Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

18. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

Београд, 25.05.2024.

1. Ако је $y=0$, тада је очигледно p паран, па је $p=2$, што даје једно решење задатка $(x,y,p)=(1,0,2)$.

Ако је $x=0$, лако се проверава да $y=1$ није решење, док за $y\geqslant 2$ добијамо да $7\cdot 2^y\equiv 0 \pmod 4$, па је $p^2\equiv 3 \pmod 4$, што је контрадикција.

Ако су x,y оба природни бројеви, очигледно је $p\neq 3$ (лева страна једначине би била дељива са 3, а десна не). Тада је $p^2\equiv 1 \pmod 3$, одакле је

$$7\cdot 2^y\equiv(-1)^y\equiv 1 \pmod 3,$$

односно y је паран. Нека је $y=2z$, $z\in\mathbb{N}$. Једначина постаје

$$3^x+p^2=7\cdot 4^z.$$

Анализирајући ову једначину по модулу 4, имамо

$$(-1)^x+1\equiv 3^x+p^2=7\cdot 4^z\equiv 0 \pmod 4,$$

одакле закључујемо да је x непаран. Прелазећи сада на модуо 8, користећи чињеницу да квадрати непарних бројева дају остатак 1 при дељењу са 8, добијамо

$$3^x+p^2\equiv 4 \pmod 8,$$

па је и $7\cdot 4^z\equiv 4 \pmod 8$. Ово је могуће једино за $z=1$ јер за $z\geqslant 2$ важи $8\mid 7\cdot 4^z$. На овај начин добили смо друго решење задатка $(x,y,p)=(1,2,5)$. Дакле, дата једначина има тачно два решења

$$(x,y,p)\in\{(1,0,2),(1,2,5)\}.$$

2. Прво решење. Докажимо прво неједнакост

$$(a+b)^2\leqslant\frac{4}{3}(a^2+ab+b^2).$$

Наиме, ова неједнакост добија се додавајући израз $3a^2+4ab+3b^2$ обема странама елементарне неједнакости $2ab\leqslant a^2+b^2$. Даље добијамо

$$1+(a+b)^2=\frac{4}{3}(ab+bc+ca)+(a+b)^2\leqslant\frac{4}{3}(ab+bc+ca+a^2+ab+b^2)=\frac{4}{3}(a+b)(a+b+c).$$

Аналогно се доказују неједнакости

$$1+(b+c)^2\leqslant\frac{4}{3}(b+c)(a+b+c),\qquad 1+(c+a)^2\leqslant\frac{4}{3}(c+a)(a+b+c).$$

Множењем претходне три неједнакости добијамо

$$\frac{4^3}{3^3}(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c)^3\geqslant(1+(a+b)^2)\cdot(1+(b+c)^2)\cdot(1+(c+a)^2). \tag{1}$$

Применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине, на бројеве $a+b,b+c,c+a$, добијамо

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\geqslant\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

односно

$$\frac{2^3}{3^3}(a+b+c)^3\geqslant(a+b)(b+c)(c+a). \tag{2}$$

Множењем неједнакости (1) и (2) коначно добијамо

$$\frac{8^3}{9^3}(a+b+c)^6 \geqslant (1+(a+b)^2)\cdot(1+(b+c)^2)\cdot(1+(c+a)^2),$$

чиме је доказ завршен. Једнакост важи ако и само ако је $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Друго решење. Уведимо смене $x=a+b$, $y=b+c$, $z=c+a$. Тада је $a+b+c=\frac{1}{2}(x+y+z)$, па је

$$a=\frac{1}{2}(x+z-y), \quad b=\frac{1}{2}(x+y-z), \quad c=\frac{1}{2}(y+z-x).$$

Дати услов $ab+bc+ca=\frac{3}{4}$ се своди на

$$\frac{1}{4}(x^2-(y-z)^2)+\frac{1}{4}(y^2-(x-z)^2)+\frac{1}{4}(z^2-(x-y)^2)=\frac{3}{4},$$

односно

$$x^2+y^2+z^2+3=2(xy+yx+zx), \tag{3}$$

док је тражена неједнакост еквивалентна са

$$2^3(x+y+z)^6 \geqslant 3^6(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2). \tag{4}$$

На основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине, уз коришћење (3), добијамо

$$(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) \leqslant \left(\frac{3+x^2+y^2+z^2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3(xy+yz+zx)^3. \tag{5}$$

Из добро познате неједнакости $3(xy+yz+zx) \leqslant (x+y+z)^2$ сада следи

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3(xy+yz+zx)^3 \leqslant \frac{2^3}{3^6}(x+y+z)^6, \tag{6}$$

па комбиновањем (5) и (6) добијамо (4). Једнакост важи ако и само ако је $x=y=z=1$, односно $a=b=c=\frac{1}{2}$.

3. (a) Приметимо следећу једноставну чињеницу: квадрат 2×2 има паран број жетона ако и само ако је распоред жетона у горњој и доњој (или, еквивалентно, левој и десној) домини 1×2 исти или супротан, тј. ако и само ако се распоред жетона у овим доминама поклапа на нула или два места. Према томе, свако попуњавање једне врсте жетонима, једнозначно индукује само два могућа попуњавања наредне врсте жетонима, у зависности од тога да ли се у првом пољу те наредне врсте налази жетон или не. Прецизније, уколико се распоред жетона на почетним пољима те две врсте поклапа (на оба поља су жетони или ни на једном пољу нису жетони), поклапаће се и на преосталим пољима. Уколико се тај распоред не поклапа (на тачно једном од та два поља је жетон), неће се поклапати ни на једном од преосталих поља.

Докажимо да је у овом делу задатка одговор одричан. Нека у првој врсти има n жетона ($0 \leqslant n \leqslant 70$). Доказали смо да свака врста, почевши од друге, има исти или супротан распоред жетона у односу на претходну врсту, а самим тим и у односу на прву врсту. Нека је m ($1 \leqslant m \leqslant 70$) број оних врста у којима се распоред жетона поклапа са првом врстом (рачунајући и њу). Укупан број жетона је $mn+(70-m)(70-n)$, односно $2mn-70(m+n)+4900$. Једначина

$$2mn-70(m+n)+4900=2024$$

еквивалентна је једначини

$$(m-35)(n-35)=-213=-3\cdot 71.$$

Како је број 71 прост, он дели бар један од бројева $m-35$ и $n-35$. Међутим, бројеви $m-35$ и $n-35$ су по апсолутној вредности мањи или једнаки од 35 и различити су од нуле, па не могу бити дељиви са 71. Контрадикција!

(б) Квадрат 2×2 има непаран број жетона ако и само ако се распореди жетона у горњој и доњој домини 1×2 поклапају на тачно једном месту. Сличним резоновањем из дела (а), закључујемо да произвољан распоред жетона у једној врсти, индукује два могућа обрасца распоређивања жетона у наредној врсти, у зависности од поклапања распореда на почетном пољу. Наиме, уколико се поклапају распореди на почетном пољу, поклапаће се (једино) и на свим пољима који су у непраним колонама, док ће се у супротном поклапати распореди жетона једино на пољима у парним колонама.

Докажимо да је у овом делу задатка одговор потврдан. Нека је k број жетона који су у првој врсти и непарним колонама, l број жетона у првој врсти и парним колонама ($0 \leqslant k, l \leqslant 35$), а $n = k+l$ укупан број жетона у првој врсти. За број жетона у другој врсти постоје, према претходном резоновању, две могућности: $k + (35 - l)$ или $(35 - k) + l$. Број жетона у трећој врсти може бити $n = k + l$ или $70 - n = (35 - k) + (35 - l)$, а у четвртој $k + (35 - l)$ или $(35 - k) + l$. При томе, могуће је постићи да у четири узастопне врсте број жетона буде

$$(k + l) + (k + (35 - l)) + (k + l) + ((35 - k) + l) = 70 + 2n,$$

а да се у наредној (петој) врсти распоред жетона поклопи са првом врстом. Бирајући $n = 23$, добијамо $70 + 2n = 116$. Уколико на тај начин попунимо првих 17 узастопних четворки врста, добијамо $17 \cdot 116 = 1972$ жетона. Преостаје да последње две врсте попунимо жетонима тако да је, на пример, $35 + 2k = 2023 - 1972 = 51$, односно $k = 8$, па је $l = 23 - 8 = 15$. Дакле, један од могућих начина да се изврши попуњавање таблице жетонима у делу (б) је:

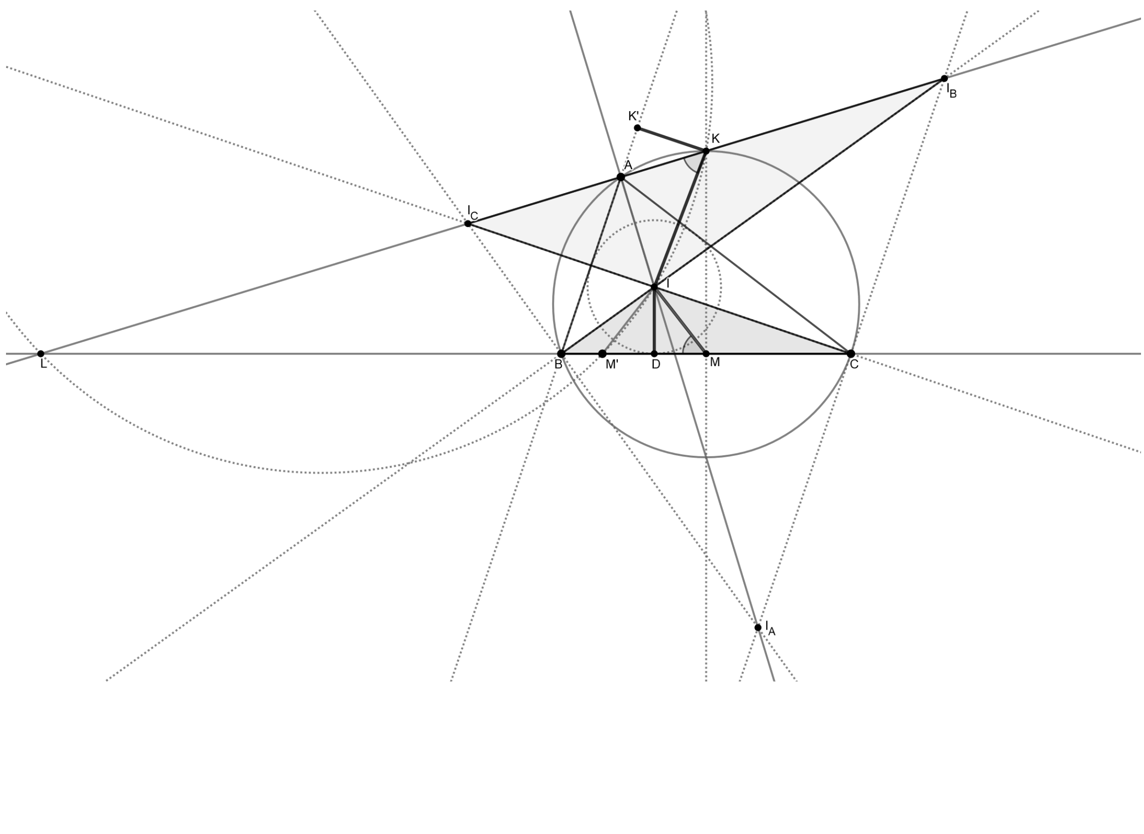
- врсте $1, 3, \ldots, 67, 69$ попуњавамо са 8 жетона у неким непарним колонама и 15 жетона у неким парним колонама;
- врсте $2, 6, \ldots, 66, 70$ попуњавамо са 8 жетона у претходно одабраним непарним колонама и $35 - 15 = 20$ жетона у преосталим парним колонама;
- врсте $4, 8, \ldots, 64, 68$ попуњавамо са $35 - 8 = 27$ жетона у преосталим непарним колонама и 15 жетона у претходно одабраним парним колонама.

4. Претпоставимо, без умањења општости, да је $AB < AC$. Тада важи распоред $L - M' - M - C$. Тачке K, L, I, M' припадају једној кружници ако и само ако важи $\measuredangle IKL + \measuredangle IM'L = 180^\circ$. Како је троугао IMM' једнакокрак, важи

$$\measuredangle IMM' = \measuredangle IM'M = 180^\circ - \measuredangle IM'K.$$

Према томе, довољно је да докажемо једнакост углова

$$\measuredangle IKL = \measuredangle IML. \tag{7}$$



Прво решење. Означимо са I_A, I_B, I_C центре одговарајућих споља уписаних кружница троугла ABC. Ове тачке припадају симетралама спољашњих углова троугла ABC, односно тројке тачака (A, I_B, I_C), (B, I_A, I_C), (C, I_A, I_B) су колинеарне. Лако се доказује да је права KA симетрала спољашњег угла код темена A, па су тачке I_B, K, A, I_C колинеарне. Такође, праве BI_B и CI_C су симетрале унутрашњих углова код темена B и C, па важи $I_BB \perp I_AI_C$ и $I_CC \perp I_AI_B$, односно тачке B и C су подножја висина из I_B и I_C у троуглу $I_AI_BI_C$. Самим тим је четвороугао BCI_BI_C тетиван, са описаном кружницом над пречником I_BI_C. Како је пресек дијагонала BI_B и CI_C овог тетивног четвороугла баш тачка I, троуглови IBC и II_CI_B су слични јер имају једнаке одговарајуће углове. Познато је тврђење да је тачка K средиште дужи I_BI_C (Велики задатак), па су M и K средишта одговарајућих страница BC и I_BI_C, а дужи IM и IK су тежишне дужи у поменутим сличним троугловима. Сада лако следи да су и троуглови IMB и IKI_C слични, одакле је $\measuredangle IMB = \measuredangle IKI_C$, чиме је доказ завршен.

Друго решење. Нека је D додирна тачка уписане кружнице и странице BC. Тада је D уједно и средиште дужи MM'. Докажимо сличност троуглова IDM и IAK, одакле ће следити тражена једнакост углова (7). Како су ови троуглови правоугли, са правим угловима у теменима D и A, довољно је доказати

$$\frac{ID}{IA} = \frac{DM}{AK}. \tag{8}$$

Нека је E додирна тачка уписане кружнице и странице AB, а K' подножје нормале из K на AB. Како су AI и AK редом симетрале унутрашњег и спољашњег угла код A, правоугли троуглови AIE и KAK' су слични јер имају једнаке одговарајуће углове, па је

$$\frac{AI}{AK} = \frac{IE}{AK'}. \tag{9}$$

Међутим, важи $ID = IE$ (полупречници уписане кружнице) и $DM = AK' = \dfrac{|b-c|}{2}$ (Велики задатак), тако да (9) повлачи (8), чиме је доказ завршен.