број: 120/4 година: 2024/25.

Тангента

ЧАСОПИС ЗА МАТЕМАТИКУ И РАЧУНАРСТВО ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Београд, 2025.

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
„ТАНГЕНТА”- часопис за математику и рачунарство
за ученике средњих школа.
Излази у четири броја током школске године.
Адреса: „Тангента”, Друштво математичара Србије,
Поштански фах 355, 11000 Београд
Телефон: (011)3036-818

Уплате на жиро рачун:
Друштво математичара Србије – број 340-13536-62.
На уплатници као сврху уплате назначити „За Тангенту”.

Главни и одговорни уредник: Војислав Петровић, Нови Сад
e-mail: vojpet@gmail.com
Технички уредник: Ненад Вуловић, Крагујевац
e-mail: vlnenad@gmail.com

Чланови редакције:
Александар Миленковић, Крагујевац
Ненад Стојановић, Крагујевац
Миодраг Живковић, Београд
Мирјана Катић, Београд

Сва права умножавања, прештампавања и превођења задржава Друштво математичара Србије

Штампа: **Донат Граф** д.о.о, Београд
На основу члана 23. став 2, тачка 9. Закона о порезу на додатну вредност („Регистар прописа”, број 11 – новембар 2004.) часопис се сматра серијском публикацијом од посебног интереса за науку и опорезије се по стопи од 8%. Корице freepik.

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51
ТАНГЕНТА : часопис за математику и рачунарство за ученике средњих школа : часопис за математику и рачунарство Друштва математичара Србије / главни и одговорни уредник Војислав Петровић. - 1995/1996, бр. 1- . - Београд : Друштво математичара Србије, 1995- (Београд : Донат граф). - 24 cm

Тромесечно.
ISSN 0354-656X = Тангента
COBISS.SR-ID 103642375

КОМБИНАТОРНИ БРОЈНИ НИЗОВИ

2. ЛИКАОВ, ТРИБОНАЧИЈЕВ, ПЕЛОВ И ПЕЛ-ЛИКАОВ НИЗ

Владимир Балтић

У првом наставку (Тангента број 112, [1]) смо кренули у причу о комбинаторним бројним низовима представљајући свакако најпознатији од њих – Фибоначијев низ.

У овом чланку ћемо се бавити са четири бројна низа: Ликаов[1], Трибоначијев, Пелов[2] и Пел-Ликаов. За сваки од низова навешћемо његову „интернет адресу“ у Онлајн енциклопедији целобројних низова (OEIS, [9]).

Напомена. Код нас се одомаћила потпуно погрешна транскрипција презимена поменутог француског математичара. Није нам познато од када и од кога потиче. Наиме, уместо погрешног Лукас, исправно је Лика с нагласком на а.

Ликаови бројеви

За Ликаове бројеве углавном се користи ознака L_n, где је $n \geq 0$. Дефинишу се следећом рекурентном релацијом

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \text{ за } n \geq 2, \tag{1}$$

при чему је $L_0 = 2$ и $L_1 = 1$.

Ликаови бројеви се у OEIS воде под ознаком A000032.

У наредној табели приказано је првих четрнаест чланова Ликаовог низа.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521

Приметимо да је рекурентна релација (1) иста као она за Фибоначијеве бројеве, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Једина разлика је у почетним условима који су код Фибоначијевих бројева: $F_0 = 0$ и $F_1 = 1$.

Познатим методама из рекурентних релација, из (1) и почетних услова добија се формула за L_nкоја је слична Бинеовој формули за Фибоначијеве бројеве

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{2}$$

[1] Едуар Лика (Édouard Lucas, 1842-1891) – француски математичар

[2] Џон Пел (John Pell, 1611-1685) – енглески математичар

НАГРАДНИ ЗАДАЦИ

Александар Миленковић, Ненад Стојановић

У рубрици „Наградни задаци” у сваком броју дајемо 20 задатака који су подељени у две групе. Задаци из прве групе су подељени по разредима и намењени су пре свега ученицима који се такмиче у Б категорији, док су задаци из друге групе намењени ученицима А категорије и нису подељени по разредима.

Позивамо све читаоце да шаљу предлоге задатака које сматрају посебно интересантним, као и сугестије које ће нам помоћи при састављању рубрике. Такође, позивамо све ученике да на адресу редакције шаљу откуцана или читко исписана решења постављених задатака; сваки задатак на засебном листу. Исто важи и за предлоге задатака. У наредним бројевима часописа публикују се комплетна решења раније постављених задатака, а на крају циклуса најуспешнији решавачи се награђују.

Предлоге и решења задатака слати на адресу:

„Тангента” – за рубрику „Наградни задаци”
Природно-математички факултет
Радоја Домановића 12
34000 Крагујевац

или **електронском поштом** (искључиво **pdf** формат) на адресу

tg_nagradnizadaci@yahoo.com

најкасније до 10.09.2025.

Прва група

Први разред

M2114. Марија је бацила две стандардне коцкице за игру. Збир бројева који се појаве на горњим странама коцкицама одређује пречник круга који она треба да нацрта. У колико различитих случајева ће мерни број површине тако нацртаног круга бити мањи од мерног броја обима тог круга?

Hello, World!
Суфиксни низ и примене

Миодраī Живковић
Maшемашички факулшеш, Беоīрад

1. Увод

Суфиксни низ је структура података која омогућује ефикасно извршавање неких важних операција са нискама (стринговима), као што су тражење речи, тражење понављања или палиндрома, тражење заједничке подниске за две или више ниски и слично.

Нека је задата ниска s дужине n. Нека $s[i..j]$ означава подниску те ниске са индексима од i до j, $0 \leq i \leq j \leq n-1$. Специјално, нека $S_i = s[i..n]$ означава суфикс ниске s који почиње од индекса i. Суфиксни низ SA_s (или краће SA, када се зна о којој нисци се ради) ниске s је низ индекса лексикографски сортираних суфикса, тј. низ индекса $SA[0]$, $SA[1]$, … , $SA[n-1]$ за који су задовољене неједнакости
$S_{SA[0]} < S_{SA[1]} < \cdots < S_{SA[n-1]}$:

- индекс најмањег суфикса (суфикса са рангом 0) је $SA[0]$,
- индекс наредног суфикса (суфикса са рангом 1) је $SA[1]$,
- …

Уопште, индекс i-тог најмањег суфикса (суфикса са рангом i) је $SA[i]$. Ако уведемо ознаку $rang[i]$ за индекс i-тог најмањег суфикса, $i = 0,1,\dots,n-1$, онда за два суфикса S_i, S_j важи $S_i < S_j$ ако и само ако је $rang[i] < rang[j]$. Дакле, ако знамо низ рангова, онда се упоређивање два суфикса (ниске!) *своди* на упоређивање два броја, њихових рангова. Из $SA[i] = j$ следи да суфикс S_j међу нискама S_0, S_1, … , S_{n-1} има ранг $i = rang[j]$. Низови SA и $rang$ су међусобно инверзне пермутације скупа $\{0,1,\dots,n-1\}$, тј. важи $SA[rang[j]] = rang[SA[j]] = j$, $0 \leq j \leq n-1$.

Нека је $lcp[i]$ дужина најдужег заједничког префикса (longest common prefix) ниски $S_{\mathrm{SA[i-1]}}$ и $S_{\mathrm{SA[i]}}$, два узастопна суфикса у сортираном редоследу ниске s, $i = 1,2,\dots,n-1$. Овај низ се, као што ћемо видети, често користи заједно са суфиксним низом ниске.

Пример 1. За ниску `mississippi` дужине $n = 11$ сортирани низ њених суфикса, суфиксни низ, низ рангова суфикса и низ lcp приказани су у табели 1. На пример, у првом реду табеле видимо да је најмањи суфикс $S_{10} =$`i`, па је $SA[0] = 10$. С друге стране, ниска $S_0 =$ `mississippi` после сортирања суфикса долази на индекс четири, па је $rang[0] = 4$. Најдужи заједнички префикс прве две ниске у сортираном редоследу суфикса, `i` и `ippi`, је `i`, ниска дужине 1, па је $lcp[1] = 1$.

ПРЕДЛОЗИ ЗА ЧЕТВРТИ ПИСМЕНИ ЗАДАТАК

Мирјана Катић

ГИМНАЗИЈЕ, СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

I РАЗРЕД

Линеарне једначине и неједначине; сличност;
тригонометрија правоуглог троугла

1. За које вредности реалног параметра a једначина $|x-1|+|x+1|=4ax$ нема решења?

2. Ако $m \in \mathbb{R}$, решити по x једначину

$$\frac{m(x^2+8)+6}{8-x^3}+\frac{m}{x-2}=\frac{m+2}{x^2+2x+4},$$

а затим одредити m тако да је $|x|<4$.

3. Колико целобројних решења има неједначина $\frac{x}{2(x+2)}-\frac{1}{x+2} \leq \frac{12}{x(x+2)}$?

4. Ако права одређена висином AD троугла ABC додирује описани круг тог троугла, доказати да је $AD^2=BC \cdot CD$.

5. Израчунати

$$\frac{2025\cos\alpha-2024\sin\alpha}{2024\cos\alpha+2025\sin\alpha}$$

ако је $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2025}{2024}$.

II РАЗРЕД

Тригонометријске функције

1. Колики је збир реалних решења једначине

$$11\cos 2x-3=3\sin 3x-11\sin x$$

на интервалу $[0,2\pi)$?

2. Наћи скуп решења неједначине $\log_{10}\operatorname{tg}x+\log_{10}\operatorname{tg}2x \geq 0$ на сегменту $[-\pi,\pi]$.

65. Међународна математичка олимпијада 2024.

Теодор фон Бурī, Миљан Кнежевић

Прошлогодишња, 65. по реду, Међународна математичка олимпијада (ММО) одржана је од 11. до 22. јула у граду Бату, у Великој Британији. На такмичењу је учествовало 609 ученика из 108 земаља света.

Ученици су два дана, прецизније 16. и 17. јула, радили по три задатка, од којих је сваки носио по 7 поена. Израда задатака је сваког дана такмичења трајала по 270 минута.

Шесточлани тим за 65. ММО је формиран након одржане 18. Српске математичке олимпијаде (СМО) и Изборног такмичења за ММО, на које је позвано 17 ученика. Изборно такмичење је одржано 17. и 18. маја на Математичком факултету, Универзитет у Београду.

На основу резултата СМО и Изборног такмичења није било могуће да се комплетна екипа Србије за ММО, јер су ученици Стеван Радивојевић из Математичке гимназија у Београду и Петар Стојиљковић из Гимназије „Светозар Марковић“ у Нишу поделили 6. и 7. место са по 32 поена. За њих је организовано додатно такмичење, на којем је успешнији био Стеван Радивојевић и тако се пласирао у екипу за ММО.

Такође, одређене су и две резерве, сходно Правилнику о такмичењима ученика средњих школа Друштва математичара Србије. Прва је, свакако, био Петар Стојиљковић, док је друга резерва била Нина Шушић ученица 8. разреда ОШ ”Вук Караџић”, Београд.

Напоменимо да је Нина на прошлогодишњој Јуниорској балканској математичкој олимпијади (најпрестижније математичко такмичење за ученике основних школа у региону) била првопласирана, освојивши 39 од максималних 40 поена, што представља изванредан резултат.

На 65. ММО Екипа Србије је наступила у следећем саставу:

СРБ1 Новак Деспотовић, 3. разред, Математичка гимназија, Београд;

СРБ2 Гвозден Лапчевић, 4. разред, Математичка гимназија, Београд;

НАШ ГОСТ

НЕОЧЕКИВАНО, А МОГУЋЕ

Ученицима, надареним за математику, погодују велики градови или центри који им омогућавају да своје математичке могућности развију до максимума. Сасвим другачије је у малим срединама где нема много помоћи „са стране“. Међутим, за велике и изразите таленте нема непремостивих препрека. Један од таквих, сигурно је Павле Младеновић професор Математичког факултета у Београду у пензији.

Пре него што се винуо у математичке висине, Павле је основна знања стекао у родној Грделици, малој варошици на југу Србије. Шта и како је било касније, сазнаћемо из разговора који следи.

Како си, још као основац, „сазнао“ да ти математика баш „лежи“?

Рођен сам у Грделици 1955. године, али сам првих шеснаест година живео на селу, у Ораовици код Грделице. Прва четири разреда основне школе (ОШ) завршио сам у Ораовици, а више разреде ОШ у Грделици. Био сам добар ђак и посебно волео математику, али се мој рад углавном сводио на израду домаћих задатака.

У осмом разреду наставник математике Младен Јовић ме је заинтересовао за математичка такмичења. На нижим нивоима такмичења некако сам се пласирао на Републичко такмичење. Тада ми је наставник математике дао пет-шест бројева Математичког листа који је издавало Друштво математичара Србије (ДМС). Читао сам те листове две недеље. На Републичком такмичењу у Београду освојио сам прву награду. После тога сам и на Савезном такмичењу ученика ОШ тадашње СФРЈ у Београду такође освојио прву награду.

ТЕОНОВА ЛЕСТВИЦА

Јенс Карсшенсен, Фредериксберī (Данска)
Алија Муминаīић, Фредериксберī (Данска)

Теон из Смирне (око 70. - око 135. н.е) био је грчки филозоф и математичар. О његовом животу се веома мало зна, нису чак познате ни тачне године рођења и смрти. Писао је о радовима математичара свога времена, а понајвише о чувеном Платону. Нажалост, већина списа није сачувана.

Од сачуваних дела најпознатије је *О машемашици корисној за разумевање Плашона*. На основу наслова, могло би се закључити да је то збирка коментара Платонових списа. Међутим, то је један уџбеник намењен студентима математике. Ево шта о томе пише Р. Бол у својој монографији [3].

> … Још један уџбеник из аритметике састављен на скоро исти начин као Никомахов. Представља Теонов први рад из математике написан у циљу бољег разумевања Платонових списа. …

Један од Теонових изума је тзв. *Теонова лесшвица* помоћу које се може одредити приближна вредност $\sqrt{2}$. Име је добила по свом изгледу јер подсећа на лествицу (мердевине). Састоји се од две колоне бројева при чему су у свакој врсти по два броја. На сл. 1 је Теонова лествица са својих шест врста (пречки).

1	1
2	3
5	7
12	17
29	41
70	99
⋮	⋮

(а)

i	a_i	b_i
1	1	1
2	2	3
3	5	7
4	12	17
5	29	41
6	70	99
⋮	⋮	⋮

(б)

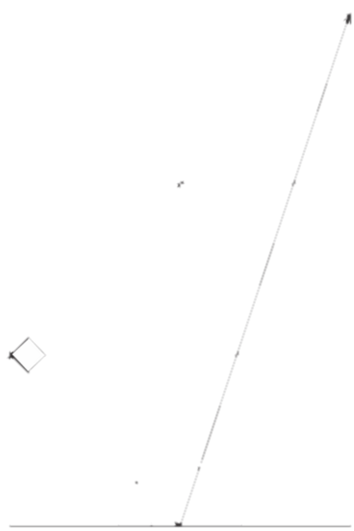
Сл. 1.

ДОКАЗ БЕЗ РЕЧИ

Ненад Стојановић

Доказ без речи, назив је за методу визуелног „доказивања“ математичких тврђења. Појавио се у прошлом веку и брзо стекао широку популарност. Представља спој уметности и математике. Бројне речи и ознаке замењује слика која својим садржајем све објашњава.

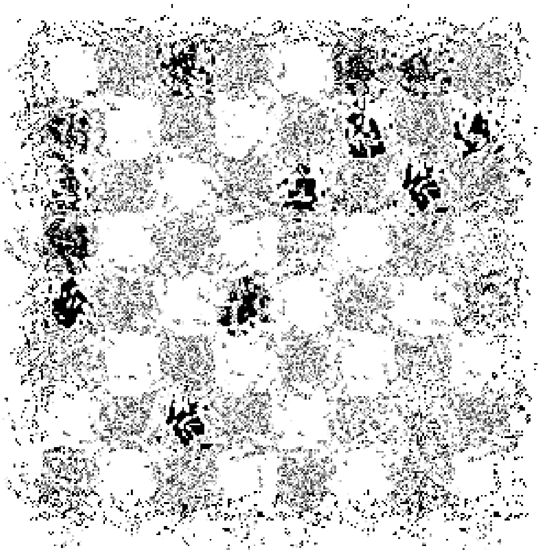
Тригонометријски идентитет



$\operatorname{tg} \theta_i = i \ , \ \ i = 1, 2, 3$

НАГРАДНИ ШАХОВСКИ ЗАДАТАК

Тангента 119 - решење



Бели вуче и матира у 3 потеза

1. Dh7+! Kh7 2. hg6++ Kg6 3. Le4 мат

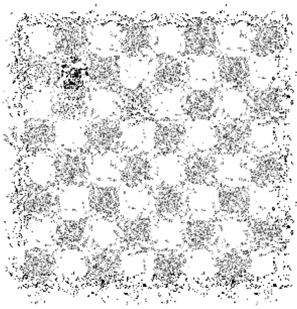
ШАХОВСКА СТРАНА

БОРБА ПРОТИВ ПАТА

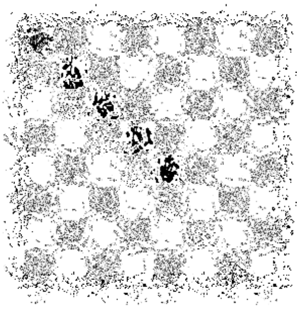
Као што је познато, пат је ситуација у шаху кад краљ једне стране није под ударом неке противничке фигуре, а та страна не може да изведе ниједан дозвољен (легалан) потез. Пат се рачуна као реми и свака страна добија по пола поена.

Некад је пат једини начин да се једна страна спасе од пораза. Природно, супарник би то да спречи. Питање је како?

Нажалост, кад је то и могуће, нема општег упутства које увек „пали“. То потврђују примери који следе.



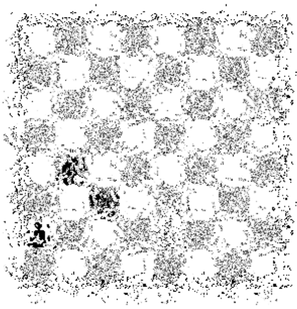
Црни је на потезу и проба да се спасе са **1. ... Ka8**. Сад 2. Kc6(c7) води пату. Бели то може да спречи са **2. Kc5(d5, d7) Kb7 3. a8D+! Ka8 4. Kc6 Kb8 5. b7 Ka7 6. Kc7** с добитком.



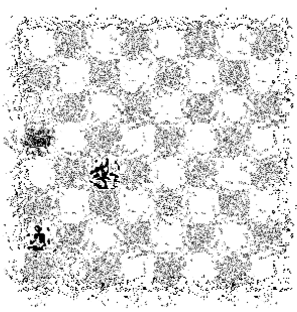
Црни се добро „укопао“ и

9. Kc5 Kb7. То је практично позиција из првог примера с белим на потезу (црни пешак c6 је небитан). **10. a8D+! Ka8 11. Kc6 Kb8 12. b7 Ka7 13. Kc7** и бели добија.

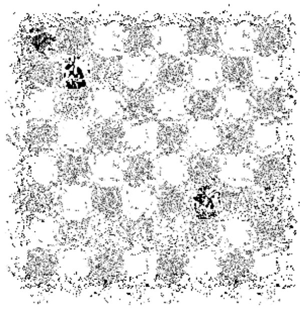
Некад пат „лебди у ваздуху“ и потребно је да се уочи на време. Ево два примера на ту тему.



Бели је на потезу, али не може да заустави црног а-пешака. Узданице су му h-пешак и неспретни положај црног краља. Дакле, **1. h6 a1D**. Сада тренутак непажње 2. h8D+? води пату 2. ... Kb3 3. Da1. Правилно је **2. h8L+! Kb3 3. La1**, нема пата и бели добија. Истина, ако зна како се матира ловцем и скакачем.



Бели је на потезу, а црни а-пешак је поново незаустављив. Решава мини промоција, слич-



Црни краљ је у пату, а његов „полудели топ“ би непрестано да шахира белог краља. Бели то оштроумно спречава.

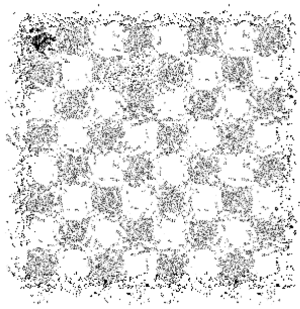
Најпре, поставља препреке топу. **1. e3! Te3+ 2. c3! Tc3+**.

Потом почиње јурњава око белих пешака, налик на слалом. **3. Ka2 Ta3+ 4. Kb1 Ta1+ 5. Kc2 Tc1+ 6. Kd3 Tc3+ 7. Ke2 Te3+ 8. Kf1 Te1+ 9. Kg2 Tg1+ 10. Kf3 Tg3+**.

А онда натраг, истим путем. **11. Ke2 Te3+ 12. Kd1 Te1+ 13. Kc2 Tc1+ 13. Kb3 Tc3+ 14. Ka2 Ta3+**.

Сад се види шта је бели смислио. „Прорадио“ је топ са h3 и **15. Ta3 мат**.

НАГРАДНИ ЗАДАТАК



Бели вуче и матира у 3 потеза

YU ISSN 0354-656X