Тангента

број: 121/1 година: 2025/26.

ЧАСОПИС ЗА МАТЕМАТИКУ И РАЧУНАРСТВО ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Београд, 2025.

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
„ТАНГЕНТА”- часопис за математику и рачунарство
за ученике средњих школа.
Излази у четири броја током школске године.
Адреса: „Тангента”, Друштво математичара Србије,
Поштански фах 355, 11000 Београд
Телефон: (011)3036-818

Уплате на жиро рачун:
Друштво математичара Србије – број 340-13536-62.
На уплатници као сврху уплате назначити „За Тангенту”.

Штампа: **Донат Граф** д.о.о, Београд
На основу члана 23. став 2, тачка 9. Закона о порезу на додатну вредност („Регистар прописа”, број 11 – новембар 2004.) часопис се сматра серијском публикацијом од посебног интереса за науку и опорезије се по стопи од 8%. Корице freepik.

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51
ТАНГЕНТА : часопис за математику и рачунарство за ученике средњих школа : часопис за математику и рачунарство Друштва математичара Србије / главни и одговорни уредник Војислав Петровић. - 1995/1996, бр. 1- . - Београд : Друштво математичара Србије, 1995- (Београд : Донат граф). - 24 cm

Тромесечно.
ISSN 0354-656X = Тангента
COBISS.SR-ID 103642375

КОМБИНАТОРНИ БРОЈНИ НИЗОВИ

3. БИНОМНИ КОЕФИЦИЈЕНТИ И БРОЈНИ НИЗОВИ
I део

Владимир Балтић

Увод

Биномни коефицијенти су, после природних бројева, вероватно најчешћи бројеви у математици. Буквално, срећу се у свим математичким дисциплинама.

Означавају се симболом $\binom{n}{k}$, где су n и k природни бројеви и који се чита „n над k“. Симбол је први употребио аустријски математичар и физичар Етингхаузен[1] 1826. године.

По дефиницији је

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{за } 0 \le k \le n \\ 0 & \text{за } k > n \end{cases}. \tag{1}$$

Неке вредности биномних коефицијената: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$.

Након скраћивања са $(n-k)!$ у (1), та формула добија облик

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} & \text{за } 0 \le k \le n \\ 0 & \text{за } k > n \end{cases}, \tag{2}$$

који је згоднији за израчунавања биномних коефицијената, јер садржи мање операција множења.

Биномни коефицијенти били су познати кинеским и индијским математичарима из 13. и 14. века, као и чувеном француском математичару Паскалу[2] у 17. веку. Име носе по тзв. биномној формули о којој ће бити речи касније.

Биномни коефицијенти се најчешће срећу у комбинаторици, математичкој дисциплини која се, између осталог, бави пребројавањем различитих скупова и структура.

НАГРАДНИ ЗАДАЦИ

Александар Миленковић, Ненад Стојановић

У рубрици „Наградни задаци” у сваком броју дајемо 20 задатака који су подељени у две групе. Задаци из прве групе су подељени по разредима и намењени су пре свега ученицима који се такмиче у Б категорији, док су задаци из друге групе намењени ученицима А категорије и нису подељени по разредима.

Позивамо све читаоце да шаљу предлоге задатака које сматрају посебно интересантним, као и сугестије које ће нам помоћи при састављању рубрике. Такође, позивамо све ученике да на адресу редакције шаљу откуцана или читко исписана решења постављених задатака; сваки задатак на засебном листу. Исто важи и за предлоге задатака. У наредним бројевима часописа публикују се комплетна решења раније постављених задатака, а на крају циклуса најуспешнији решавачи се награђују.

Предлоге и решења задатака слати на адресу:

„Тангента” – за рубрику „Наградни задаци”
Природно-математички факултет
Радоја Домановића 12
34000 Крагујевац

или **електронском поштом** (искључиво **pdf** формат) на адресу

tg_nagradnizadaci@yahoo.com

најкасније до 20.11.2025.

Прва група

Први разред

М2134. У скупу реалних бројева, решити једначину

$$\left|\sqrt{x-4}-3\right|+\left|\sqrt{x-4}-2\right|=1.$$

М2135. Тачка M дели страницу AB троугла ABC у односу $AM : MB = 2 : 3$. Доказати да је тада $CM = \frac{1}{5}\sqrt{15CA^2+10CB^2-6AB^2}$.

М2136. Нека су a, b и c три различите цифре, од којих ниједна није нула. Дешифровати дељење $\overline{abc} : c = \overline{bc}$.

Hello, World!
Обилазак графа и тражење најкраћих путева

Миодраī Живковић
Маīемаīички факулīеī, Беоīрад

1. Увод

После упознавања са основним појмовима о графовима размотрићемо два важна алгоритма: обилазак графа – претрага у ширину и Дајкстрин алгоритам за проналажење најкраћих путева у графу.

Увешћемо најпре неопходне појмове. *Граф* $G = (V, E)$ састоји се од скупа V *чворова* и скупа E *īрана*. Свака грана одговара пару различитих чворова (понекад су дозвољене *ūеīље*, односно гране које воде од једног чвора ка њему самом; ми их овде нећемо разматрати). Другим речима, гране представљају бинарну релацију између чворова.

На пример, ако граф представља скуп људи, онда грана може да повезује две особе који се познају.

Граф може бити *усмерен* или *неусмерен*. Гране усмереног графа су уређени парови чворова који се зову *крајеви* гране. Редослед два чвора који који су крајеви неке гране је битан; например, једносмерна улица у граду. Гране усмереног графа могу се графички представити као стрелице усмерене од једног чвора (*ūочеīка*) ка другом чвору (*крају*) те гране. Код неусмереног графа гране су неуређени парови чворова и оне се графички представљају као обичне дужи или линије које спајају те чворове.

Слика 1. Усмерени и неусмерени граф.

Пример 1. На слици 1 приказани су један усмерени и један неусмерени граф са истим скупом чворова {1, 2, 3, 4, 5}.

ПРЕДЛОЗИ ЗА ПРВИ ПИСМЕНИ ЗАДАТАК

Мирјана Катић

ГИМНАЗИЈЕ, СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

I РАЗРЕД

Логика и скупови; цели бројеви; реални бројеви

1. Испитати да ли је следећа исказна формула таутологија:

$$\big((q \Rightarrow r) \Rightarrow p\big) \Rightarrow \Big((r \vee q) \Rightarrow \big(p \vee (\neg p \Rightarrow q)\big)\Big).$$

2. Доказати да је за непразне скупове A и B, важи $A \times B = B \times A$ ако и само ако је $A = B$.

3. На скупу $\mathbb{N}$ дата је релација $\sim$ са:

$$a \sim b \Leftrightarrow 3 \mid (a^2 + 2a - b^2 - 2b).$$

Доказати да је $\sim$ релација еквиваленције и одредити класу еквиваленције која садржи број 5.

4. Шехерезада је из ноћи у ноћ причала султану по 5 или 8 бајки. За колико најмање, а за колико највише ноћи је Шехерезада могла да исприча султану 1001 бајку?

5. Доказати да је производ четири узастопна непарна природна броја, увећан за 16, једнак квадрату природног броја.

II РАЗРЕД

Степеновање и кореновање; комплексни бројеви

1. Колико је Re z ако је $z = \left(1 - \frac{1-i}{1+i}\right)^{2025}$?

2. Упростити израз $\frac{90 \cdot 45^{2n-1} - 3^{4n+1} \cdot 5^{2n}}{2025^{n-1}}$.

3. Колика је вредност израза

$$\frac{\sqrt{(-2025)^2} + |-2025| + \sqrt[3]{(-2025)^3}}{\sqrt[2025]{(-5)^{2025}} + \sqrt[2026]{(-6)^{2026}}}?$$

РОЂЕНДАНСКИ ПАРАДОКС

Анīелина Димиūријевић, Беоīрад

„Једна од бескрајно ūривлачних сūрана маūемаūике је ūа
шūо се њени најūрновиūији ūарадокси
ūреūварају у ūредивне ūеорије“.

Филип Дејвис, амерички примењени математичар

Као што је познато, вероватноћа је математичка дисциплина која се, крајње поједностављено, бави одређивањем извесности да се неки догађај деси. Прецизније, догађајима се додељују бројне вредности, њихове вероватноће, које чине реални бројеви из интервала $[0, 1]$, а који задовољавају одређене услове.

На пример, вероватноћа да се при бацању новчића појави писмо, а исто тако и глава, једнака је $\frac{1}{2}$, односно 50% . При бацању коцкице за јамб чије су стране нумерисане бројевима од 1 до 6, вероватноћа појављивања броја 1, а исто тако и сваког другог од бројева, једнака је $\frac{1}{6} \approx 17\%$. При насумичном избору двоцифреног броја, вероватноћа да је он дељив са 5, једнака је $\frac{18}{90} = 20\%$ итд.

Наведене вероватноће добијају се из тзв. Паскалове формуле. Ради се о следећем. Догађај A може остварити на укупно t начина. С друге стране, A се може остварити на s начина који нас интересују. Тада је вероватноћа $p(A)$ да се догађај A оствари на један од s начина једнака

$$p(A) = \frac{s}{t}. \qquad (1)$$

Додајмо да се тих s начина зову *ūовољни исходи*, док се t начина остваривања догађаја A зову *сви моīући исходи*.

Најчешће се вероватноће добијене из формуле (1) поклапају са нашим очекивањима, интуицијом. Међутим, има случајева кад се ти резултати увелико разликују од „здраво разумских“. Њих бисмо могли назвати парадоксима[1] вероватноће.

На пример, ако се при 100 бацања новчића 100 пута појави писмо, многи ће помислити да је при 101. бацању изузетно велика вероватноћа да се појави глава. Међутим, она је једнака $\frac{1}{2} = 50\%$, као и при првом бацању.

---

[1] парадокс (из грчког παράδοξος) – истинита ситуација или изјава која наизглед противречи здравом разуму.

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА

66. Међународна математичка олимпијада 2025.

Теодор фон Бург, Миљан Кнежевић

Овогодишња, 66. по реду, Међународна математичка олимпијада (ММО) одржана је од 10. до 20. јула у граду Саншајн Коуст, у Аустралији.

На такмичењу је учествовало 630 ученика из 110 земаља света. Ученици су два дана, прецизније 15. и 16. јула, радили по три задатка, од којих је сваки носио по 7 поена. Израда задатака је сваког дана такмичења трајала по 2702 минута.

Наш шесточлани тим је формиран након одржаног Квалификационог такмичења за ММО, које је уследило нешто више од месец дана након Квалификационог такмичења за Балканску математичку олимпијаду (БМО). Учествовало је 12 ученика.

Ево екипе Србије за 66. ММО:

СРБ 1 Новак Деспотовић, 4. разред, Математичка гимназија, Београд;

СРБ 2 Стефан Шебез, 3. разред, Математичка гимназија, Београд;

СРБ 3 Петар Бановић, 1. разред, Математичка гимназија, Београд;

СРБ 4 Ненад Марковић, 1. разред, Математичка гимназија, Београд;

СРБ 5 Владимир Лукић, 3. разред, Математичка гимназија, Београд;

СРБ 6 Владимир Бранковић, 4. разред, Математичка гимназија, Београд.

Руководиоци екипе су били: др Миљан Кнежевић (Математички факултет, Универзитет у Београду) и Теодор фон Бург (Математичка гимназија, Београд).

Као што је већ поменуто, према већ устаљеној процедури, сви такмичари су, током два такмичарска дана, решавали укупно шест задатака – три првог и три другог дана. Сваки тачно урађен задатак доносио је 7 поена.

Такође по устаљеној процедури, задаци се бирају са тзв. шортлисте, састављене од бројних предлога земаља учесница. Ове године, због преве-лике тежине, наши предлози нису ушли у завршни избор задатака. То, иначе, јасно сведочи о томе с колико пажње Комитет за избор задатака приступа формирању коначне листе.

И ове године задаци су изабрани по стандардном протоколу. Прво су изабрана два лакша и два средње тешка задатка из четири основне

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА

„КЕНГУР БЕЗ ГРАНИЦА”

Немања Вучићевић, Александар Миленковић, Јелена Стеванић

Почетком осамдесетих, професор математике у Сиднеју Петер Халоран (Peter O'Halloran) осмислио је математичко такмичење са вишеструким понуђеним одговорима. Овакав начин ораганизовања такмичења омогућава објективно и једноставно прегледања тестова од стране било код прегледача за велики број учесника. За организаторе националног такмичења из математике у Аустралији ово је био огроман успех.

Током 1991. године два француска наставника математике Андре Деледик (André Deledicq) и Жан Пјер Будин (Jean Pierre Boudine) одлучили су да започну организовање такмичења у Француској под називом „Кенгур” по узору на такмичење у Аустралији, а називом такмичења одају почаст својим аустралијским колегама. На првом организованом такмичењу учествовало је 120 000 младих француских математичара. Убрзо се, организовању, прикључују и многе земље Европе, тако да европске земље, њих 21, заједно формирају асоцијацију „Кенгур без граница”

Број ученика који се такмиче у земљама чланицама није сталан, на глобаном нивоу је махом константан. Број такмичара у Србији 2025. године приближно је износио 11 500.

Број задатака на тестовима се разликује у нижим и вишим разредима основне школе, док тест за средњошколце садржи 30 задатака са три степена тежине. Сваки задатак има 5 понуђених одговора од којих је само један тачан. Тачан одговор за задатке 1 – 10 вреди 3 бода, за задатке 11 – 20 вреди 4 бода, а за задатке 21 – 30 5 бодова.

Ако ученик нетачно одговори, одузима му се четвртина бодова предвиђених за тај задатак, а ако не одговори на питање, добија 0 бодова. Добијени збир се повећава за 30, тако да не буде ученика са негативним збиром бодова. Максималан број бодова за ученике средњих школа је 150.

Ученици средњих школа се такмиче у следећим категоријама:

К1: друштвени смер гимназије, језичке гимназије, III степен стручних школа;

К2: IV степен стручних школа;

К3: природно-математички и општи смер гимназије, као и специјалне математичке гимназије.

Тестови за 9. и 10. односно 11. и 12. разред су истоветни, иако је рангирање ученика по разредима и по категоријама одвојено.

Традиционално, такмичење се сваке године одржава у исто време – трећег четвртка у марту у 10 : 00 [illegible]

НАШ ГОСТ

У ПАР КОРАКА

Ученици талентовани за математику веома рано покажу своје способности. Они често, и у великој мери, превазилазе своје вршњаке у поимању и усвајању математичких садржаја предвиђених за одређене узрасте.

То их доводи у ситуацију да или прихвате постојеће стање и практично се досађују на часовима математике или да прескоче поједине разреде, касније године студија, и наставе тамо где им је и место. Обично се определе за ово друго.

То је учинио и наш гост Владимир Драговић, садашњи редовни професор и руководилац департмана на Универзитету Тексас у Даласу.

О Владимировом матемаематичком опусу, и не само о томе, читаоци ће бити у прилици да сазнају из разговора који следи.

Владо, претпостављам да си веома рано, још у детињству, испољио своје математичке способности. Да ли се сећаш самих почетака?

У шестом разреду су ми допале до руку две свеске Друштва математичара Србије са задацима са републичких и савезних такмичења из математике.

До те године, републичка и савезна такмичења су организована за ученике седмог и осмог разреда. Испоставило се, те 1980. године је први пут организовано републичко такмичење и за ученике шестих разреда, што ми није било познато у моменту када сам почео да прорађујем те две збирке.

Иако су те збирке садржале и детаљна решења, мени је било занимљиво да самостално решавам задатке не гледајући у решења. И тако, у неколико месеци стрпљивог рада и великог уживања, пошло ми је за руком да решим скоро све задатке из те две свешчице.

То се испоставило као добра припрема за 100 поена на градском такмичењу и неочекивани пут у Аранђеловац, на прво републичко такмичење за шести разред, где сам освојио другу награду.

ДОКАЗ БЕЗ РЕЧИ

Ненад Стојановић

Доказ без речи, назив је за методу визуелног „доказивања“ математичких тврђења. Појавио се у прошлом веку и брзо стекао широку популарност. Представља спој уметности и математике. Бројне речи и ознаке замењује слика која својим садржајем све објашњава.

Неједнакост $\pi^e < e^\pi$

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{e}-1} \frac{x}{1+x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{e}-1} \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = \left(\frac{\pi}{e} - 1\right) - \ln\frac{\pi}{e} = \frac{\pi}{e} - \ln\pi$$

$$\pi^e < e^\pi$$

НАГРАДНИ ШАХОВСКИ ЗАДАТАК

Тангента 120 - решење

Бели вуче и матира у 3 потеза

1. Кс6! Ка7 2. с8Т! (2. с8D? пат) Ка6 3. Та8 мат

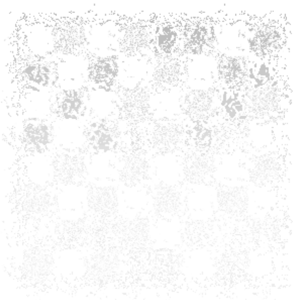
ШАХОВСКА СТРАНА

НЕКИ НОВИ КЛИНЦИ

Наш прослављени велемајстор Глигорић сматрао је да шахиста светске класе не може постати пре своје 40. године. Наводио, разлози су знање и искуство као и зрелост у сваком погледу.

Међутим, време га је у потпуности негирало. Азија, колевка шаха, изнедрила је читаву плејаду врхунских шахиста тинејџера. Представићемо три бисера из Индије.

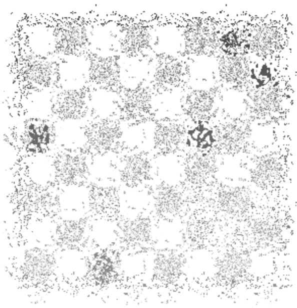
Први је Домараџу Гукеш, садашњи светски првак. Титулу је освојио са само 18 година. Очекивано, влада свим шаховским вештинама. Ево како комбинује.



У партији из 2022, црни је са Lf5 напао Гукешову даму. Уследило је неочекивано и ефектно **1. Dc3!!**. Прети 2. Te8 Te8 3. Dg7+ Dg7 4. Sf7+ Kg8 5. Sd6+ Kf8 6. Lg7+ Kg7 7. Se8+ с добитком. **1. ... Te1+ 2. Te1 Lc3 2. Lc3+ Dg7 3. Sf7+ Kg8** (3. … Tf7 4. Te8+ Tf8 5. Tf8 мат) **4. Sg5+ Kh8**.

5. Te7!! и нема одбране од мата. На 5. ... Dc3 6. Th7 мат, а на 5. ... Tg8 6. Lg7+ Tg7 7. Te8+ Tg8 8. Tg8 мат.

Следећа завршници је право ремек дело.



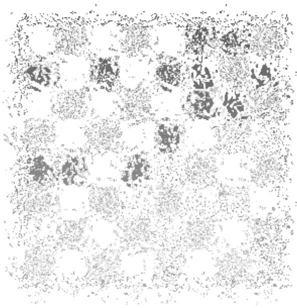
Позиција из партије с кинеским велемајстором Вај Ји (црни) са Олимпијаде 2024. Префињеном игром остварио је пуну координацију фигура и стигао у позицију

у којој црни предаје. Разлог је што прети Sg6+ с промоцијом f-пешака.. А на једино 1. ... Tg3 следи 2. Sf5+ уз Sg3.

Рамешбабу Прагнананда такође је изврстан тактичар. Ево како је „средио“ нашег Сарану.

Напад почиње силовито **1. Sa6+! ba6 2. Tc6 Td7 3. Sf5 Dd8 4. Lb5 ab5 5.a6 Ta7 6. Db5 Ka8 7. Sd6 Ld7**, а завршава се са **8. Db7+** и матом.

Трећи бисер је Арџун Еригајси. И њему је тактика „у крви“. Следећи пример је из партије из 2019, Еригајси је бели.



Црни је на потезу и покушава да се спасе са. **1. ... Se8** (1. … Sh5 2. Th5 gh5 3. Sf5, или 1. ... Sc5 2. Sf5! Sd3+ 3. Kf1 gf5 4. gf6) **2. Dh7+! Kh7 3. hg6+ Kg8** (3. … Kg6 4. Th6+ Kg7 5. Sf5+ Kg8 6. Th8 мат или 4. … Kg5 5. T1h5 мат) **4. Th8+ Kg7 5. Sf5+ Kg6 6. T8h6+ Kg5 7. T1h5 мат**.

НАГРАДНИ ЗАДАТАК

Бели вуче и матира
у 3 потеза

Решења слати на адресу:
vojpet@gmail.com

Најуспешнији решавачи биће награђивани шаховском литературом издавачке куће „Шаховски информатор“.

Војислав Петровић

YU ISSN 0354-656X