Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИМО

петак 17. мај 2024. године

Први дан

1. У координатни почетак Декартовог координатног система је постављено 3 новчића. У једном потезу је могуће узети новчић са позиције (x, y), склонити га одатле и поставити по један новчић на сваку од позиција $(x+1, y)$, $(x, y+1)$ и $(x+1, y+1)$. Доказати да ће после коначно много потеза увек бити два новчића на истој позицији.

2. Наћи све парове природних бројева (x, y) за које важи $x^3 + 9x^2 - 11x - 11 = 2^y$.

3. На скупу S свих тетивних седмоуглова у равни дефинишимо функцију $f : S \to \mathbb{R}^+$, тако да за сваки седмоугао $ABCDEFG \in S$ важи

$$f(ABCDEFG) = \frac{AC \cdot BD \cdot CE \cdot DF \cdot EG \cdot FA \cdot GB}{AB \cdot BC \cdot CD \cdot DE \cdot EF \cdot FG \cdot GA}.$$

(а) Доказати да за сваки седмоугао $M \in S$ важи $f(M) \geqslant f(\Pi)$, где је Π произвољан правилан седмоугао.
(б) Уколико је $f(M) = f(\Pi)$, да ли M мора бити правилан седмоугао?

Предвиђено време за израду задатака је 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 бодова.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИМО

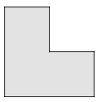
субота 18. мај 2024. године

Други дан

4. Дата је бијекција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и природан број k тако да је $|f(x+1) - f(x)| \leqslant k$. Доказати да постоји цео број d тако да је $f(x) = x + d$, за бесконачно много $x \in \mathbb{N}$.

5. Кружнице k_1 и k_2, са центрима у тачкама O_1 и O_2, редом, секу се у две тачке, од којих је једна A. Нека су P и Q тачке на правама AO_1 и AO_2, редом, такве да је права PQ паралелна са правом O_1O_2. Тачке X и Y су на кружници k_2 тако да су праве PX и PY тангенте на кружницу k_2, а тачке Z и T су на кружници k_1 тако да су праве QZ и QT тангенте на кружницу k_1. Доказати да тачке X, Y, Z и T припадају једној кружници или правој.

6. У равни је дата фигура у облику L-тромине (видети слику), која је састављене од 3 јединична квадрата, коју ћемо означити са Φ_0. У сваком потезу бирамо произвољну праву у равни и помоћу ње конструишемо нову фигуру. Фигура Φ_n, добијена у потезу $n \in \mathbb{N}$, се добија као унија фигуре Φ_{n-1} и њене осне рефлексије у односу на изабрану праву. Такође, да би потез био валидан, неопходно је да површина новодобијене фигуре буде два пута већа од претходне, односно, мора да важи $P(\Phi_n) = 2P(\Phi_{n-1})$. Да ли је овим методом могуће поплочати целу раван?



Предвиђено време за израду задатака је 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 бодова.
Решења задатака детаљно образложити.