Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИМО 2024.

Први дан

1. Новчићу на позицији (x, y) припишемо тежину $\frac{1}{2^x 3^y}$. Доказаћемо да је сума тежина свих новчића инваријанта. Заиста, $\frac{1}{2^{x+1}3^y} + \frac{1}{2^x 3^{y+1}} + \frac{1}{2^{x+1}3^{y+1}} = \frac{1}{2^x 3^y}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}) = \frac{1}{2^x 3^y}$, па се једном операцијом не мења сума.
Претпоставимо да после коначно потеза су сви новчићи на различитим позицијама. Нека је највећа координата која се јавља међу њима N. Тада је сума тежина највише $\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{2^i 3^j} = (\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{2^i})(\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{3^i}) = \frac{1-\frac{1}{2^{N+1}}}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1-\frac{1}{3^{N+1}}}{1-\frac{1}{3}} < \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$, тако да скуп новчића на различитим позицијама никад не може имати суму тежина 3. Контрадикција!

2. Како је $x^3 + 9x^2 - 11x - 11 \equiv x^3 + 9x^2 + 27x + 27 \equiv (x+3)^3 \pmod{19}$, имамо да је $x^3+9x^2-11x-11 = 2^y$ кубни остатак по модулу 19. Лако се проверава да је 2 примитивни корен по модулу 19, одакле, због $19 \equiv 1 \pmod 3$ закључујемо да $3 \mid y$ (постоји тачно $\frac{18}{(3,18)} = 6$ кубних остатака по модулу 19, који су степени примитивног корена, дељиви са 3), па је $x^3 + 9x^2 - 11x - 11 = 2^y$ потпун куб.
Уколико је $x \leqslant 3$, провером налазимо решење $(x, y) = (3, 6)$. Приметимо да је $x^3 + 9x^2 - 11x - 11 < x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = (x+3)^3$, а за $x \geqslant 4$ важи и неједнакост $x^3 + 9x^2 - 11x - 11 > x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3 \Leftrightarrow x(6x-14) > 12$, што је очигледно. Дакле, смештањем између кубова, закључујемо да за $x \geqslant 4$ мора бити $x^3+9x^2-11x-11 = (x+2)^3 = x^3+6x^2+12x+8 \Leftrightarrow x(3x-23) = 19$, што је немогуће. Дакле, једино решење је $(x, y) = (3, 6)$.

3. (а) Посматрајмо тетивни седмоугао $A_1A_2...A_7$. Гледаћемо све индексе по модулу 7. Означимо са P_1, P_2 и P_3, редом, геометријске средине три групе дужи: облика A_iA_{i+1}, A_iA_{i+2} и A_iA_{i+3}, редом, за $i = 1, 2, ..., 7$. Довољно је показати $\frac{P_2}{P_1} \geqslant f(\Pi)^{\frac{1}{7}}$.
Запишимо једначине из Птоломејеве теореме на четвороуглове облика $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$:

$$A_iA_{i+2} \cdot A_{i+1}A_{i+3} = A_iA_{i+1} \cdot A_{i+2}A_{i+3} + A_{i+1}A_{i+2} \cdot A_iA_{i+3}.$$

Множењем ових релација, за $i = 1, 2, ..., 7$, и употребом Хелдерове неједнакости (облика $\prod_{i=1}^{7}(x_i + y_i) \geqslant ((\prod_{i=1}^{7} x_i)^{\frac{1}{7}} + (\prod_{i=1}^{7} y_i)^{\frac{1}{7}})^7$) можемо закључити, узимањем седмог корена добијене неједнакости, однос $P_2^2 \geqslant P_1^2 + P_1P_3$. Слично, множењем једнакости из Птоломејеве теореме за четвороуглове облика $A_iA_{i+2}A_{i+3}A_{i+5}$ и коришћењем аналогне Хелдерове неједнакости, добијамо $P_3^2 \geqslant P_2^2 + P_1P_2$.
Напоменимо да се у правилном седмоуглу достижу једнакости у обе релације.
Сада је $P_3^2 \geqslant P_2^2 + P_1P_2 \geqslant P_1^2 + P_1P_3 + P_1\sqrt{P_1^2 + P_1P_3}$, па ако означимо $\frac{P_3}{P_1} = k$, имамо $k^2 \geqslant 1 + k + \sqrt{1+k}$, одакле је очигледно $k > 1$. Нека је $t = \sqrt{k+1} > \sqrt{2} > 1$, $(t^2-1)^2 \geqslant t^2 + t \Leftrightarrow (t+1)(t^3 - t^2 - 2t + 1) \geqslant 0 \implies t^3 - t^2 - 2t + 1 \geqslant 0$. Приметимо да полином $p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ има највише три реалне нуле. Како на крајевима интервала $[-2, 0]$, $[0, 1]$ и $[1, 2]$ он узима вредности различитог знака, нуле постоје у сваком од њих, па су то једине три нуле. Нека је α његова највећа нула. Како важи и $p(t) \geqslant 0$, $t > 1$, не може бити $t \in (1, \alpha)$. Заиста, на том интервалу p узима само негативне вредности, због $p(1) = -1 < 0$, $p(\alpha) = 0$, а он нема нула у $(1, \alpha)$ (користимо његову непрекидност). Дакле, мора бити $t \geqslant \alpha \implies k \geqslant \alpha^2 - 1$. Како је, по претходним неједнакостима, $P_2 \geqslant \sqrt{P_1^2 + P_1P_3} \geqslant P_1\alpha$, одакле је $\frac{P_2}{P_1} \geqslant \alpha$. Приметимо да смо овде готови, јер је управо $\alpha = f(\Pi)^{\frac{1}{7}}$, зато што све коришћене неједнакости постају једнакости у случају правилног седмоугла (тада

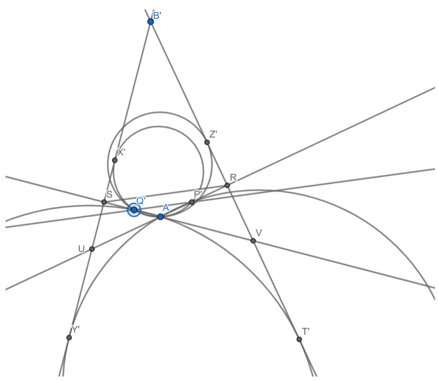
је $f(\Pi)^{\frac{1}{7}} = m$, где је m такав да $m^3 - m^2 - 2m + 1 = 0$, $m > 1 \implies m = \alpha$, као једина нула полинома p у интервалу $(1, +\infty)$). Одавде је директно $(\frac{P_2}{P_1})^7 \geqslant f(\Pi)$, што смо и желели.
(б) Докажимо да у случају $f(M) = f(\Pi)$ седмоугао M не мора бити правилан. Заиста, нека је $A_1A_2...A_7$ произвољан правилан седмоугао. Инверзијом са центром у произвољној тачки S, која се не налази на његовој описаној кружници, полупречника 1, слика седмоугла $A_1A_2...A_7$ постаје тетиван седмоугао $A_1^*A_2^*...A_7^*$. Тада је $f(A_1A_2...A_7) = f(A_1^*A_2^*...A_7^*)$, на основу формуле $X^*Y^* = \frac{XY}{SX \cdot SY}$ и проширивања изразом $\prod_{i=1}^{7} SA_i^2$ бројиоца и имениоца дефиниције $f(A_1^*A_2^*...A_7^*)$. Сада само треба одабрати S, тако да $A_1^*A_2^*...A_7^*$ не буде правилан. Довољно је да буде $A_1^*A_2^* \neq A_2^*A_3^*$, тј. $\frac{A_1A_2}{SA_1 \cdot SA_2} \neq \frac{A_2A_3}{SA_2 \cdot SA_3} \Leftrightarrow SA_1 \neq SA_3$, што је очигледно могуће, узимањем тачке S ван симетрале дужи A_1A_3 и описане кружнице око седмоугла $A_1A_2...A_7$.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИМО 2024.

Други дан

4. Докажимо да постоји бесконачно много x тако да је $f(x) \geqslant x$, као и бесконачно много x тако да је $f(x) \leqslant x$.
Претпоставимо прво да је $f(x) < x$ за све довољно велике x. Како је само коначно много вредности да је $f(a) \geqslant a$, можемо да узмемо x које је веће од свих таквих a. Тада су сви бројеви $f(1), f(2), \ldots, f(x)$ строго мањи од x (ако је $f(a) \geqslant a$ онда је мање од x по дефиницији, а у другом случају је $f(a) < a \leqslant x$), што је у контрадикцији са тиме што је f "1-1".
Сад претпоставимо да има само коначно много x тако да је $f(a) \leqslant a$, и нека је x веће од свих таквих a. Тада је $f(x) > x$, па је међу $f(1), f(2), \ldots, f(x)$ највише $x-1$ бројева међу $1, 2, \ldots, x$, па самим тим постоји $b \leqslant x$, тако да $f(c) \neq b$ за $c \in \{1, 2, \ldots, x\}$. Самим тим је $f^{-1}(b) \geqslant x \geqslant b$, односно $f(f^{-1}(b)) > f^{-1}(b)$ и $f^{-1}(b) \geqslant x$, што је у контрадикцији са избором x.
Сада из претходно доказаног следи да мора да постоји бесконачно много x тако да је $f(x) - x \geqslant 0$, $f(x+1) - (x+1) \leqslant 0$. Тада важи да је $f(x) - x \leqslant f(x) - f(x+1) - x + (x+1) \leqslant k+1$, тако да $0 \leqslant f(x) - x \leqslant k+1$, за свако такво x. Како је бесконачно много таквих x, а само коначно много бројева између 0 и $k+1$, нека вредност d заступљена бесконачно много пута. Самим, тим је $f(x) - x = d$, односно $f(x) = x + d$, за бесконачно много x.

5. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Нека је B други пресек k_1 и k_2. Посматраћемо инверзију Ψ слике са центром у A и произвољним полупречником. Слику тачке L означавамо са L', стандардно. Нека је $R = \Psi(k_1) \cap \Psi(AO_1)$ слика дијаметрално супротне тачке од A на k_1, а S аналогно дефинисано за k_2. Јасно је $P'Q' || RS$ и означимо $\frac{AP'}{AR} = \frac{AQ'}{AS} = \lambda$. Са друге стране нека је U пресек $\Psi(k_2)$ и AP', а V пресек $\Psi(k_1)$ и AQ'.



Потребно нам је тетивност $X'Y'Z'T'$, а из потенције је то исто што и $B'X' \cdot B'Y' = B'Z' \cdot B'T'$. Кључно је приметити да је из потенције $UX'^2 = UY'^2 = UA \cdot UP'$, и слично $VZ'^2 = VT'^2 = VA \cdot VQ'$. Знамо да је $B'X' \cdot B'Y' = (B'U - UX')(B'U + UX') = B'U^2 - UA \cdot UP' = B'U^2 - UA^2 - \lambda UA \cdot AR$, а аналогно $B'Z' \cdot B'T' = B'V^2 - VA^2 - \lambda VA \cdot AS$. Сада пошто инверзија чува углове, знамо да је $AR \perp RV$ и $AS \perp SU$, па је $USRV$ тетиван, односно $AU \cdot AR = AV \cdot AS$. Са друге стране, ако је G тачка таква да је $AUGV$ паралелограм, онда су $B'UG$ и $B'VG$ правоугли, па по Питагориној теореми је $B'U^2 + UG^2 = B'V^2 + VG^2$, односно $B'U^2 - UA^2 = B'V^2 - VA^2$. Из претходно изведених релација се јасно види

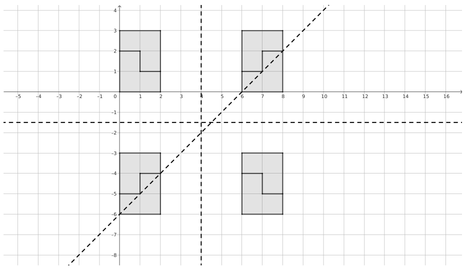
$BX' \cdot BY' = B'U^2 - UA^2 - \lambda UA \cdot AR = B'V^2 - VA^2 - \lambda AV \cdot AS = B'Z' \cdot B'T'$, из чега је доказ завршен.

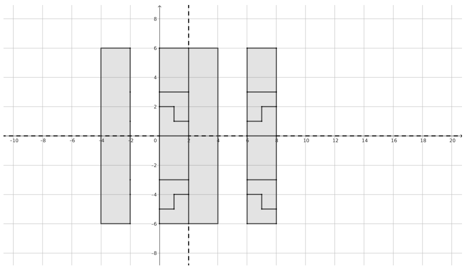
(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Нека је ℓ радикална оса кружница k_1 и k_2, и тачке M, N редом полови правих AO_1, AO_2 у односу на кружнице k_2, k_1. Из потенција и теореме о радикалним осама, задатак нам је еквивалентан са тиме да су XY, ZT и ℓ конкуретнте. Пројективна трансформација између две праве је бијекција која чува дворазмеру. Пошто позиције 3 тачке и дата дворазмера јединствено одређују 4 тачку, уколико се две пројективне трансформације поклапају у 3 тачке, оне се поклапају на свим тачкама. Приметимо да је трансформација која шаље P у Q (односно тачку на AO_2 тако да је $PQ||O_1O_2$) пројективна (као пројекција из тачке у бесконачности на правој O_1O_2). Даље, трансформација која шаље P у пресек XY и ℓ је пројективна, јер је се може видети (из чињенице да је $MP \perp XY$) да је композиција пројекције на прамен из тачке M, ротације прамена за $90°$ и онда пројекције прамена на ℓ. Исто се може рећи и за трансформацију која шаље Q у пресек ZT и ℓ. Стога, имамо две пројективне трансформације $P \to XY \cap \ell$ и $P \to Q \to ZT \cap \ell$, а задатак је еквивалентан са тим да су те пројективне трансформације исте, довољно је да покажемо да су исте у 3 тачке (ово је за нијансу лакше него да докажемо да је задатак тачан у 3 различите тачке P, јер смемо да користимо и тачке где нису дефинисани појмови из задатка, јер пројективне трансформације дефинишемо као: P иде у пресек поларе од P у односу на k_2 и ℓ; P иде у пресек поларе тачке Q у односу на k_1, где се Q дефинише као пресек AO_2 и праве кроз P паралелне са O_1O_2). Ми ћемо презентовати 4 случаја, али било која 3 би била довољна да доврше задатак.

- Ако је $P = A$, тада је и $Q = A$, па поларе кроз A у односу на k_1, k_2 се секу у $A \in \ell$.
- Ако је $P = O_1$, тада је $Q = O_2$. Тада је полара O_1 у односу на k_2 нормална на O_1O_2 и исто важи и за полару O_2 у односу на k_1. Како је и $\ell \perp O_1O_2$, имамо да се ове три праве секу у тачки у бесконачности.
- Нека је $P = AO_1 \cap \ell_\infty$ где је ℓ_∞ права у бесконачности. Како се Q добија од P пројекцијом тачке у бесконачности, права пројекције у овом случају ће бити баш ℓ_∞, те је $Q = AO_2 \cap \ell_\infty$. Полару у овом случају морамо да гледамо по дефиницији "права кроз пол од AO_1 у односу на k_2 која је нормална на праву O_2P". Како је у овом случају $O_2P \cap AO_1 = \{P\} \in \ell_\infty$, имамо да је $AO_1||O_2P$, те је посматрана полара такође нормална на AO_1. Аналогно је полара Q у односу на k_1 права кроз O_1 нормална на AO_2. Приметимо такође да је $\{A\} \in \ell$ и $\ell \perp O_1O_2$. Из тога видимо да су две посматране поларе и ℓ висине у троуглу AO_1O_2, те су конкурентне у његовом ортоцентру.
- Нека је P пресек AO_1 и k_1, односно тачка дијаметрално супротна A у односу на k_1. Лако се може видети (на пример помоћу средње линије), да је Q у том случају тачка дијаметрално супротна A у односу на k_2. Нека је B други пресек k_1 и k_2. Јасно је $\measuredangle ABP = \measuredangle ABQ = 90°$, те је B подножје висине из A у троуглу ABC. Познато је (и директно следи из Брокарове теореме) да у троуглу важи да полара једног темена у односу на круг над пречником његове наспрамне странице пролази кроз ортоцентар тог троугла. Стога полара P у односу на круг над пречником AQ, односно k_2, пролази кроз ортоцентар троугла APQ. Исто можемо рећи за полару од Q у односу на k_1. Како је ℓ висина у овом троуглу, имамо да су посматране поларе и права ℓ конкуретнте у ортоцентру APQ.

6. Могуће је извршити поплочавање равни на овај начин. Како се правоугаоник димензије 3×2 може прекрити са тачно две L-тромине, а знамо да копијама тог правоугаоника можемо периодично прекрити целу раван, природно је тражити поплочавање у

коме се прво конструише овакав правоугаоник. Дакле, потребно је наћи изометријску трансформацију која ће почетну L-тромину пресликати тако да настане овакав 3×2 правоугаоник. Посматрајмо координатни систем у којем је почетна L-тромина многоугао са теменима у тачкама $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,2)$. Бирањем правих $y = x - 6$, $y = -\frac{3}{2}$ и $x = 4$, тим редом, добијамо фигуру састављену од четири правоугаоника димензија 3×2.





У наставку ћемо наизменично бирати праве паралелне x-оси, односно паралелне y-оси. Посматрајмо прво праве паралелне x-оси и приметимо да бирањем праве $y = 0$, добијамо фигуру састављену од два правоугаоника осносиметрична у односу на праву $x = 4$. Сада је довољно бирати праве које наизменично садрже прво горњу, па онда доњу страницу ових правоугаоника. Посматрајмо сада праве паралелне y-оси. Након четвртог потеза (где смо бирали праву $y = 0$) имамо два правоугаоника на растојању 4. Ако изаберемо праву $x = 2$ добићемо фигуру која се састоји од три правоугаоника од којих су први и последњи дужине 2 по x-оси и налазе се на удаљености 2 од централног правоугаоника. Сада је довољно наизменично бирати праве које садрже десну страницу левог правоугаоника, односно леву страницу десног правоугаоника, јер тиме одржавамо да се нова фигура такође састоји од три правоугаоника са поменутим особинама. Како се из конструкције јасно види да свака фигура има дупло већу површину од претходне и да ћемо овим методом покрити сваку тачку равни, овиме смо конструисали тражено поплочавање.