

Тангента

број 119/3 година: 2024/25.

ЧАСОПИС ЗА МАТЕМАТИКУ И РАЧУНАРСТВО ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Београд, 2025.

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
„ТАНГЕНТА”- часопис за математику и рачунарство
за ученике средњих школа.

Излази у четири броја током школске године.
Адреса: „Тангента”, Друштво математичара Србије,
Поштански фах 355, 11000 Београд
Телефон: (011)3036-818

Уплате на жиро рачун:
Друштво математичара Србије – број 340-13536-62.
На уплатници као сврху уплате назначити „За Тангенту”.

Главни и одговорни уредник: Војислав Петровић, Нови Сад
e-mail: vojpet@gmail.com

Технички уредник: Ненад Вуловић, Крагујевац
e-mail: vlnenad@gmail.com

Чланови редакције:

Александар Миленковић, Крагујевац	Ненад Стојановић, Крагујевац
Миодраг Живковић, Београд	Мирјана Катић, Београд

Сва права умножавања, прештампавања и превођења задржава Друштво математичара Србије

Штампа: **Донат Граф** д.о.о, Београд

На основу члана 23. став 2, тачка 9. Закона о порезу на додатну вредност („Регистар прописа”, број 11 – новембар 2004.) часопис се сматра серијском публикацијом од посебног интереса за науку и опорезије се по стопи од 8%. Корице freerik.

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51

ТАНГЕНТА : часопис за математику и рачунарство за ученике средњих школа : часопис за математику и рачунарство Друштва математичара Србије / главни и одговорни уредник Војислав Петровић. - 1995/1996, бр. 1- . - Београд : Друштво математичара Србије, 1995- (Београд : Донат граф). - 24 cm

Тромесечно.
ISSN 0354-656X = Тангента
COBISS.SR-ID 103642375

ГРАНИЧНИ СЛУЧАЈЕВИ НЕКИХ НЕЈЕДНАКОСТИ

Радоје Шћејановић, Подјорица (Црна Гора)

У овом чланку разматраћемо граничне случајеве неких познатих неједнакости. Кроз низ примера, приказаћемо како се оне могу користити у настави математике у средњој школи, као што су решавање једначина и налажење екстремних вредности.

I Абсолютна вредност

Као што је познато, апсолутна вредност реалног броја a , $|a|$, дефинише се на следећи начин

$$|a| = \begin{cases} a & \text{за } a \geq 0 \\ -a & \text{за } a < 0 \end{cases}. \quad (1)$$

Из тога следи да је $|a| \geq 0$ за свако a , те важи тврђење

Теорема 1. За реалне бројеве a и b важи $|a| + |b| = 0$ ако и само ако је $a = 0$ и $b = 0$.

□

Ова чињеница се користи у следећем примеру.

Пример 1. Решити једначине:

(а) $|x^2 - 7x + 10| + |x^2 + x - 6| = 0$; (б) $|x^2 - 5x + 6| + |x - 4| = 0$.

Решење. (а) С обзиром на теорему 1, дата једначина је еквивалентна са системом једначина

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 10 &= 0 \\ x^2 + x - 6 &= 0. \end{aligned}$$

Решења прве једначине су $x_1 = 2$ и $x_2 = 5$, док су друге $x_3 = 2$ и $x_4 = -3$.

НАГРАДНИ ЗАДАЦИ

Александар Миленковић, Ненад Стојановић

У рубрици „Наградни задаци” у сваком броју дајемо 20 задатака који су подељени у две групе. Задаци из прве групе су подељени по разредима и намењени су пре свега ученицима који се такмиче у Б категорији, док су задаци из друге групе намењени ученицима А категорије и нису подељени по разредима.

Позивамо све читаоце да шаљу предлоге задатака које сматрају посебно интересантним, као и сугестије које ће нам помоћи при састављању рубрике. Такође, позивамо све ученике да на адресу редакције шаљу откуцана или читко исписана решења постављених задатака; сваки задатак на засебном листу. Исто важи и за предлоге задатака. У наредним бројевима часописа публикују се комплетна решења раније постављених задатака, а на крају циклуса најуспешнији решаваачи се награђују.

Предлоге и решења задатака слати на адресу:

„Тангента” – за рубрику „Наградни задаци”
Природно-математички факултет
Радоја Домановића 12
34000 Крагујевац

или **електронском поштом** (искључиво **pdf** формат) на адресу

tg_nagradnizadaci@yahoo.com

најкасније до 15.04.2025.

Прва група

Први разред

M2094. Доказати да је бар један члан низа, који садржи 79 узастопних

Hello, World!
Алфа Геометрија у акцији

Ана Пешиуренко
Математички институт Универзитета националне
комисије за образовање, Краков, Пољска

Увод

Можете ли да замислите свет у коме рачунари самостално доказују геометријске теореме и решавају тешке проблеме брже од најбољих математичара? До пре неколико година ово је личило на научну фантастику – на крају крајева, доказивање теорема захтева не само прецизност, него и креативно размишљање и интуицију, што је одувек била област резервисана за људе. По свему судећи, вештачка интелигенција наставља са померањем граница могућег.

Један од најнапреднијих система у овој области је Алфа Геометрија (AlphaGeometry), кога је развила фирма DeepMind. Алфа Геометрија је заснована на формалном аутоматском резонувању и техникама машинског учења. Сва правила извођења у Алфа Геометрији примењују се на логички начин, а избор помоћних тачака контролише машинско учење и велики обучавајући скуп. Захваљујући овој интеграцији програм је у стању да решава геометријске проблеме тежине нивоа ММО (међународних математичких олимпијада) користећи стотине хиљада геометријских тврђења и откривајући доказе које човек није у стању да пронађе. Импресивно, зар не?

Ипак, да ли је коришћење Алфа Геометрије заиста тако једноставно? Може ли се она рутински користити за решавање геометријских проблема? Сврха овог текста је да одговори на ова и нека друга питања.

1. Који улазни језик користи Алфа Геометрија?

Алфа Геометрија је замисљена као специјализовани систем за представљање синтетичке геометрије (геометрије која има аксиоматски приступ објектима), коришћењем симболичке логике са правилима која одговарају интуитивном закључивању математичара. Алфа Геометрија се заснива на специјализованим основним геометријским лемама које су већ

ПРЕДЛОЗИ ЗА ТРЕЋИ ПИСМЕНИ ЗАДАТАК

Мирјана Кајић

ГИМНАЗИЈЕ, СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

I РАЗРЕД

Круи; четвороиго; конструије; рационални алгебарски изрази

1. Конструисати троугао ABC такав да су тежишне дужи BB_1 и CC_1 подударне редом датим дужима t_b и t_c , а угао $\sphericalangle BAC$ подударан датом углу α .

2. Упростити израз:

$$\frac{a^3 + b^3 + a(b^2 + c^2) + b(a^2 + c^2)}{a^3 - b^3 + a(b^2 + c^2) - b(a^2 + c^2)}.$$

3. Делтоид $ABCD$, чије су странице $AB = BC = 3 \text{ cm}$ и $AD = CD = 4 \text{ cm}$, уписан је у круг. Колика је дужина краће дијагонале тог делтоида?

4. Око круга полупречника 2 описан је једнакокраки траpez површине 20. Колика је дужина крака тог трапеза?

5. Колики је број различитих полинома облика $x^2 + px + q$, где $p, q \in \mathbb{R}$, који су делитељи полинома $x^4 - 3x^2 + 2$?

II РАЗРЕД

Системи квадранних једначина; ирационалне једначине и неједначине; експоненцијална и логаритамска функција

1. Колики је збир свих реалних решења једначине

$$\sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{2x-4}?$$

2. Колики је број целобројних решења неједначине

$$1 - x < \sqrt{6 + x - x^2}?$$

3. Колики је збир свих реалних решења једначине

$$1 + 9^{\sqrt{x^2+x}+0,5} = 4 \cdot 3^{\sqrt{x^2+x}}?$$

4. Колика је вредност израза

$$3^{\log_{\sqrt{5}} 7 \cdot \log_9 25}?$$

НАШ ГОСТ

МАТЕМАТИЧКИ ТАНДЕМ

Као што је познато, тимски рад је присутан у многим делатностима. Неретко, колеге по струци заједнички се баве истраживачким радом у истој области допуњавајући једни друге. Тако је и у математици.

Кад су у питању наши математичари, немогуће је да се не помене надалеко познати „двојац“ Врећица – Живаљевић. Попричајмо с њима.



Синиша Врећица



Раде Живаљевић

Вероватно сте, још од „малих ногу“, испољили велики интерес за математику. Шта вас је привукло тој „краљици наука“?

С. В. За математику сам се нарочито заинтересовао након петог (или шестог) разреда основне школе када ми је за време распуста мајка (иначе наставница математике) донела неких 100 тежих задатака пореклом из Русије које је добила од једног колеге. Наредних десетак дана сам решавао те задатке успут усвајајући градиво математике за наредне разреде основне школе.

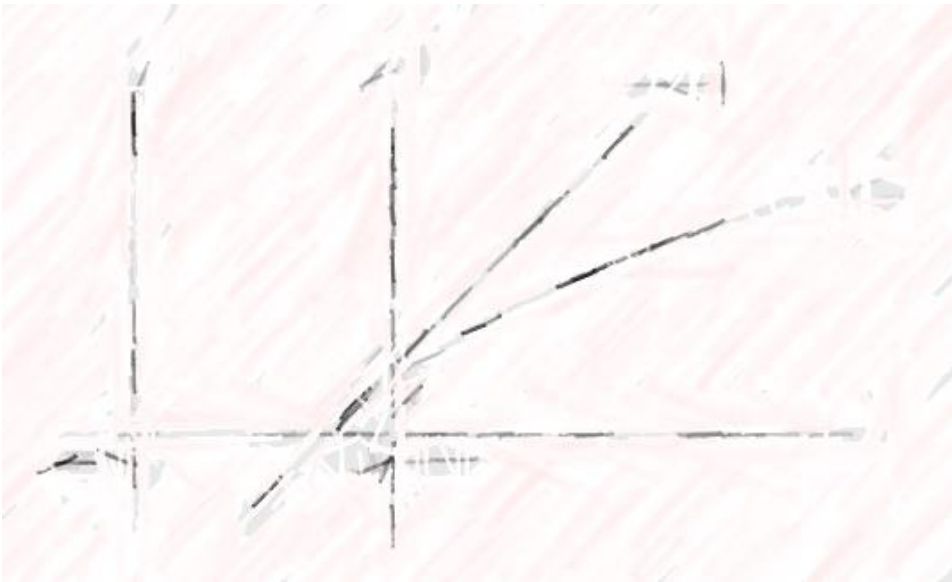
Било је то „заразно“ искуство. Након тога сам се претплатио на Математички лист у основној школи и Математичко-физички лист у гимнази-

ДОКАЗ БЕЗ РЕЧИ

Ненад Стојановић

Доказ без речи, назив је за методу визуелног „доказивања“ математичких тврђења. Појавио се у прошлом веку и брзо стекао широку популарност. Представља спој уметности и математике. Бројне речи и ознаке замењује слика која својим садржајем све објашњава.

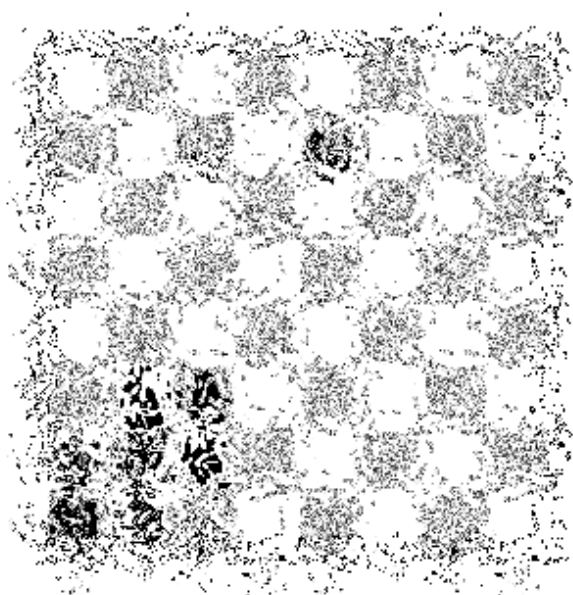
Неједнакост $\pi^e < e^\pi$



$$\ln \frac{\pi}{e} = PQ < PR = \frac{\pi}{e} - 1$$

$$\ln \pi - 1 < \frac{\pi}{e} - 1$$

НАГРАДНИ ШАХОВСКИ ЗАДАТАК
Тангента 118 - решење



Бели вуче и матира у 3 потеза

Редакцији није стигло ниједно решење, тако да нема награђених.

ШАХОВСКА СТРАНА

ШАХОВСКИ GOAT

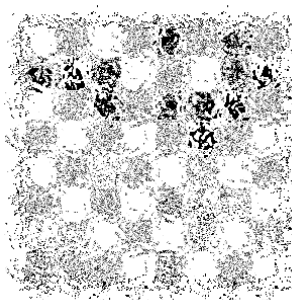
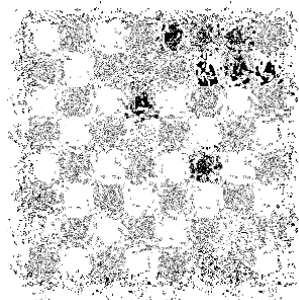
Енглеска скраћеница GOAT (Greatest Of All Times), у преводу „најбољи свих времена“, обично се користи да означи врхунског спортисту. Ако бисмо се окренули шаху, не би било нимало лако да утврдимо ко је GOAT међу шахистима.

Ипак, у најужој избор сигурно би ушао генијални Американац и бивши светски првак Роберт Фишер.

Као и сви шаховски великани, Фишер је суверено владао свим фазама партије. Могао је свако отварање да одигра на највишем нивоу. У средишњици му није било равнот, било да су у питању комбинациона било позициона решења. А завршнице је играо савршено, попут старих мајстора Капабланке и Рубинштајна или савремених компјутерских програма.

Подсетимо се неких упечатљивих комбинација.

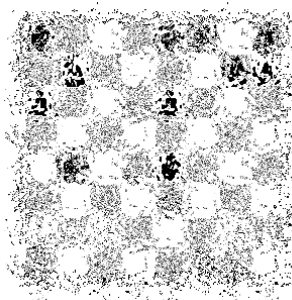
У једном од бројних окршаја са својим великим ривалом Решењским (бели) Фишер је био на потезу у овој позицији.



Материјал је једнак, али црни, који не на потезу, изразио је надмоћан. Све фигуре су му развијене, док бели топ још увек „чучи“ у ћошку.

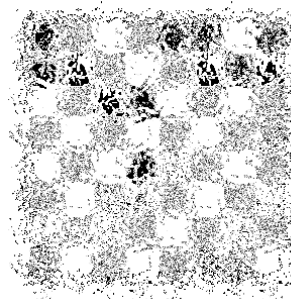
Ненадано, следи муњевита егзекуција. **1. ... Te3! 2, Te3 Te3 3. Ke3 Df4+!! 4. Kf4 Lh6 мат!** Не помаже ни 4. Kf2. После 4. ... Sg4+ 5. Kg2 Se3+ 6. Kf2 Sd4 7. Dh1 Sg4+ 8. Kg2 Sf3 црни лако добија.

У партији с Делијем (црни), Фишер умешно користи што је црни краљ још у центру.



1. Tf8! Df8 2. Da4+! Тешко видљив потез који иде „у накету“ с претходним и после којег црни предаје. У чему је ствар?

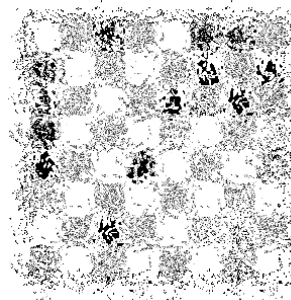
напад против Бенкеа.




Црни је рачунао на **1. e5 f5!** и како виси бела дама на h5, стиже да се одбрани. На његову жалост, бели налази проблемски потез **1. Tf6!** Пешак f7 је сада блокиран и на **1. ... Lf6** или **1. ... dc** следи **2. e5** с неодољивим матом на h7. Не вреди ни **1. ... h6** због истог **2. e5** с претњом **3. Th6+ Kg8 4. Th8+ Lh8 5. Dh7 мат.**

Бенке је покушао **1. ... Kg8 2. e5 h6** надајући се да ће после **3. Td6** (на **3. Th6 f5**) **De5!** успети да се одбрани. Али, након **3. Se2**, предаје. Заиста, на **3. ... Sb5 4. Df5**, на **3. ... Lf6 4. Dh6**, а на неки други потез **4. Td6**.

НАГРАДНИ ЗАДАТАК



- 
- 1 *Радоје Шћейановић*, Гранични случајеви неких неједнакости
16 *Александар Миленковић, Ненад Сћојановић*, Наградни задаци
34 *Ана Пећиуренко*, Hello World! – Алфа Геометрија у акцији
46 *Мирјана Каћић*, Предлози за трећи писмени задатак
53 *Војислав Пећровић*, Наш гост – Математички тандем
60 *Ненад Сћојановић*, Доказ без речи
61 Наградни шаховски задатак
63 *Војислав Пећровић*, Шаховска страна, Шаховски goat