 = 5040 \cdot 72 \cdot 10^{14} \cdot 16$, што је еквивалентно са $3 \cdot 10^4 > 5040 \cdot 72 \cdot 16$, а ово није тачно. Дакле, $n = 20$.

4. Нека је $\sphericalangle PAB = \alpha$. Тада $\sphericalangle XAB = \pi - \alpha$, као и $\sphericalangle XYB = \alpha$, јер је четвороугао $XYBA$ тетиван (збир наспрамних унутрашњих углова у том четвороуглу је π).



Отуда је $\triangle PAB$ сличан са троуглом $\triangle PYX$. Следи да је $\frac{XY}{BA} = \frac{PX}{PB}$, тј. $XY = \frac{BA \cdot PX}{PB} = 18$.

Напоменимо да смо на слици кружнице k_1 и k_2 означили са c_1 и c_2 , редом.

5. Збир два различита броја из скупа $A = \{1, 2, \dots, 9\}$ може бити било који цео број из скупа $\{3, 4, 5, \dots, 17\}$. Забрањени су зборови који су дељиви са 3, или са 5, или са 7, тј. 3, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 15. Према томе, дозвољени зборови суседних бројева су тачно:

4, 8, 11, 13, 16, 17.

Одредимо сада дозвољене суседности (за број $x \in A$ тражимо број $y \in A$ тако да је $x + y \in \{4, 8, 11, 13, 16, 17\}$):

- 1 $\sim$ 3, 7,
- 2 $\sim$ 6, 9,
- 3 $\sim$ 1, 5, 8,
- 4 $\sim$ 7, 9,
- 5 $\sim$ 3, 6, 8,
- 6 $\sim$ 2, 5, 7,
- 7 $\sim$ 1, 4, 6, 9,
- 8 $\sim$ 3, 5, 9,
- 9 $\sim$ 2, 4, 7, 8.

Кључна три броја која имају тачно два могућа суседа су:

1 мора бити суседан са 3 и 7; 2 мора бити суседан са 6 и 9; 4 мора бити суседан са 7 и 9.

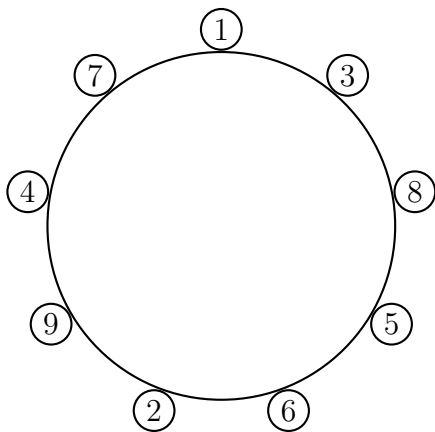
Дакле, у кружном распореду нужно важе везе:

$(1, 3), (1, 7), (2, 6), (2, 9), (4, 7), (4, 9).$

Отуда, бројеви 7 и 9 већ имају по два суседа (наиме, 7 има суседе 1 и 4, а 9 суседе 2 и 4), па више не могу бити суседни ни са једним другим бројем. Зато 6 не може бити суседан са 7 (јер је 7 већ “попуњен”), па 6 мора бити суседан са 5. Како 8 мора имати два суседа из скупа $\{3, 5, 9\}$, а број 9 већ има два суседа (то су бројеви 2 и 4), следи да број 8 мора бити суседан са 3 и 5. Стога, кружница се јединствено затвара, те добијамо распоред:

1, 3, 8, 5, 6, 2, 9, 4, 7

(у смеру супротном од казаљке на сату).



На крају, лако се проверава да су зборови суседних парова у том распореду:

$1+3=4$, $3+8=11$, $8+5=13$, $5+6=11$, $6+2=8$, $2+9=11$, $9+4=13$, $4+7=11$, $7+1=8$,

па ниједан није дељив са 3, 5 или 7. Дакле, такав распоред постоји (видети слику).

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ
31. јануар 2026.

Трећи разред - Б категорија

1. Најпре уочимо да је дати производ облика $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$, где је

$$A = 3 \sin x - 10, \quad B = 4 \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Зато важи

$$f(x) = (3 \sin x - 10)^2 - (4 \cos x)^2 = (3 \sin x - 10)^2 - 16 \cos^2 x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Како је $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, добијамо

$$f(x) = (3 \sin x - 10)^2 - 16(1 - \sin^2 x).$$

Нека је $t = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Тада је $t \in [-1, 1]$. Стога,

$$f(x) = (3t - 10)^2 - 16(1 - t^2) = (9t^2 - 60t + 100) - 16 + 16t^2 = 25t^2 - 60t + 84, \quad t \in [-1, 1].$$

Дакле, минимизација функције f своди се на минимизацију квадратне функције

$$g(t) = 25t^2 - 60t + 84, \quad t \in [-1, 1].$$

Допуном до квадрата бинома добијамо

$$g(t) = 25t^2 - 60t + 84 = (5t - 6)^2 + 48,$$

те, да нема ограничења $t \in [-1, 1]$, минимум би био 48 и постизао би се за $t = \frac{6}{5} > 1$, али то није могуће, јер је $|\sin x| \leq 1$, тј. $t \in [-1, 1]$. Стога, како је график функције g парабола отворена навише и како је x координата темена исте већа од 1, то на сегменту $[-1, 1]$ она опада, те минимум се постиже у тачки $t = 1$. Зато је

$$\min_{t \in [-1, 1]} g(t) = g(1) = 25 - 60 + 84 = 49.$$

Дакле, $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 49$ и исти се постиже тачно када је $\sin x = 1$, тј. за $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Дати систем једначина је дефинисан за $x > 0$ и $y > 0$. Како важи $x^{\ln y} = y^{\ln x} = e^{\ln x \ln y}$, то из прве једначине добијамо $e^{\ln x \ln y} = 1$. Логаритмовањем обе стране последње једнакости добија се $\ln x \ln y = 0$, одакле је $x = 1$ или $y = 1$.

Уколико је $x = 1$, тада из друге једначине система имамо $1^{\ln 1} + y^{\ln y} = e + 1$, одакле је $y^{\ln y} = e$. Логаритмовањем добијамо $(\ln y)^2 = 1$, односно $\ln y = \pm 1$, одакле су решења $y = e$ или $y = e^{-1}$. Случај $y = 1$ даје аналогна решења $(e, 1)$ и $(e^{-1}, 1)$.

Дакле, решења су: $(1, e), (1, e^{-1}), (e, 1), (e^{-1}, 1)$.

3. Приметимо да не могу сва три броја p , q и r бити непарна. Заиста, тада би $p^2 + q^3$ био паран број, а r^4 непаран. Како је 2 једини паран прост број, барем један од p, q и r мора бити једнак 2. Дискутујемо три случаја.

1. $p = 2$: Важи $(r^2 - 2)(r^2 + 2) = r^4 - 4 = q^3$. Како је q прост број, следи $\{r^2 - 2, r^2 + 2\} = \{q, q^2\}$ или $\{r^2 - 2, r^2 + 2\} = \{1, q^3\}$. Одавде следи $q^2 - q = 4$ или $q^3 - 1 = 4$. За $q = 2$ не важи ниједно од наведеног. За $q \geq 3$ се доказује $q^2 - q > 4$ и $q^3 - 1 > 4$. У овом случају нема решења.

4. Нека су дужине страница полазног троугла $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$. Користећи косинусну теорему, коју примењујемо на $\triangle TAQ$ и на $\triangle PBS$, добијамо:
- (1) $\triangle TAQ$: Имамо

$$3481 = 3b^2 + c^2. \quad (1)$$

(2) $\triangle PBS$: Имамо

$$PB = c, \quad BS = a, \quad \angle PBS = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \beta,$$

где је $\beta = \angle ABC$, те је

$$\cos(\angle PBS) = \cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta = -\frac{a}{c}.$$

Косинусна теорема нам, тада, даје:

$$PS^2 = PB^2 + BS^2 - 2 \cdot PB \cdot BS \cdot \cos(\angle PBS).$$

$$58^2 = c^2 + a^2 + 2 \cdot c \cdot a \cdot \left(\frac{a}{c}\right).$$

$$3364 = c^2 + 3a^2. \quad (2)$$

Коначно, сабирањем једнакости (1) и (2) налазимо да је $3(a^2 + b^2) + 2c^2 = 3c^2 + 2c^2 = 5c^2 = 6845$, тј. $c^2 = 1369$, тј. $c = AB = 37$.

5. Одговор: $2025 = 45^2$.

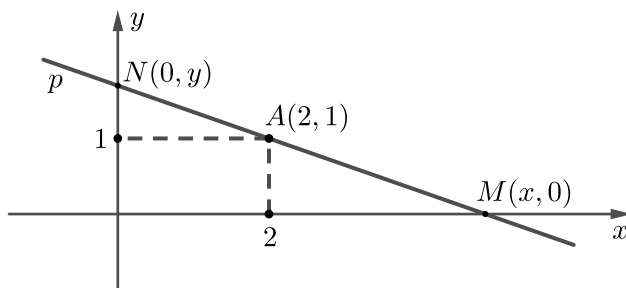
Претпоставимо да су жетони тако постављени да се ниједан не може уклонити са табле. Посматрајмо произвољан жетон са табле. С обзиром на то да се он не може уклонити, закључујемо да у његовом реду постоји барем 45 жетона. Како се ниједан од тих 45 жетона не може уклонити, то у колони сваког од тих 45 жетона постоји бар 45 жетона. Према томе, на табли је не мање од $45 \cdot 45 = 2025$ жетона.

Са друге стране, попуњавањем било које подтабле величине 45×45 са 2025 жетона (остатак је празан), лако видимо да нити један од њих не можемо уклонити.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ
31. јануар 2026.

Четврти разред - Б категорија

1. Нека права p сече осе Ox и Oy у тачкама $M(x, 0)$ и $N(0, y)$, редом, при чему је према поставци $x > 0$ и $y > 0$. Површина таквог троугла је $P = \frac{xy}{2}$. Из односа $x : y = (x - 2) : 1$ добијамо $y = \frac{x}{x-2}$, а како је $y > 0$, то мора бити $x > 2$. Површина је сада $P = P(x) = \frac{x^2}{2(x-2)}$, а како је $P'(x) = \frac{x(x-4)}{2(x-2)^2}$ и $P'(x) < 0$, за $x \in (2, 4)$, односно $P'(x) > 0$, за $x > 4$, то је тачка $x = 4$ минимум функције P . Површина троугла је тада $P(4) = 4$, а тражена права, која пролази кроз тачке $A(2, 1)$ и $M(4, 0)$, има једначину $x + 2y - 4 = 0$.



Напомена. Минимум функције $P(x)$ се могао одредити и применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине. Наиме, јасно је да мора да важи $x > 2$ и $y > 1$. Приметимо да важи

$$\frac{x^2}{2(x-2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 4 + 4}{(x-2)} = \frac{1}{2} \left(x + 2 + \frac{4}{x-2} \right) = \frac{1}{2} \left(4 + (x-2) + \frac{4}{x-2} \right).$$

За $x > 2$ је $x - 2 > 0$, те, на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине, важи

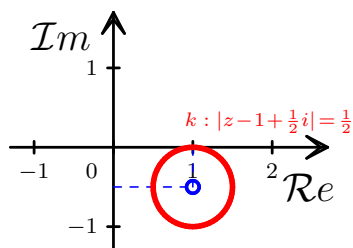
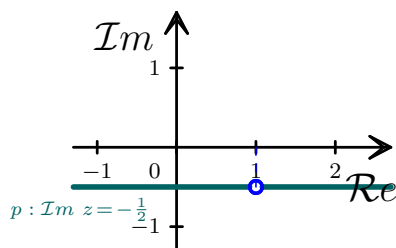
$$(x-2) + \frac{4}{x-2} \geq 2\sqrt{4} = 4.$$

Одатле следи

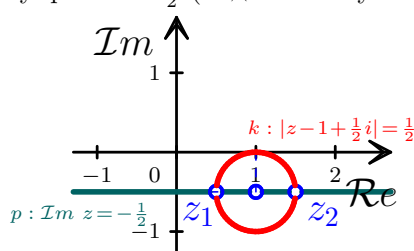
$$\frac{x^2}{2(x-2)} \geq \frac{1}{2}(4+4) = 4,$$

при чему једнакост важи за $x - 2 = \frac{4}{x-2}$, тј. $x = 4$ (решење једначине је и $x = 0$ које не узимамо у разматрање због услова $x > 2$).

2. Нека је $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Тада, из $z \in A = \{z : z - \bar{z} + i = 0\}$ добијамо да је $y = -\frac{1}{2}$, тј. добијамо да су у питању комплексни бројеви облика $z = t - \frac{1}{2}i$, $t \in \mathbb{R}$. Они представљају праву p : $\text{Im } z = y = -\frac{1}{2}$ (паралелну са реалном осом) у комплексној равни (видети слику).



Аналогно, из $z \in B = \{z : \operatorname{Im}(\frac{1}{z-1}) = 1\}$ добијамо да је $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(x-1)+iy} \cdot \frac{(x-1)-iy}{(x-1)-iy} = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + i \frac{-y}{(x-1)^2+y^2}$. Стога, једначина $\operatorname{Im} \frac{1}{z-1} = 1$ се своди на $\frac{-y}{(x-1)^2+y^2} = 1$, тј. $(x-1)^2+y^2 = -y$, тј. $(x-1)^2+y^2+y+\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, односно $(x-1)^2+(y+\frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2$, што значи да скуп $B = \{z : \operatorname{Im} \frac{1}{z-1} = 1\}$ у комплексној равни одређује кружницу k са центром у тачки $1 - \frac{1}{2}i$ и полупречника $\frac{1}{2}$ (видети слику изнад).



Дакле, решење полазног система једначина $z - \bar{z} + i = 0$ и $\operatorname{Im} \frac{1}{z-1} = 1$ је скуп $A \cap B$, а то су комплексни бројеви $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ и $z_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$.

3. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Делењем обе стране једначине са n добијамо:

$$(n-1)! + 1 = n^{n-1}.$$

Прво, приметимо да $n = 1$ није решење, а $n = 2$ јесте решење. Даље, за $n \geq 3$ имамо

$$(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) < (n-1) \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdots (n-1) = (n-1)^{n-1}.$$

Са друге стране важи и

$$n^{n-1} - (n-1)^{n-1} = n^{n-2} + n^{n-3}(n-1) + \cdots + n(n-1)^{n-3} + (n-1)^{n-2}.$$

Јасно је да је за $n \geq 3$ овај израз већи од 1, па других решења нема. Напоменимо да смо овде користили познати идентитет:

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad k \geq 2.$$

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Као у првом решењу, једначина је еквивалентна са $(n-1)! + 1 = n^{n-1}$. Докажимо принципом математичке индукције да за $n \geq 3$ важи

$$(n-1)! + 1 < n^{n-1}.$$

База: за $n = 3$ тврђење је тачно јер је $(3-1)! + 1 < 3^2$.

Индуктивна хипотеза: Нека за неко $n \geq 3$ важи

$$(n-1)! + 1 < n^{n-1}.$$

Индуктивни корак: Користећи индуктивну хипотезу добијамо је

$$n! + 1 = n(n-1)! + 1 < n(n^{n-1} - 1) + 1 = n^n - n + 1.$$

Како је $n \geq 3$, то је $-n + 1 < 0$, па је $n^n - n + 1 < n^n$. Коначно, како је $n^n < (n + 1)^n$, то спајањем претходних неједнакости добијамо

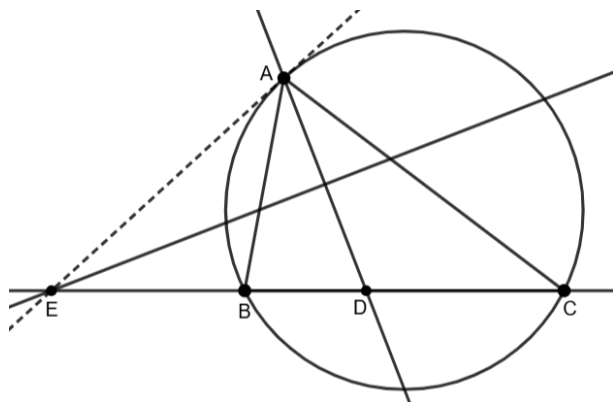
$$n! + 1 < n^n - n + 1 < n^n < (n + 1)^n.$$

Дакле, на основу принципа математичке индукције закључујемо да за $n \geq 3$ важи

$$(n-1)! + 1 < n^{n-1}.$$

Провером случајева $n = 1$ и $n = 2$ установљавамо да је $n = 2$ једино решење задатка.

4. Уведимо стандардне ознаке за углове троугла ABC : $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ и $\sphericalangle ACB = \gamma$. Тада је $\sphericalangle ADE = \sphericalangle DAC + \sphericalangle DCA = \frac{\alpha}{2} + \gamma$, као спољашњи угао троугла ADC . С друге стране, како је E на симетрали дужи AD , то је $AE = DE$, па је $\sphericalangle DAE = \sphericalangle ADE = \frac{\alpha}{2} + \gamma$. Сада лако добијамо $\sphericalangle EAB = \sphericalangle DAE - \sphericalangle BAD = \gamma$. Коначно, како је $\sphericalangle EAB = \sphericalangle ACB = \gamma$, то је AE тангента описаног круга око троугла ABC .



5. За сваког такмичара, број поена је $\frac{1}{2}a + b$, где је a број нерешених партија које је играч одиграо, а b број победа, одатле следи да такмичар има цео број поена ако и само ако је број нерешених партија паран. Даље решење зависи од парности броја n , тј. броја играча.

1° n је непаран: Тада сваки играч игра укупно $n-1$ партија, а број $n-1$ је паран. Зато је могуће да све партије на турниру буду нерешене. У том случају, сваки играч има паран број ремија, па самим тим и цео број поена. Како нема више партија од $\frac{n(n-1)}{2}$, што је укупан број партија на турниру, овај број, тј. $\frac{n(n-1)}{2}$, представља највећи могући број нерешених партија у овом случају.

2° n је паран: Аналогно, сваки играч игра тачно $n - 1$ партија, што је непаран број. Стога, играч не може имати све партије нерешене, јер би тада имао непаран број ремија. Са друге стране, највећи паран број који је мањи од $n - 1$ јесте $n - 2$, те сваки играч може имати највише $n - 2$ нерешене партије.

Ово се може остварити тако што, на пример, играче упаримо:

$$(1, 2), (3, 4), \dots, (n-1, n),$$

и нека у сваком од ових парова партија буде одлучена (није нерешено), док су све остале партије нерешене. Тада сваки играч има тачно једну одлучену партију (победа или пораз) и $n - 2$ нерешене партије, што је паран број, те сви играчи имају цео број поена. Дакле, у овом случају добијамо да је $\frac{n(n-2)}{2}$ највећи могући број нерешених партија.