

број: 117/1 година: 2024/25.

Тангента

ЧАСОПИС ЗА МАТЕМАТИКУ И РАЧУНАРСТВО ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Београд, 2024.

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
„ТАНГЕНТА”- часопис за математику и рачунарство
за ученике средњих школа.

Излази у четири броја током школске године.
Адреса: „Тангента”, Друштво математичара Србије,
Поштански фах 355, 11000 Београд
Телефон: (011)3036-818

Уплате на жиро рачун:
Друштво математичара Србије – број 340-13536-62.
На уплатници као сврху уплате назначити „За Тангенту”.

Главни и одговорни уредник: Војислав Петровић, Нови Сад
e-mail: vojpet@gmail.com

Технички уредник: Ненад Вуловић, Крагујевац
e-mail: vlnenad@gmail.com

Чланови редакције:

Александар Миленковић, Крагујевац	Ненад Стојановић, Крагујевац
Миодраг Живковић, Београд	Мирјана Катић, Београд

Сва права умножавања, прештампавања и превођења задржава Друштво математичара Србије

Штампа: **Донат Граф** д.о.о, Београд

На основу члана 23. став 2, тачка 9. Закона о порезу на додатну вредност („Регистар прописа”, број 11 – новембар 2004.) часопис се сматра серијском публикацијом од посебног интереса за науку и опорезије се по стопи од 8%. Корице freerik.

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51

ТАНГЕНТА : часопис за математику и рачунарство за ученике средњих школа : часопис за математику и рачунарство Друштва математичара Србије / главни и одговорни уредник Војислав Петровић. - 1995/1996, бр. 1- . - Београд : Друштво математичара Србије, 1995- (Београд : Донат граф). - 24 cm

Тромесечно.
ISSN 0354-656X = Тангента
COBISS.SR-ID 103642375

1.

$$A(a, b) = \frac{a+b}{2} \quad K(a, b) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$$A(a, b) \leq K(a, b),$$

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

$$a = b.$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \right) \geq \frac{a+b}{2}. \quad (1)$$

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$$

$$a^3 + b^3 \geq a(a+b)$$

$$(a+b)(a^2 - a + b^2) \geq a(a+b)$$

$$a^2 - a + b^2 \geq a$$

$$(a-b)^2 \geq 0.$$

(1).

$$A\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right) \geq A(a, b),$$

$$a = b.$$

$$A(a, b) \leq K(a, b) \quad A(a, b) \leq A\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right)$$

$$K(a, b) \leq A\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right).$$

НАГРАДНИ ЗАДАЦИ

Александар Миленковић, Ненад Стојановић

У рубрици „Наградни задаци” у сваком броју дајемо 20 задатака који су подељени у две групе. Задаци из прве групе су подељени по разредима и намењени су пре свега ученицима који се такмиче у Б категорији, док су задаци из друге групе намењени ученицима А категорије и нису подељени по разредима.

Позивамо све читаоце да шаљу предлоге задатака које сматрају посебно интересантним, као и сугестије које ће нам помоћи при састављању рубрике. Такође, позивамо све ученике да на адресу редакције шаљу откуцана или читко исписана решења постављених задатака; сваки задатак на засебном листу. Исто важи и за предлоге задатака. У наредним бројевима часописа публикују се комплетна решења раније постављених задатака, а на крају циклуса најуспешнији решаваачи се награђују.

Предлоге и решења задатака слати на адресу:

„Тангента” – за рубрику „Наградни задаци”
Природно-математички факултет
Радоја Домановића 12
34000 Крагујевац

или електронском поштом (искључиво pdf формат) на адресу

tg_nagradnizadaci@yahoo.com

најкасније до 20.11.2024.

Прва група

Први разред

M2054. Дат је једнакокраки троугао ABC такав да је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = 70^\circ$. Тачка D је подножје висине из темена A на страницу BC . Тачка E припада краку AB , тако да је $\sphericalangle ACE = 10^\circ$. Ако се дужи CE и AD секу у тачки F , доказати да је $CF = BC$.

M2055. Нека су k и m природни бројеви такви да је $\frac{1}{2}(\sqrt{k + 4\sqrt{m}} - \sqrt{k})$ цео број. Доказати да је број \sqrt{k} рационалан.

Hello, World!

Логичка испуњаљка - нонограм

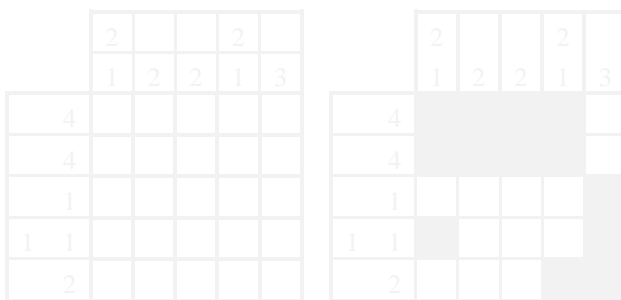
Владимир Јанковић, Миодраг Живковић
Математички факултет, Београд

1. Увод

У овом чланку ћемо разматрати игру која је у последње време присутна у многим енигматским часописима и на интернету (види нпр. <https://www.puzzle-nonograms.com/>):

Датa је табела $m \times n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Свакој линији те табеле (врсци или колони) корелиран је коначан низ природних бројева. Треба обојити црном бојом нека од ћелија те табеле, тако да низ дужина црних семената сваке линије буде једнак низу бројева који одговарају тој линији. При томе, узастопни црни семенати морају бити раздвојени бар једним белим ћелијем, а број црних семената може да буде и нула.

На слици 1 са леве стране је пример проблема димензије 5×5 , а са десне стране је његово решење. Низови бројева који одговарају врстама уписани су лево од одговарајућих врста, а низови бројева који одговарају колонама уписани су изнад одговарајућих колона.



Слика 1. Пример проблема и његовог решење.

Термин нонограм означава игру, али тим термином се понекад оз-

ПРЕДЛОЗИ ЗА ПРВИ ПИСМЕНИ ЗАДАТАК

Мирјана Кајић

ГИМНАЗИЈЕ, СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

I РАЗРЕД

Логика и скупови; цели бројеви; реални бројеви

1. Међу следећим исказним формулама колико има таутологија?

$$(F1) (\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q);$$

$$(F2) \neg(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (p \wedge q));$$

$$(F3) (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q);$$

$$(F4) \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg q).$$

2. На скупу целих бројева дефинисана је релација $x \rho y \Leftrightarrow y < x + 2024$. Које од понуђених особина она задовољава: рефлексивност, симетричност, антисиметричност транзитивност?

3. Ако је $A = \{2024, 2025\}$ и $B = \{2024, \{2024\}, \{2024, 2025\}\}$, одредити скуп $B \setminus A$?

4. Броју 517 дописане су две цифре са десне стране тако да је добијени петодигрени број дељив са 6, 7 и 9. Колики је производ дописаних цифара?

5. Колико има простих бројева p таквих да је број $11p + 1$ потпун квадрат природног броја?

II РАЗРЕД

Стејеновање и кореновање; комплексни бројеви

1. Рационалисати израз

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{6} - \sqrt{24} - \sqrt{46} + \sqrt{108}}.$$

2. Колика је вредност израза

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА

Српска математичка олимпијада и Изборна такмичења 2024.

Владимир Балџић, Миљан Кнежевић

Овогодишња, 18. по реду, Српска математичка олимпијада (СМО) одржана је 3. и 4. априла у Математичкој гимназији у Београду. На такмичењу је учествовало 32 ученика изабраних на основу резултата Државног такмичења. Ученици су у 2 дана радили по 3 задатка за по 270 минута.

Прва два ученика су освојила прву награду (Гвозден Лапчевић и Новак Деспотовић), следећих седам другу награду (Страхиња Сврзић, Михаило Јанчевић, Стефан Шебез, Стеван Радивојевић, Владимир Бранковић, Ана Илић и Петар Стојиљковић) и наредних осам трећу награду (Марко Трајковић, Вукашин Бабић, Владимир Лукић, Вања Јеловац, Јован Стојадиновић, Данило Ранђеловић, Нина Шушић и Урош Костадиновић). Ти ученици су се уједно пласирали на Изборно такмичење (ИТ) за Међународну математичку олимпијаду (ММО).

Још 9 ученика (Ања Тешевић, Михаило Радовановић, Данило Миленковић, Богдан Здравковић, Милена Пантић, Алекса Данић, Вук Ристић, Ива Живковић и Михаило Лекић), они који су комплетно урадили бар један задатак, похваљени су.

Додајмо да је разлика између 12. и 21. пласираног била је само 2 поена, тако да су о учешћу на Изборном такмичењу за ММО одлучивали детаљи у исписивању решења.

На основу резултата СМО одређена је екипа Србије за Балканску математичку олимпијаду (БМО). Екипу су чинили:

СРБ 1 Гвозден Лапчевић, 4. разред Математичке гимназије у Београду;

СРБ 2 Новак Деспотовић, 3. разред Математичке гимназије у Београду;

СРБ 3 Страхиња Сврзић, 4. разред Гимназије „Светозар Марковић” у Нишу;

НАШ ГОСТ

МАЂАРСКА ШКОЛА

Ако сте математичар, ако сте посебно заинтересовани за комбинаторику и ако желите да своја знања да проширите и унапредите до највишег нивоа, не морате далеко. Ту у непосредном суседству, наћи ћете све што вам је потребно.

Погађате, то су Мађарска и њена чувена математичка школа. Један од њених великих представника сигурно је професор Ђула Катона сјајни математичар и наш велики пријатељ.

Професор Катона је члан Европске академије наука, стални члан Мађарске академије наука и спољњи члан Бугарске академије наука. Тренутно је на позицији професора емеритуса на Математичком институту Алфред Рењи.

Члан је редакција више светских математичких часописа највишег ранга као што су *Discrete Mathematics*, *Combinatorica* и *Acta Mathematica Hungarica*.

Поврх математике, професор Катона има широк круг интересовања. Прави је полиглота. Говори и служи се са око 40 језика. Веома је добар музичар, свира виолину и флауту. У младости је успешно играо шах и био члан националног тима за узраст 13-14 година. Једно време, такође успешно, бавио се жонглирањем.



Професоре Катона, веома рано сте испољили математички талент. Да ли се сећате својих првих математичких корака?

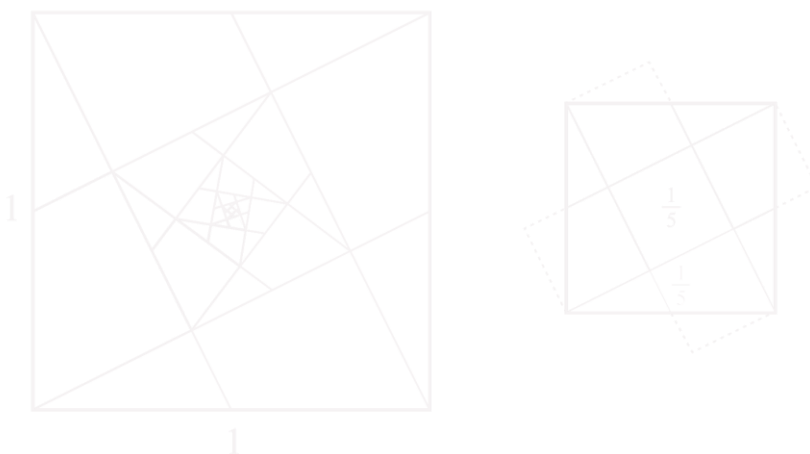
Да, сећам се, било је то далеке 1945. године кад сам имао нешто мање од 4 године и кад су совјетске трупе, ослобађајући Мађарску од фашизма, ушле у Будимпешту. Једног дана, родитељи су ме, сумњајући да сам оболео од шарлаха, повели у болницу. Међутим, на улици су совјетски вој-

ДОКАЗ БЕЗ РЕЧИ

Ненад Стојановић

Доказ без речи, назив је за методу визуелног „доказивања“ математичких тврђења. Појавио се у прошлом веку и брзо стекао широку популарност. Представља спој уметности и математике. Бројне речи и ознаке замењује слика која својим садржајем све објашњава.

Сума геометријског реда



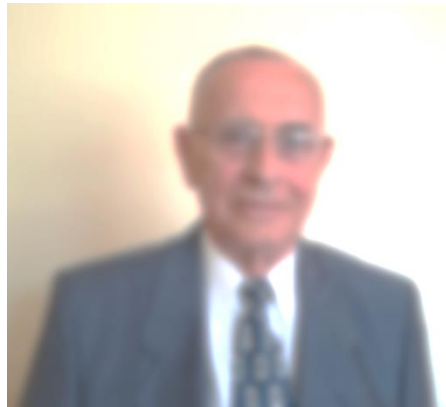
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \dots = \frac{1}{4}$$

ПРОФЕСОР ДР ВЛАДИМИР МИЋИЋ

(1936 – 2024)

Почетком августа ове године преминуо је др Владимир Мићић, пензионисани редовни професор Грађевинског факултета у Београду, ранији председник и први почасни члан Друштва математичара Србије, један од његових најактивнијих чланова у протеклих 60 година. Приказаћемо овде неке од најважнијих детаља његове пребогате биографије.

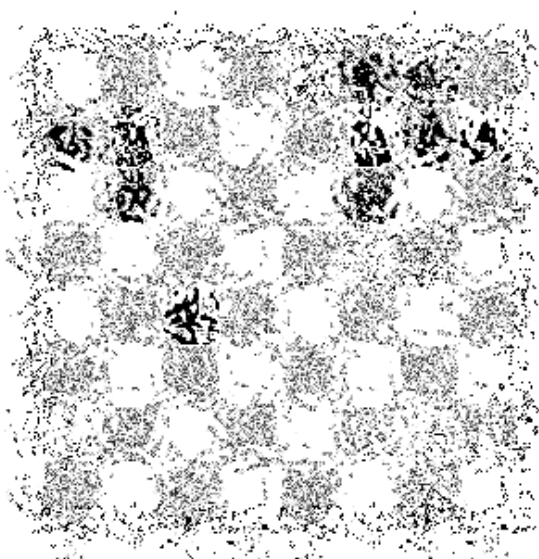
Владимир Мићић је рођен 20. децембра 1936. године у Марибору. Основну школу завршио је у Белом Манастиру, а гимназију је похађао као ђак-путник у Осијеку. Дипломирао је и магистрирао на математичкој групи Природно-математичког факултета у Београду. На научном усавршавању био је на Универзитету „Ломоносов“ у Москви, а резултат тог усавршавања била је одбрањена докторска дисертација *Квазиконформна пресликавања и коресијонденција ираница у R^n* . Као и докторска теза, научни радови Владимира Мићића припадају области Комплексне анализе.



На Грађевинском факултету у Београду радио је, на редовним и последипломским студијама (у свим звањима, од асистента до редовног професора) од 1961. године до пензионисања, при чему је више пута у студентским анкетама проглашаван за најбољег асистента, односно професора.

Од оснивања Математичке гимназије, Владимир Мићић је био међу првим младим асистентима који су одабрани да раде с првим генерацијама ове школе. Влада је унео сав свој ентузијазам, радни елан, љубав према математици, као и педагошке способности у рад с гимназијалцима жељним

НАГРАДНИ ШАХОВСКИ ЗАДАТАК
Тангента 116 - решење



Бели вуче и матира у 3 потеза

1. Sh6+! Dh6 (1... Kh8 2. Tf8 мат) 2. Tf8+ Kf8 3. Dd8 мат

ШАХОВСКА СТРАНА

ЦРНОГОРСКИ КРАЉ ШАХА

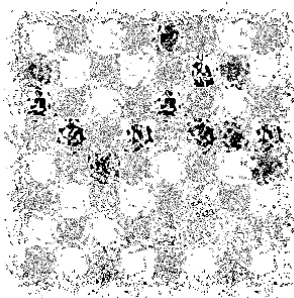
Цетиње је још од 1810. била престоница књажевине, а потом краљевине, Црне Горе. Та лепа варошица, ушушкана међу брдима подно Ловћена, изнедрила је многе угледне личности. Међу њима и највећег црногорског шахисту велемајстора Божидара Боњу Ивановића.

Током своје плодне каријере Боња је освојио многе турнире. Поменимо да је био троструки шампион тадашње Југославије и „вечити првак“ Црне Горе (укупно 16 пута, од тога 10 година заредом).

Красио га је изразито нападачки стил, маштовит и проктан изузетним замислима.

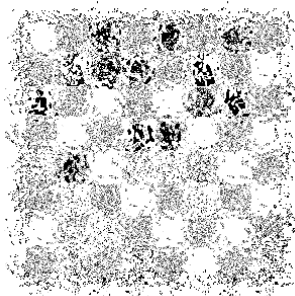
Ево неколико упечатљивих остварења из његовог богатог стваралаштва

На дијаграму је позиција из партије с чувеним Решевским (бели) из 1976.



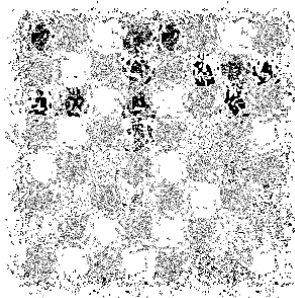
Белом, који је на потезу, полако „донестаје ваздух“. Све су му фигуре на прва три реда,

С Месингом (црни), на шампионату 1968, настала је следећа позиција.



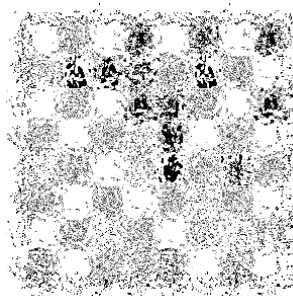
У овако оштрим позицијама, материјал се не броји, а темпо је важнији од свега. Ево како бели, на потезу, то убедљиво демонстрира. **1. Sf5!** Прети **2. Dh7+ Kf8** **3. Dh8+! Lh8** **4. Th8 мат.** **1. ... gf5.** Није тешко видети да ни друге одбране не помажу. **2. Dh6** с претњом **3. Tdg1.** Не вреди **2. ... Dc2** **3. Ka2.** **2. ... Sf8** **3. Df6 Sg6** **4. Tdg1** или **4. Lh6** и нема одбране од мата.

Кажу да с Боњом нема мирног живота у шаху. Док трепнеш, сенине комбинација. Ево како је то искусно вишеструки првак Бугарске велемајстор Ерменков 1983.



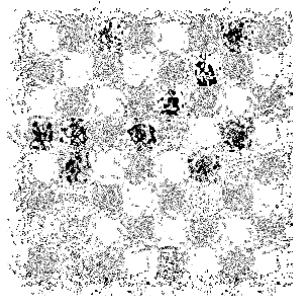
1. Th7+! Kh7 **2. fg6+ Kh6.** **2. ... Kg7 (g8)** **3. fg7+ или 2. ... Kh8** **3. Dh5+.** **3. Dh3+** и црни предаје. На **3. ... Kg7** **4. Dh7+ Kf8** **5. Tf7+ Lf7** **6. Df7 мат,** а на **3. ... Kg5** **4. Tf5+ Kg6** **5. Dg4+** с матом у највише 4 потеза.

За крај, сјајна комбинација, у стилу великог Аљехина, у партији с канадским велемајстором Бијасасом (црни) из 1978.



1. Se5+! de5 **2. Dg4 Dg4** **3. Sf6+ Ke6** **4. Sg4 Lb4** **5. Te4 Td4** **6. Te5+ Kd6** **7. Th5! Ta8** **8. Th6+ Kc5** **9. Se3 Ta7** **10. Th5+ Kc6** **11. c3! Lc3** **12. Te1 Td3** **13. Sd1 Ta4** **14. Sb2! Tad4** **15. Sd3 Td3** **16. Th3** и црни предаје.

НАГРАДНИ ЗАДАТАК



Бели вуче и матира у 3 потеза

1
8
22
36
44
50
57
58
60
61

Hello World! –

2024.