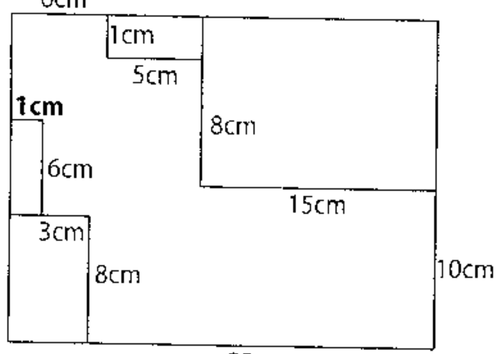
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - IV РАЗЕД

1. (**МЛ XLIII-4**) $x \cdot 257 - 422 = 88500$. $x = 346$ (**20 бодова**). Ако је ученик добро поставио једначину, а није добро израчунао дати 5 бодова. Максималним бројем бодова оценити и поступак у коме је ученик дошао до решења не користећи једначину.
2. Четвороцифрени број је облика $abba$, а троцифрени cdc. Сада је $abba = 2011 + cdc$. Ако је $a = 2$ (**5 бодова**) имамо: $2bb2 = 2011 + cdc$, односно $b \cdot 100 + b \cdot 10 + 2 = c \cdot 100 + (d+1) \cdot 10 + c + 1$. Одавде је $c = 1$ (**5 бодова**), $b = 1$ (**5 бодова**) и $d = 0$ (**5 бодова**). За $a = 3$ не постоје тражени бројеви.
3. Ако дату фигуру допунимо до правоугаоника (види слику), његове странице су дужине 26cm и 19cm. Површина фигуре је онда $26 \cdot 19 - (15 \cdot 9 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 8 \cdot 4) = 316$. Дакле, $P = 316\text{cm}^2$ (**20 бодова**).



4. Од 12 коцкица могу да се направе 4 квадра, типа:

$12 \times 1 \times 1$, $6 \times 2 \times 1$, $4 \times 3 \times 1$ и $3 \times 2 \times 2$.

а) Најмању површину има квадар типа $3 \times 2 \times 2$ и то 32cm^2 (**10 бодова**).
б) Највећу површину има квадар типа $12 \times 1 \times 1$ и то 50cm^2 (**10 бодова**).
Напомена: Дати 5 бодова ако ученици запишу да постоје 4 квадра, а не одреде ни једну површину.

5. Чика Ратко у џепу може да има:

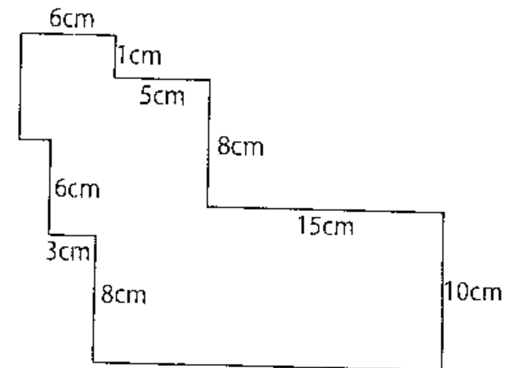
а) 11 новчаница: 3 од 100, 3 од 500 и 5 од 1000 динара (**10 бодова**).
б) 18 новчаница: 8 од 100, 8 од 500 и 2 од 1000 динара (**10 бодова**).

Признавати и са максималним бројем бодова оценити свако тачно решење које није у кључу.

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
09.04.2011.
IV РАЗРЕД

1. Којим бројем треба помножити број 257 тако да када од тог производа одузмеш број 422 добијеш број 88500?
2. Четвороцифрен и троцифрен број у разлици $**** - *** = 2011$ имају исту вредност ако их читамо и са леве и са десне стране. Одреди те бројеве.
3. Израчунај површину фигуре представљене сликом. Све странице фигуре припадају правама које су или паралелне или нормалне међусобно.



4. Од 12 истих коцки чија је ивица дужине 1cm направљен је квадар. Који од овако добијених квадара има: а) најмању; б) највећу површину? Израчунај те површине.
5. Чика Ратко у џепу има 6800 динара. Тај износ има у новчаницама од 100 динара, 500 динара и 1000 динара. Број новчаница од 100 динара и од 500 динара је исти. Колико новчаница чика Ратко може да има?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - V РАЗЕД

1. (**ML XLIV-5**) 4,9 (**20 бодова**).

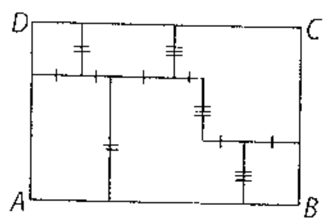
2. Како је $2013 = 3 \cdot 671$ и $2010 = 3 \cdot 670$, то се дати број може записати у облику $3 \cdot (2009 \cdot 2011 \cdot 671 + 2008 \cdot 670 \cdot 2012)$, па закључујемо да је он сложен (**20 бодова**).

3. Како α, β и γ имају паралелне краке, они су једнаки или суплементни (**5 бодова**). Како је $\alpha + \beta = 2011'$ то је $\alpha = \beta = 16° 45' 30''$ (**5 бодова**). Како је разлика углова γ и β већа од 90°, угао γ је туп и углови γ и β су суплементни (**5 бодова**) па је $\gamma = 163° 14' 30''$ (**5 бодова**).

4. P, Q, R и S могу имати вредности 2, 3, 5 и 7. Како је збир последњих цифара сабирака једанак P, а $2 + 3 + 5 + 7 = 17$, то је $P = 7$ (**5 бодова**). Како са места јединица постоји прелаз од једне десетице имамо да је $8 + Q + R = Q$, тј. $8 + R = 10$, одакле је $R = 2$ (**5 бодова**). Како са места десетица имамо пренос, имамо да је $8 + Q = S$, па закључујемо да је $Q = 5$ (**5 бодова**) и $S = 3$ (**5 бодова**).

5. Како је збир дужина страница обележених са једном цртом, односно са две, односно са 3 црте једнак редом 14,26cm, 11,3cm, 11,3cm (**10 бодова**) и како су све дужи обележене цртом странице две новодобијене фигуре, то је збир обима свих 6 фигура:

$$(2 \cdot AB + 2 \cdot BC) + (2 \cdot AB + 4 \cdot BC) = 124{,}84\text{cm}$$ (**10 бодова**).



Признавати и са максималним бројем бодова оценити свако тачно решење које није у кључу.

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
09.04.2011.

V РАЗРЕД

1. Израчунај вредност израза $7 \cdot 1{,}2 - \frac{9}{10} : 0{,}3 - \frac{1}{2}$.

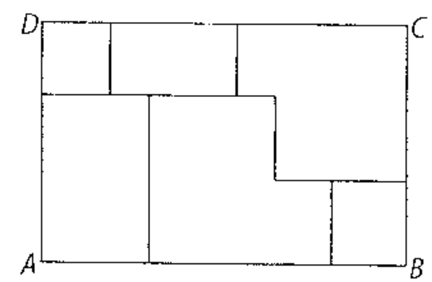
2. Испитај да ли је број $2009 \cdot 2011 \cdot 2013 + 2008 \cdot 2010 \cdot 2012$ прост или сложен.

3. Углови α, β и γ имају паралелне краке. Збир углова α и β је $2011'$, а разлика углова γ и β је већа од правог угла. Израчунај углове α, β и γ.

4. Дешифруј сабирање ако су цифре P, Q, R и S различити прости једноцифрени бројеви.

$$\begin{array}{r} P \\ P\,Q \\ P\,Q\,R \\ +\;P\,Q\,R\,S \\ \hline *\,S\,Q\,P \end{array}$$

5. Одреди збир обима свих 6 фигура (види слику) које су настале поделом правоугаоника $ABCD$ чије су странице дужине $AB = 14{,}26$cm и $BC = 11{,}3$cm. Свака од страница свих шест фигура паралелна је једном пару страница правоугаоника $ABCD$.



Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
09.04.2011.

VI РАЗРЕД

1. Изабери четири броја из скупа $\left\{-\frac{1}{3}, -\frac{7}{8}, \frac{2}{5}, -\frac{5}{14}, -\frac{4}{7}\right\}$ тако да њихов производ буде: а) највећи; б) најмањи. Израчунај те производе.

2. Конструиши троугао ABC ако је $\measuredangle ACB = 90°$, $\measuredangle CAB = 15°$ и $CC_1 = 3\text{cm}$, где је C_1 средиште странице AB.

3. Дат је правоугаоник чије су странице 10cm и 67cm. У унутрашњости правоугаонику на случајан начин је распоређено 2011 тачака. Докажи да при ма ком распореду тачака постоје четири тачке које припадају једном истом квадрату странице 1cm.

4. На страници CD квадрата $ABCD$ дата је тачка L. Из темена A и C спуштене су нормале на праву BL и секу је, редом, у тачкама P и Q. Докажи да је $CP = DQ$.

5. Нека су a, b, c различите цифре и све различите од нуле. Да ли збир $\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}$ може бити једнак квадрату неког природног броја (број је квадрат неког природног броја ако је производ тог броја са самим собом)?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VI РАЗЕД

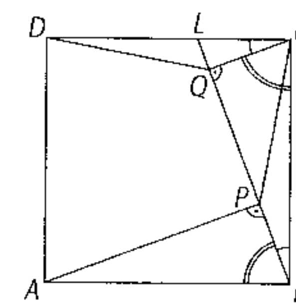
1. а) Производ је највећи када је позитиван, па треба изабрати четири негативна броја. Њихов производ је $\frac{5}{84}$ (**10 бодова**).

   б) Најмањи производ добијамо када изаберемо бројеве $-\frac{4}{7}, -\frac{7}{8}, \frac{2}{5}, -\frac{5}{14}$ и тада је производ $-\frac{1}{14}$ (**10 бодова**).

2. Како је $CC_1 = 3\text{cm}$, то је $AB = 6\text{cm}$ (**5 бодова**). Такође имамо да је $\measuredangle ABC = 75°$ па се задатак своди на конструкцију троугла ако су дати страница и два налегла угла (**5 бодова**). За тачно изведену конструкцију дати **10 бодова**.

3. Поделимо тај правоугаоник на 670 квадрата површине 1cm^2. Ако у сваки од тих квадрата распоредимо по 3 тачке, укупно 2010, у ма који квадрат да ставимо последњу тачку он ће садржати 4 тачке. (**20 бодова**).

4. (**ML XLIII-5**) $\Delta ABP \cong \Delta BCQ$ јер је $AB = BC$, $\measuredangle P = \measuredangle Q = 90°$ и $\measuredangle ABP = 90° - \measuredangle QBC = \measuredangle BCQ$ (**10 бодова**). Сада је $BP = CQ$ и $\measuredangle DCQ = \measuredangle PBC$ па како је $BC = CD$ то је $\Delta PBC \cong \Delta QCD$ (**10 бодова**). Значи, $DQ = CP$.



5. Како је
$\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba} = 222\cdot(a+b+c)$ (**5 бодова**)
$= 2\cdot3\cdot37\cdot(a+b+c)$ (**5 бодова**), то ће дати збир бити квадрат неког природног броја ако $a + b + c$ буде најмање једнако са $2 \cdot 3 \cdot 37$ што је немогуће (a, b, c су једноцифрени бројеви) (**10 бодова**).

Признавати и са максималним бројем бодова оценити свако тачно решење које није у кључу.

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
09.04.2011.

VII РАЗРЕД

1. Ако је $a^2 + b^2 - 2a + 6b + 10 = 0$, колико је $a^{2009} - 2009b$?

2. Хипотенузина висина у правоуглом троуглу дели хипотенузу на делови од 9cm и 16cm. Одреди обим и површину тог троугла.

3. Да ли је број $2009 \cdot 2011 - 48$ сложен? Образложи одговор.

4. Нека су P, Q, R, S средишта страница AB, BC, CD, DA редом конвексног четвороугла $ABCD$ и M тачка унутар тог четвороугла, таква да је $APMS$ паралелограм. Докажи да је четвороугао $MQCR$ паралелограм.

5. Одреди четвороцифрени број чији је збир цифара једнак са производом прве две цифре и једнак са двоцифреним завршетком тог четвороцифреног броја.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

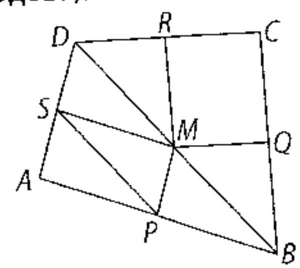
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VII РАЗЕД

1. (**ML XLIII-5**) Из $a^2 - 2a + 1 + b^2 + 6b + 9 = 0$ добијамо
$$(a-1)^2 + (b+3)^2 = 0 \text{ (**10 бодова**)}.$$
Одавде је $a = 1$ и $b = -3$ (**5 бодова**) па је $a^{2009} - 2009b = 6028$ (**5 бодова**).

2. Ако са a и b означимо катете троугла, а са h хипотенузину висину, тада је $a^2 = h^2 + 16^2$, $b^2 = h^2 + 9^2$ и $a^2 + b^2 = 25^2$. Одатле је $h = 12$cm, $a = 20$cm и $b = 15$cm (**10 бодова**), па је $O = 60$cm (**5 бодова**) и $P = 150\text{cm}^2$ (**5 бодова**).

3. Овај број је сложен јер је
$$2009 \cdot 2011 - 48 = (2010-1)(2010+1) - 48 = 2010^2 - 1 - 48$$
$$= 2010^2 - 49 = (2010-7)(2010+7) \text{ (**20 бодова**)}.$$

4. Из $\Delta APS \cong \Delta PBM$ и $\Delta APS \cong \Delta SMD$ следи $PS = DM = MB$ и $PS \parallel BM$ и $PS \parallel MD$. Према томе, B, M и D су колинеарне и M дели дијагоналу на два једнака дела (**15 бодова**). Сада је MR средња линија троугла BCD и $MR \parallel BC$ и $MR = \frac{1}{2}BC = QC$. Према томе $MQCR$ је паралелограм (**5 бодова**).



5. Тражени четвороцифрени број $\overline{abcd}$ задовољава услове $a + b + c + d = a \cdot b$ и $a + b + c + d = \overline{cd}$. Из другог услова добијамо да је $a + b = 9c$, односно $c = 1$ ($c = 2$ даје $a = b = 9$ што је у супротности са првим условом) (**4 бода**). Сада имамо да је $10 + d = a \cdot b$ па за $d = 4$ добијамо решење 2714 и 7214 (**8 бодова**), односно за $d = 8$ добијамо решења 3618 и 6318 (**8 бодова**).

Признавати и са максималним бројем бодова оценити свако тачно решење које није у кључу.

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА 09.04.2011.

VIII РАЗРЕД

1. Израчунај површину фигуре ограничене правом $y = 4$ и графиком функције $y = |x+1| + |x-1|$.

2. Одреди вредност израза $a - b$ ако је

$$a = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \cdots + \frac{2011^2}{4021} \text{ и } b = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \cdots + \frac{2010^2}{4021}.$$

3. Права која садржи теме A троугла ABC сече страницу BC у тачки M, тако да је $BM : CM = 2012 : 2011$. Тежишна дуж CC_1 сече праву AM у тачки S. Одреди однос дужи CS и SC_1.

4. Реши једначину у скупу природних бројева:

$$65x^3 + 4y^3 = 2011.$$

5. Правилна четворострана пирамида $ABCDS$ основне ивице a и висине H пресечена је са равни α. Раван α сече основне ивице AB, AD и бочну ивицу AS редом у тачкама M, N, P тако да је

$$AM : MB = 1 : 1,\ AN : ND = 2 : 1,\ AP : PS = 3 : 1.$$

Израчунај размеру запремина делова пирамиде које одређује раван α.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

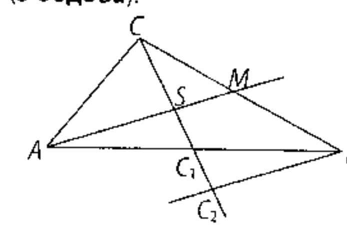
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VIII РАЗЕД

1. **(ML XLIV-5)** График функције ће имати три гране $y = \begin{cases} -2x, & x < -1 \\ 2, & -1 \le x < 1 \\ 2x, & x \ge 1 \end{cases}$ **(10 бодова)** и образује са правом $y = 4$ једнакокраки трапез. Темена трапеза су тачке са координатама $(-1, 2)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$ и $(-2, 4)$. Основице трапеза су дужине 2 и 4, а висина трапеза дужи-не 2, па је површина трапеза $P = \frac{4+2}{2} \cdot 2 = 6$ **(10 бодова)**.

2.

$$a - b = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2 - 1^2}{3} + \frac{3^2 - 2^2}{5} + \cdots + \frac{2011^2 - 2010^2}{4021}$$
$$= \frac{1}{1} + \frac{3 \cdot 1}{3} + \frac{5 \cdot 1}{5} + \cdots + \frac{4021 \cdot 1}{4021} = 2011 \text{ (20 бодова).}$$

3. Нацртајмо праву паралелну са AM која садржи тачку B и нека је пресек ове праве са CC_1 тачка C_2. Тада је $\Delta AC_1S \cong \Delta BC_1C_2$, па је $C_2C_1 = C_1S$. На основу Талесове теореме је $CM : MB = CS : 2SC_1$ **(15 бодова)** односно, $CS : SC_1 = 2011 : 1006$ **(5 бодова)**.



4. Бројеви x и $65x^3$ су исте парности, па x мора бити непаран број **(5 бодова)**. $x = 1$ није решење јер $2011 - 65$ није дељиво са 4, а $x \ge 5$ није решење јер је тада $65x^3 > 2011$ **(5 бодова)**. За $x = 3$ добијамо да је $y = 4$ решење дате једначине **(10 бодова)**.

5. Ако са H, B и V обележимо, редом, висину, површину основе и запремину почетне пирамиде, а са H_1, B_1 и V_1 висину, површину основе и запремину пирамиде $AMNP$, тада из $AP : PS = 3 : 1$ добијамо да је $H_1 = \frac{3}{4}H$ **(5 бодова)** а из $AM : MB = 1 : 1$, $AN : ND = 2 : 1$ добијамо да је $B_1 = \frac{1}{6}B$ **(5 бодова)**. Следи да је $V_1 = \frac{1}{8}V$ **(5 бодова)**, па је $V_1 : (V - V_1) = 1 : 7$ **(5 бодова)**.

Признавати и са максималним бројем бодова оценити свако тачно решење које није у кључу.