

број: 116/4 година: 2023/24.

Тангента

ЧАСОПИС ЗА МАТЕМАТИКУ И РАЧУНАРСТВО ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ



Београд, 2024.

15

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
„ТАНГЕНТА”- часопис за математику и рачунарство
за ученике средњих школа.

Излази у четири броја током школске године.
Адреса: „Тангента”, Друштво математичара Србије,
Поштански фах 355, 11000 Београд
Телефон: (011)3036-818

Уплате на жиро рачун:
Друштво математичара Србије – број 340-13536-62.
На уплатници као врху уплате назначити „За Тангенту”.

Главни и одговорни уредник: Војислав Петровић, Нови Сад
e-mail: vojpet@gmail.com

Технички уредник: Ненад Вуловић, Крагујевац
e-mail: vlnenad@gmail.com

Чланови редакције:

Александар Миленковић, Крагујевац	Ненад Стојановић, Крагујевац
Миодраг Живковић, Београд	Мирјана Катић, Београд

Сва права умножавања, прештампавања и превођења задржава Друштво математичара Србије

Штампа: **Донат Граф** д.о.о, Београд

На основу члана 23. став 2, тачка 9. Закона о порезу на додатну вредност („Регистар прописа”, број 11 – новембар 2004.) часопис се сматра серијском публикацијом од посебног интереса за науку и опорезије се по стопи од 8%. Корице freerik.

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51

ТАНГЕНТА : часопис за математику и рачунарство за ученике средњих школа : часопис за математику и рачунарство Друштва математичара Србије / главни и одговорни уредник Војислав Петровић. - 1995/1996, бр. 1- . - Београд : Друштво математичара Србије, 1995- (Београд : Донат граф). - 24 cm

Тромесечно.
ISSN 0354-656X = Тангента
COBISS.SR-ID 103642375

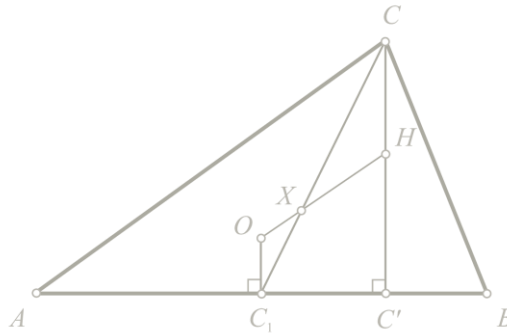
ОЈЛЕРОВА ПРАВА ТРОУГЛА

*Јенс Карстѐнсен, Фредериксберѝ (Данска)
Алија Муминаѝић, Фредериксберѝ (Данска)*

Године 1775. велики швајцарски математичар Леонард Ојлер (Leonhard Euler, 1707-1783), један од највећих математичара свих времена, открио је једну особину коју поседују центар описане кружнице, тежиште и ортоцентар троугла. Показао је да важи следеће тврђење.

Теорема 1. У сваком троуглу, који није једнакостраничан, центар описане кружнице O , тежиште T и ортоцентар H леже на једној правој. Притом, T лежи на дужи OH и важи да је $OT : TH = 1 : 2$.

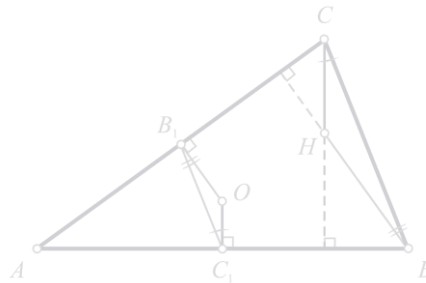
Доказ. Нека су O и H редом центар описане кружнице и ортоцентар троугла ABC . Како ABC није једнакостранични троугао, можемо узети да је $AB \neq AC$. Нека су, даље, CC' – висина из темена C и C_1 – средиште странице AB (сл. 1).



Сл. 1.

У даљем доказу користићемо следеће помоћно тврђење.

Лема 1. У сваком троуглу, растојање од ортоцентра до темена два пута је веће од растојања центра описане кружнице до наспрамне странице.



Сл. 2.

НАГРАДНИ ЗАДАЦИ

Александар Миленковић, Ненад Стојановић

У рубрици „Наградни задаци” у сваком броју дајемо 20 задатака који су подељени у две групе. Задаци из прве групе су подељени по разредима и намењени су пре свега ученицима који се такмиче у Б категорији, док су задаци из друге групе намењени ученицима А категорије и нису подељени по разредима.

Позивамо све читаоце да шаљу предлоге задатака које сматрају посебно интересантним, као и сугестије које ће нам помоћи при састављању рубрике. Такође, позивамо све ученике да на адресу редакције шаљу откуцана или читко исписана решења постављених задатака; сваки задатак на засебном листу. Исто важи и за предлоге задатака. У наредним бројевима часописа публикују се комплетна решења раније постављених задатака, а на крају циклуса најуспешнији решаваачи се награђују.

Предлоге и решења задатака слати на адресу:

„Тангента” – за рубрику „Наградни задаци”
Природно-математички факултет
Радоја Домановића 12
34000 Крагујевац

или **електронском поштом** (искључиво **pdf** формат) на адресу

tg_nagradnizadaci@yahoo.com

најкасније до 10.09.2024.

Прва група

Први разред

M2034. Ива је сабрала неколико првих природних бројева и добила троцифрен број коме су све три цифре једнаке. Колико првих природних бројева је Ива сабрала?

M2035. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n &= 1 \\x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \dots + nx_1 &= 2 \\&\dots \\x_n + 2x_1 + 3x_2 + \dots + nx_{n-1} &= n.\end{aligned}$$

Hello, World!

Препознавање свој-туђ

Миодраг Живковић, Београд

1. Зашто је важан систем за препознавањем свој-туђ

У војсци се за идентификацију стражара и командира страже користи пар речи *одзив* и *лозинка*, о чему се може видети рецимо у Правилима службе Војске Црне Горе, чланови 178 и 179¹. Стражар и командир страже (као и било која особа која прилази стражарском месту) морају да знају и одзив и лозинку.

Када стражар примети особу која прилази, тражи идентификацију, односно одзив. Када особа која прилази изговори одзив, тада стражар изговара своју лозинку и тада су се обојица идентификовали. Одзив и лозинка се изговарају тако да их нико, осим лица која се легитимишу – распознају, не може чути. И одзив и лозинка састоје се од по једне речи и почињу на исто слово. Одзив је обично део војничке опреме, а лозинка неки географски појам, најчешће град, на пример (нож, Ниш), (пушка, Параћин), (затварач, Зајечар). У првим данима искрцавања у Нормандији јуна 1944. године падобранци 101. ваздушно-десантне дивизије САД користили су као одзив *flash*, а као лозинку *thunder*. Одзив и лозинка су се мењали свака три дана.

Пример са стражаром и командиром страже илуструје општији проблем *препознавања свој-туђ*. Важан специјални случај је проблем који решава систем ПВО (противваздушне одбране) у ратним условима када се на његовом радару појави авион. Ако је авион непријатељски, због опасности коју представља, авион се МОРА оборити; ако је авион наш, авион се НЕ СМЕ оборити. С обзиром на кратко расположиво време, искључено је споро људско одлучивање. Проблем се решава применом посебних уређаја за аутоматско разликовање своје војске, снага и оружја од војске, снага и оружја противника.

Систем за препознавање свој-туђ (енгл. *identification friend or foe*, скраћено IFF²; руски: *система радиолокационог опознавања, Свој-чужој*³) је систем који се користи у току борбе за разликовање својих од непријатељских (или неутралних) авиона, возила и снага. Састоји се од *питаача* (енг. *interrogator*) и *одговарача* (енг. *transponder*). Питаач шаље одгова-

¹ https://en.wikipedia.org/wiki/Identification_friend_or_foe

² https://en.wikipedia.org/wiki/Identification_friend_or_foe

³ https://ru.wikipedia.org/wiki/система_радиолокационог_опознавања

ПРЕДЛОЗИ ЗА ЧЕТВРТИ ПИСМЕНИ ЗАДАТАК

Мирјана Кајић

ГИМНАЗИЈЕ, СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

I РАЗРЕД

Линеарне једначине и неједначине; сличности; тригонометрија правоуглог троугла

1. У зависности од параметра $m \in \mathbb{R}$ решити једначину

$$\frac{2m-5}{(m-1)(x+2)} - \frac{3}{x+1} = \frac{3x+4}{x^2+3x+2}.$$

2. У зависности од параметара $a, b \in \mathbb{R}$ решити систем једначина

$$\frac{a}{x+y} + \frac{b}{x-y} = 1$$
$$\frac{a^2}{x+y} - \frac{b^2}{x-y} = \frac{a-b}{2}.$$

3. Решити неједначину

$$\frac{2}{|x-2024|-1} + \frac{3}{|x-2024|+2} \geq 0.$$

4. Ако су a и b катете, а h хипотенузина висина, доказати неједнакост

$$c + h > a + b.$$

5. За које углове $\alpha \in (0, 90^\circ)$ важи

$$\cos^2 \alpha \cdot (\operatorname{tg} \alpha - 2) \cdot (2 \operatorname{tg} \alpha + 1) - 5 \sin \alpha \cos \alpha > 2?$$

II РАЗРЕД

Тригонометријске функције

1. Ако је $\cos x : \cos 2x : \cos 4x = 1 : 2 : y$, колико је y ?

2. Дат је $\triangle ABC$ површине 5. Ако за дужине страница тог троугла важи $|AB|^2 + |AC|^2 = 17 + |BC|^2$, одредити тангенс угла CAB .

3. Колика је вредност израза $\frac{4 \sin 50^\circ \sin 185^\circ + \sqrt{2}}{\sin 10^\circ - \cos 10^\circ}$?

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА

Изборно такмичење за РММ и РММ 2024.

Владимир Балџић, Миљан Кнежевић

Румунски мастер из математике (РММ) је престижно такмичење на коме учествују најбољи такмичари из великог броја држава које су у самом светском врху.

Претходних година била је пракса да на ово такмичење иду учесници Међународне математичке олимпијаде (ИМО) и Балканске математичке олимпијаде (ВМО) од претходне године. Међутим, ове године од тих такмичара остали су само Гвозден Лапчевић и Стефан Шебез. Остали су завршили средње школе и уписали студије.

Због тога је било неопходно Изборно такмичење. Организовано је на Математичком факултету у Београду 19. јануара 2024.

Прошлогодишњи Олимпијци, Гвозден Лапчевић и Стефан Шебез, имали су директно место у екипи, а задатке са Изборног такмичења радили су мимо конкуренције. Остали учесници овог такмичења били су прошлогодишњи такмичари са Изборног такмичења за ИМО, а који се тада нису пласирали на олимпијаду. Они су се борили за још два места у екипи.

Ученици су 4 сата радили 4 задатка, по један из четири основне области: алгебре, геометрије, комбинаторике и теорије бројева. Пласман је био следећи:

1	Новак Деспотовић	10	9	10	8	37	СРБ 3
2	Нина Шушић	10	10	10	1	31	СРБ 4
3	Михајло Јанчевић	9	10	10		29	
4	Стеван Радивојевић	10	3	10	1	24	
5	Иван Митровић	10	6			16	
	Укупно	49	38	40	10	137	

Овогодишњи, 15. по реду, Румунски мастер из математике је одржан у Букурешту од 26. фебруара до 2. марта. Учествовало је 80 такмичара из двадесетак држава. Поред њих су се онлајн такмичили ученици из Ирана и Русије и један такмичар из Велике Британије. Нашу екипу су чинили:

СРБ 1 Гвозден Лапчевић, 4. разред Математичке гимназије у Београду;

СРБ 2 Стефан Шебез, 2. разред Математичке гимназије у Београду;

СРБ 3 Новак Деспотовић, 3. разред Математичке гимназије у Београду;

СРБ 4 Нина Шушић, 8. разред ОШ "Вук Караџић" у Београду.

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА

„КЕНГУР БЕЗ ГРАНИЦА”

Немања Вучићевић, Александар Миленковић, Јелена Стиванић

Почетком осамдесетих, професор математике у Сиднеју Петер Халоран (Peter O'Halloran) осмислио је математичко такмичење са вишеструким понуђеним одговорима. Овакав начин организовања такмичења омогућава објективно и једноставно прегледања тестова од стране било ког прегледача за велики број учесника. За организаторе националног такмичења из математике у Аустралији ово је био огроман успех.

Током 1991. године два француска наставника математике Андре Деледик (André Deledicq) и Жан Пјер Будин (Jean Pierre Boudine) одлучили су да започну организовање такмичења у Француској под називом „Кенгур” по узору на такмичење у Аустралији, а називом такмичења одају почасти својим аустралијским колегама. На првом организованом такмичењу учествовало је 120 000 младих француских математичара. Убрзо се, организовању, прикључују и многе земље Европе, тако да европске земље, њих 21, заједно формирају асоцијацију „Кенгур без граница”

Број ученика који се такмиче у земљама чланицама није сталан, на глобалном нивоу је константан, а у Србији је након пандемија изазване вирусом КОВИД-19 у значајном порасту. Број такмичара у Србији 2024. године био је већи од 25 600.

Број задатака на тестовима се разликује у нижим и вишим разредима основне школе, док тест за средњошколце садржи 30 задатака са три степена тежине. Сваки задатак има 5 понуђених одговора од којих је само један тачан. Тачан одговор за задатке 1 – 10 вреди 3 бода, за задатке 11 – 20 вреди 4 бода, а за задатке 21 – 30 5 бодова.

Ако ученик нетачно одговори, одузима му се четвртина бодова предвиђених за тај задатак, а ако не одговори на питање, добија 0 бодова. Добијени збир се повећава за 30, тако да не буде ученика са негативним збиром бодова. Максималан број бодова за ученике средњих школа је 150.

Ученици средњих школа се такмиче у следећим категоријама:

К1: друштвени смер гимназије, језичке гимназије, III степен стручних школа;

К2: IV степен стручних школа;

К3: природно-математички и општи смер гимназије, као и специјалне математичке гимназије.

Тестови за 9. и 10, односно 11. и 12. разред су истоветни, иако је рангирање ученика по разредима и по категоријама одвојено.

Традиционално, такмичење се сваке године одржава у исто време –

НАШ ГОСТ

МАТЕМАТИЧКИ ХУДИНИ, ШАХОВСКИ ПОЕТА

Вероватно сте чули да постоје људи који поседују невероватне способности за операције с огромним бројевима. Операције с таквим бројевима, које обични смртници не могу ни да „пипну“ без моћних калкулатора или одговарајућих програма, они изводе „напамет“. Један од таквих је из нашег окружења – зрењанинац Борислав Бора Гађански.

Те своје „натприродне“ способности Бора је испољио још као основац. Касније га је привукла математика у целини, те је уписао Природно-математички факултет у Београду, смер математика. По дипломирању, једно време је радио као средњошколски професор да би се убрзо преоријентисао на информатику. На тим и сличним пословима дочекао је пензију.

Осим математике, Борина велика љубав, можда и највећа, била је шаховска композиција. На том пољу се у потпуности доказао и стекао велики углед и код нас и у свету.

Читаоцима је вероватно познато да смо некада, 50-тих и 60-тих година прошлог века, били шаховска велесила; број два, одмах иза ненадмашног Совјетског Савеза. Данас смо, нажалост, далеко од те позиције.

Међутим, малом броју је познато да су наши шаховски проблемисти, и онда и данас, у самом светском врху. То је заслуга многих, а у великој мери и Боре Гађанског.



Још као ученик основне школе показао си посебно умеће у баријатању с великим бројевима. Да ли то значи да си већ тада био „инфициран“ математиком?

Нисам имао неке изузетне способности, али то да сам потпуно самостално овладао неким рачунским триковим било је тачно и необично за узраст од 11 година.

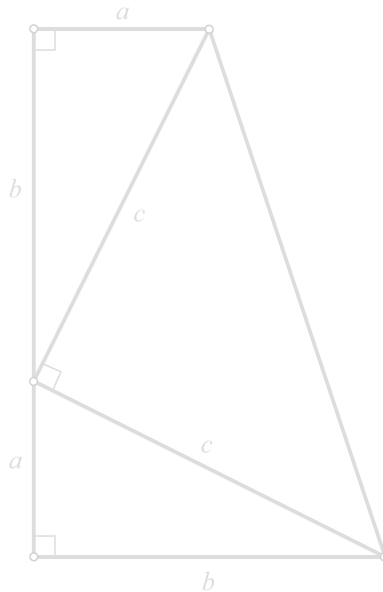
Имао сам срећу да у кући будем окружен књигама. Од када сам научио да читам, после пете године, заволео сам књиге и помно истраживао кућну библиотеку. Занимала ме је наука и маштао сам да јој у будућности будем потпуно посвећен.

ДОКАЗ БЕЗ РЕЧИ

Ненад Стојановић

Доказ без речи, назив је за методу визуелног „доказивања“ математичких тврђења. Појавио се у прошлом веку и брзо стекао широку популарност. Представља спој уметности и математике. Бројне речи и ознаке замењује слика која својим садржајем све објашњава.

Питагорина теорема



$$2 \cdot \frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} c^2 = \frac{1}{2} (a + b)^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

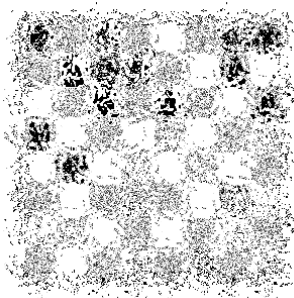
ШАХОВСКА СТРАНА

МАГ КОМБИНАЦИЈЕ

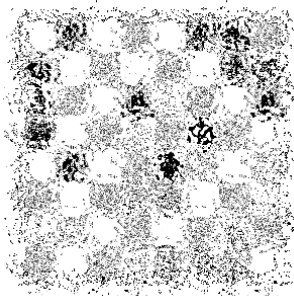
Свет шаховских комбинација не може се замислити без бившег светског првака и једног од највећих играча свих времена – Александра Аљехина.

Невероватна маштовитост и блиставе идеје и данас изазивају дивљење широког круга шахиста, од пуких аматера до врхунских професионалаца.

У позицији



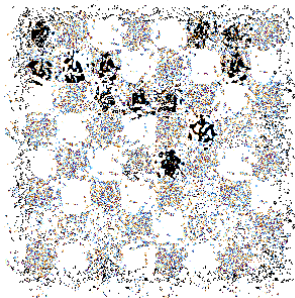
бели има очигледну предност, али тешко је очекивати да ће све бити готово у пар потеза. **1. Dh7!!** Аљехин је на свом терену. **1. ... Kh7.** Не вреди **1. ... Kf8** **2. Dh8+ Kf7(e7)** **3. Tg7** мат. Исто је на **1. ... Kf7.** **2. Tg7+!!.** Ово је требало планирати од почетка. **2. ... Tg7** **3. Sf6+ Kh5** **4. Lh5** мат.



Флечер (црни) управо је са Лаб напао белу даму рачунајући на освајање квалитета. Али Аљехин има сасвим друге планове. **1. De4!! fe4.** Отпорније је **1. ... Lf1** **2. Tf1 Se7** (**2. ... fe4** **3. Le4+** и даље као у партији) **3. Db1** са надмоћном, вероватно

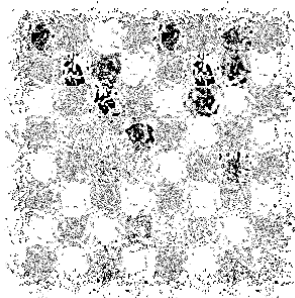
добијеном позицијом за белог. Сад следи форсирано и поучно матирање у шест потеза. **2. Le4+ Kh8** **3. Sg6+ Kh7** **4. Sf8+ Kh8** **5. Sg6+ Kh7** **6. Se5+ Kh8** **7. Sf7** мат.

У партији из 1933. Аљехин (бели) је жртвовао фигуру да би дошао до напада по h-линији.

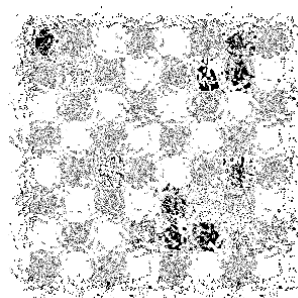


Међутим, изгледа да се „испуцао“, јер црни краљ има узмак преко f7. Има, али нема. Ево како то Аљехин „објашњава“. **1. Se5!** с претњом **Th8** мат. **1. ... de5.** На **1. ... De5** **2. g6.** **2. g6 Dg6** **3. Dc4+** и црни мора да блокира кључно поље g6. **3. ... Df7(Tf7)** **4. Th8** мат. Покушај **3. ... Ld5** **4. Dd5 De6** **5. De6 Tf7** само одлаже мат за два потеза.

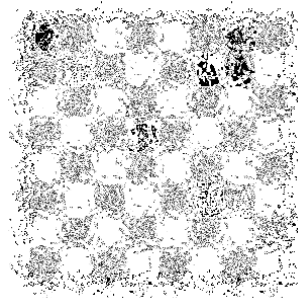
Следећу фантастичну комбинацију Аљехин сматра својом најбољом. Потиче из партије с Ретијем на турнира у Баден-Бадену (1925).



Аљехин (црни) почиње комбинацију са **26. ... Te3!** Јасно, топ се не сме узети због **Dg3+** и **Se3** с матом. После седам потеза, настаје позиција

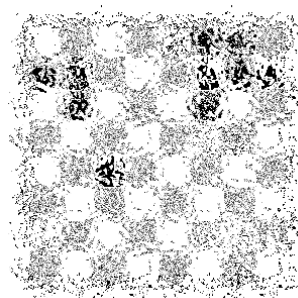


И сада Аљехин започиње завршну операцију с далековидим финалом. **33. ... Le6** **34. Tc2 Sg4+** **35. Kh3 Se5+** **36. Kh2 Tf3!** **37. Te2 Sg4+** **38. Kh3 Se3+** **39. Kh2 Sc2** **40. Lf3 Sd4!** **41. Tf2 Sf3+** **42. Tf3 Ld5**



Белом остаје само да преда.

НАГРАДНИ ЗАДАТАК

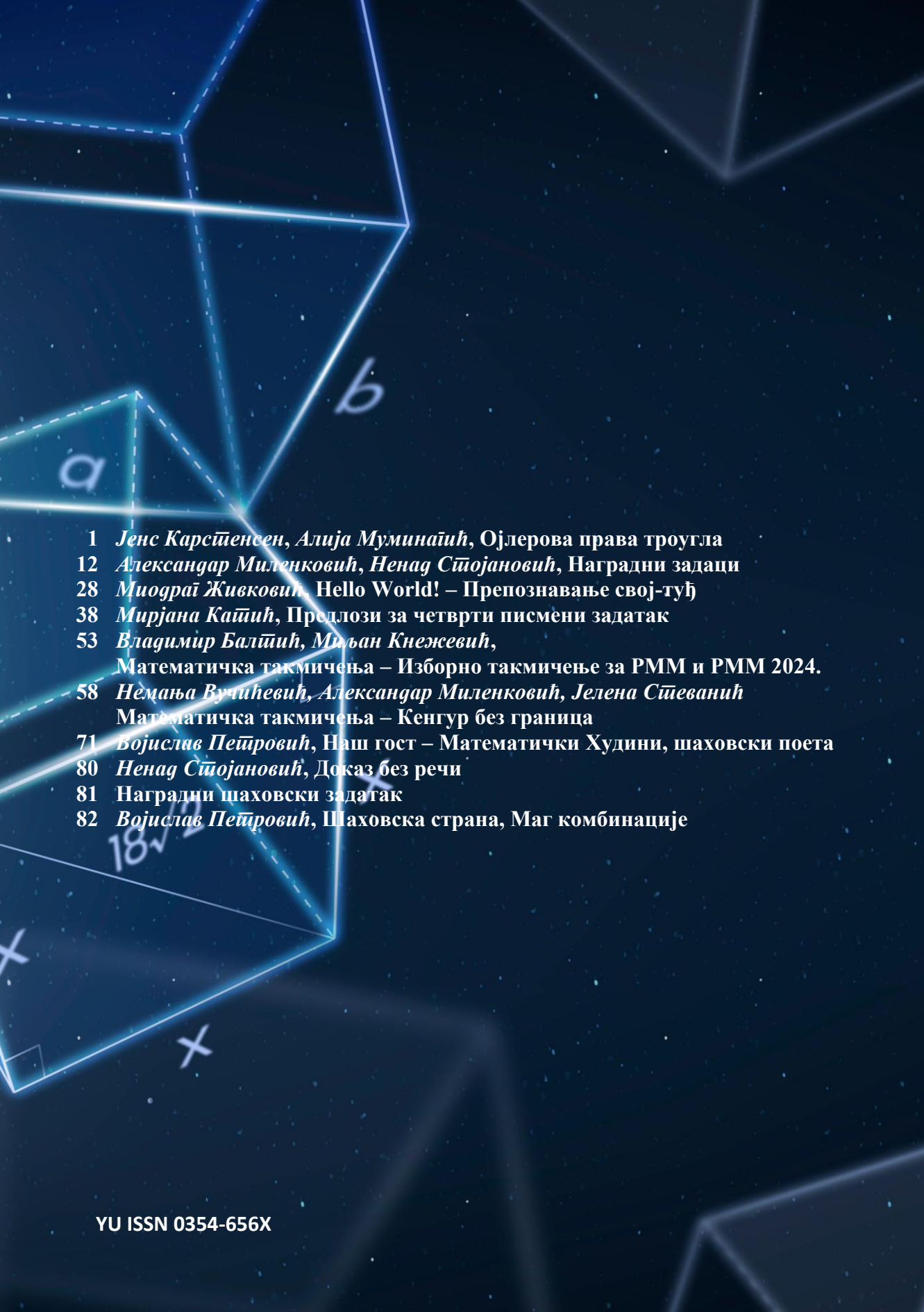


Бели вуче и матира у 3 потеза

Решења слати на адресу: vojret@gmail.com

Најуспешнији решавачи биће награђивани шаховском литературом издавачке куће „Шаховски информатор“.

Војислав Петровић

- 
- 1 *Јенс Карсџенсен, Алија Муминаџић, Ојлерова права троугла*
- 12 *Александар Миленковић, Ненад Сџојановић, Наградни задаци*
- 28 *Миодрај Живковић, Hello World! – Препознавање свој-туђ*
- 38 *Мирјана Каџић, Предлози за четврти писмени задатак*
- 53 *Владимир Балџић, Миљан Кнежевић,*
Математичка такмичења – Изборно такмичење за РММ и РММ 2024.
- 58 *Немања Вуџићевић, Александар Миленковић, Јелена Сџеванић*
Математичка такмичења – Кенгур без граница
- 71 *Војислав Пеџировић, Наш гост – Математички Худини, шаховски поета*
- 80 *Ненад Сџојановић, Доказ без речи*
- 81 *Наградни шаховски задатак*
- 82 *Војислав Пеџировић, Шаховска страна, Маг комбинације*