Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - ДОДАТНО ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИМО 2024.

1. Све нуле полинома $x^{2024}+1$ су бројеви $\varepsilon^{2k+1},\ k=\overline{0,2023}$, где је $\varepsilon=\cos\frac{\pi}{2024}+i\sin\frac{\pi}{2024}$. Дакле, све нуле су међусобно различите.
(a) Нека је $P(x)=c(x-\varepsilon^1)(x-\varepsilon^3)\cdot\ldots\cdot(x-\varepsilon^{2023}), c\neq 0$. Посматрајмо полином $Q(x)$ који има супротан редослед коефицијената у односу на полином $P(x)$. Све његове нуле су реципрочне вредности свих нула полинома $P(x)$. Отуда су његове нуле $\varepsilon^{4047},\varepsilon^{4045},\ldots,\varepsilon^{2025}$, па је

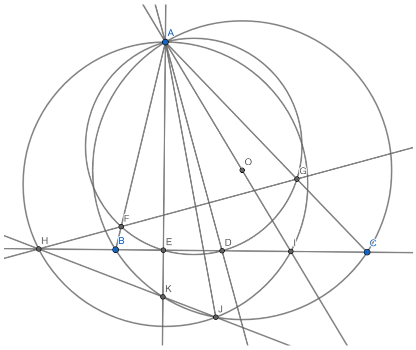
$$Q(x)=c\cdot\varepsilon^1\cdot\varepsilon^3\cdot\ldots\cdot\varepsilon^{2023}(x-\varepsilon^{2025})\cdot(x-\varepsilon^{2027})\cdot\ldots\cdot(x-\varepsilon^{4047}).$$

Јасно је да постоји избор константе $c,\ c\neq 0$, тако да производ полинома $P(x)$ и $Q(x)$ буде моничан полином. За такав одабир константе c, важи $P(x)Q(x)=x^{2024}+1$, чиме смо доказали позитиван одговор за део под (a).
(б) Претпоставимо да бројеви са наведеном особином постоје и нека је z произвољна нула полинома $P(x)$. Тада је $|z|=1$. Како је $Q(x)$ полином са супротним редоследом коефицијената у односу на $P(x)$, то је $\frac{1}{z}$ његова нула. Међутим, како је $Q(x)$ полином са реалним коефицијентима, то његова нула $\frac{1}{z}$ индукује нулу $\overline{(\frac{1}{z})}=\frac{1}{\overline{z}}=z$. Зато је z и нула полинома $Q(x)$, те полином $P(x)Q(x)$ има нулу која је бар двострука. Ово је у супротности са констатацијом да су нуле полинома $x^{2024}+1$ једноструке.

2. Одговор: Ако је $n=1$, одговор је 1. Уколико је $n-1$ степен двојке, одговор је 2. У свим осталим случајевима је одговор 3.
Очигледно је за $n=1$ одговор 1. За све остале бројеве, очито иницијални бројеви морају да садрже 1 и n, па је одговор барем 2. Индуктивно видимо да ако су a и b иницијални бројеви на табли, једини бројеви који можемо да добијемо од њих су облика $\frac{ta+(2^k-t)b}{2^k}=b+\frac{t(a-b)}{2^k}$, за неко $k\leq v_2(a-b)$ и непарно $0<t<2^k$. Из овога видимо да је таквих бројева $v_2(a-b)+1$, па ако су на почетку написани само 1 и n, на крају можемо добити највише $v_2(n-1)+1\leq n-1+1=n$, где се једнакост достиже акко је $n-1$ степен двојке.
Најзад, презентујемо конструкцију са 3 иницијална броја за свако n. Нека је 2^t највећи степен двојке строго мањи од n. Нека су иницијално написани бројеви $1{,}2^t+1$ и n. По аргументима из претходног дела, од прва два броја можемо на табли написати све бројеве између 1 и 2^t+1. Сада претпоставимо да је $y>2^t+1>\frac{n}{2}$ највећи број који није написан на табли. Посматрајмо пар $2y-n$ и n. Очито је $0<2y-n<y$, па по минималности y тај број већ на табли и онда је ово валидан потез, што значи да можемо да напишемо и y.

3. Нека права AE сече описани круг троугла $\triangle ABC$ поново у тачки K. За почетак ћемо доказати да су тачке H, K и J колинеарне. С једне стране, $\angle AJH=\angle AIH=\angle ACB+\angle IAC$. С друге стране, $\angle AJK=\angle ACK=\angle ACB+\angle BCK=\angle ACB+\angle BAK$. Како је $\angle IAC=\angle BAK$, закључујемо да је $\angle AJH=\angle AJK$, па смо доказали жељену колинеарност.
Сада ћемо доказати да је $(H,E;B,C)=-1$. За ово је довољно доказати да се праве BG и CF секу на висини AE троугла $\triangle ABC$. Пошто је $\angle AED=90^\circ$, знамо да су DE и DG висине троуглова $\triangle ADB$ и $\triangle ADC$. Сада знамо: $\frac{CG}{GA}=\frac{tg\frac{\alpha}{2}}{tg\gamma}$, $\frac{AF}{FB}=\frac{tg\beta}{tg\frac{\alpha}{2}}$, $\frac{BE}{EC}=\frac{tg\gamma}{tg\beta}$. Сада се, по Чевиној теореми, праве AE, BG и CF заиста секу у једној тачки одакле следи жељено тврђење.
Коначно, тврђење задатка ћемо доказати пројектовањем праве BC на описани круг око троугла $\triangle ABC$ кроз тачку K. Због доказане колинеарности $H-K-J$ се тачка

H слика у тачку J, тачке B и C остају фиксне, а тачка E се слика у тачку A. Сада, пошто смо већ доказали да је $(H,E;B,C)=-1$, знамо и $(J,A;B,C)=-1$, па је тачка J на симедијани троугла $\triangle ABC$, што је и требало доказати.



4. Лема1. За сваки природан број n важи

$$(n+1)!_0 = \frac{n+1}{10^x} \cdot n!_0,$$

при чему $5^x \mid\mid n+1,\ x \in \mathbb{N}_0$.
Доказ: Нека су $s_2(k)$ и $s_5(k)$, редом, највећи степени бројева 2 и 5 који деле $k!$. Како је очигледно $s_2(k) \geq s_5(k)$, то је

$$(n+1)!_0 = \frac{(n+1)!}{10^{s_5(n+1)}} = \frac{n!}{10^{s_5(n)}} \cdot \frac{10^{s_5(n)}}{10^{s_5(n+1)}} \cdot (n+1) = \frac{n+1}{10^x} \cdot n!_0.$$

Лема2. За сваки природан број n важи

$$(n+2)!_0 \geq 2 \cdot n!_0,$$

при чему знак једнакости важи акко је $n=3$.
Доказ: Нека $5^x \mid\mid n+1,\ x \in \mathbb{N}_0$ и $5^y \mid\mid n+2,\ y \in \mathbb{N}_0$. Користећи Лему1 имамо

$$(n+2)!_0 = \frac{n+2}{10^y} \cdot \frac{n+1}{10^x} \cdot n!_0. \tag{$*$}$$

Ако је $y>0$, онда је $x=0$, па из $(*)$ имамо

$$(n+2)!_0 = \frac{n+2}{10^y} \cdot (n+1) \cdot n!_0 \geq \frac{5^y}{10^y} \cdot (5^y-1) \cdot n!_0 = \frac{5^y-1}{2^y} \cdot n!_0 \geq 2 \cdot n!_0.$$

У претходној неједнакости знак једнакости важи акко истовремено важи $n+2=5^y$ и $\frac{5^y-1}{2^y}=2$, односно акко је $n=3$ (пошто $\frac{5^y-1}{2^y}=2$ важи само за $y=1$). Акој је пак $x>0$, онда је $y=0$, па из $(*)$ имамо

$$(n+2)!_0 = (n+2) \cdot \frac{n+1}{10^x} \cdot n!_0 \geq (5^x+1) \cdot \frac{5^x}{10^x} \cdot n!_0 > \frac{25^x}{10^x} \cdot n!_0 > 2 \cdot n!_0.$$

У случају $x=y=0$ тврђење одмах следи из $(*)$. Овим је доказ леме комплетиран.

Лема3. За сваки природан број n и сваки природан број $k \geq 2$, важи

$$(n+k)!_0 \geq 2 \cdot n!_0,$$

при чему знак једнакости важи акко је $n=3$ и $k=2$.

Доказ: Непосредно следи из Леме 2, након доказа за $k=3$ (доказ за $k=3$ изводимо користећи претходну лему и издвајајући број ($n+1$ или $n+3$) који није дељив са 5.

Без умањења општости нека је $a \leq b$. Ако би важило $c \geq b+2$, онда би према леми3 важило $c!_0 \geq 2 \cdot b!_0$ и $c!_0 \geq 2 \cdot a!_0$, те би било $c!_0 \geq a!_0 + b!_0$. У наведеним неједнакостима, по леми 3, знак једнакости важи акко је $a=b=3$ и $c=5$. Отуда је једно решење задатка $(3,3,5)$. Надаље можемо претпоставити да је $c \leq b+1$. Ако би важило $c \leq b-2$, онда би по леми3 било $2 \cdot c!_0 \leq b!_0$, те не би могла да важи једнакост $a!_0 + b!_0 = c!_0$. Зато је $c \geq b-1$. Из свега до сада наведеног имамо да је

$$c \in \{b-1, b+1\}. \tag{1}$$

Нека $3^\alpha \mid\mid a!$ и $3^\beta \mid\mid b!$. Очито је, због $a \leq b$, $\alpha \leq \beta$. Ако је $\alpha = \beta$ онда међу бројевима $a+1, ..., b$ нема дељивих са 3, те мора да важи $b-a \leq 2$. Слично овом, уколико је пак $\alpha < \beta$, онда је $c-a \leq 2$, те због (1) важи $b-1-a \leq 2$. Тиме је

$$a \in \{b-3, b-2, b-1, b\} \tag{2}$$

Комбинујући сада закључке (1) и (2), као и њихово порекло, разликујемо следеће случајеве:

1) $c = b-1$. Тада $5 \mid b$. Нека је $b = 5^x \cdot y$, где су $x, y \in \mathbb{N}$ и $5 \nmid y$.

1.1. $a=b$. Имамо $2 \cdot b!_0 = (b-1)!_0$, односно $2 \cdot \frac{b}{10^x} \cdot (b-1)!_0 = (b-1)!_0$, те је $y = 2^{x-1}$. Решења овог случаја су све уређене тројке из скупа $\{(5 \cdot 10^k, 5 \cdot 10^k, 5 \cdot 10^k - 1) \mid \ k \in \mathbb{N}_0\}$.

1.2. $a = b-2$. Како је сада $a!_0 = \frac{(b-1)!_0}{b-2}$ и $b!_0 = \frac{b}{10^x} \cdot (b-1)!_0$, сређивањем једначине $(b-2)!_0 + b!_0 = (b-1)!_0$ добијамо $y \cdot (b-2) = (b-3) \cdot 2^x$. Пошто су $b-2$ и $b-3$ узајамно прости, то $5^x \cdot y - 2 = b-2 \mid 2^x$. Последња дељивост није могућа, пошто је $5^x - 2 > 2^x$. Дакле, овај случај нема решења.

1.3. $a = b-3$. Слично као у 1.2., сређивањем полазне једначине добијамо $y \cdot (b-2) \cdot (b-3) = ((b-2) \cdot (b-3) - 1) \cdot 2^x$. Пошто су $b-2$ и $(b-2)(b-3)-1$ узајамно прости, то $5^x \cdot y - 2 = b-2 \mid 2^x$. Последња дељивост није могућа, пошто је $5^x - 2 > 2^x$. Отуда и овај случај нема решења.

2) $c = b+1$ и $5 \mid b+1$. Нека је $b+1 = 5^x \cdot y$, где су $x, y \in \mathbb{N}$ и $5 \nmid y$. Тада је $(b+1)!_0 = \frac{y}{2^x} \cdot b!_0$.

2.1. $a=b$. Имамо $2 \cdot b!_0 = \frac{y}{2^x} \cdot b!_0$, те је $y = 2^{x+1}$, односно $b = 2 \cdot 10^x - 1$. Решења овог случаја су све уређене тројке из скупа $\{(2 \cdot 10^k - 1, 2 \cdot 10^k - 1, 2 \cdot 10^k) \mid \ k \in \mathbb{N}\}$.

2.2. $a \in \{b-1, b-2, b-3\}$. Како међу бројевима $a, a+1, ..., b$ нема дељивих са 5, полазна једначина је еквивалентна са $\frac{b!_0}{a \cdot (a+1) \cdot \ldots \cdot (b-1)} + b!_0 = \frac{y}{2^x} \cdot b!_0$. Сређивањем последње једначине добијамо $2^x = (y - 2^x) \cdot a \cdot ... \cdot (b-1)$, те $b-1 \mid 2^x$. Ово не може да важи пошто је $b-1 = 5^x \cdot y - 1 > 5^x - 2 > 2^x$. Овај случај нема решења.

3) $c = b+1$ и $5 \nmid b+1$. Сада је $(b+1)!_0 = (b+1) \cdot b!_0$, те полазна једначина постаје $a!_0 = b \cdot b!_0$.

3.1. $a=b$. Имамо $a=b=1$, па је решење $(1,1,2)$.

3.2. $a \in \{b-1, b-2, b-3\}$. На основу леме3 мора бити $a = b-1$. Заиста, ако је $a \leq b-2$, онда је $2a!_0 \leq b!_0 < b \cdot b!_0$. Уколико $5 \nmid b$, онда је $a!_0 = (b-1)!_0 < b!_0 < b \cdot b!_0$, па нема решења. Остаје још случај $5 \mid b$. Нека је $b = 5^x \cdot y$, где су $x, y \in \mathbb{N}$ и $5 \nmid y$. Тада је $(b-1)!_0 = \frac{10^x}{b} \cdot b!_0 = b \cdot b!_0$, те је $10^x = 25^x \cdot y^2$. Последња једнакост не може да важи, те и овај случај нема решења.

Из свега наведеног имамо да су сва решења полазне једначине уређене тројке из скупова $\{(5 \cdot 10^k, 5 \cdot 10^k, 5 \cdot 10^k - 1) \mid \ k \in \mathbb{N}_0\}$, $\{(2 \cdot 10^k - 1, 2 \cdot 10^k - 1, 2 \cdot 10^k) \mid \ k \in \mathbb{N}_0\}$, као и $(3,3,5)$.