Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДОДАТНО ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИМО

субота 25. мај 2024. године

1. Да ли постоји природан број n и:
(а) комплексни бројеви $a_0, a_1, ..., a_n$;
(б) реални бројеви $a_0, a_1, ..., a_n$,
такви да важи $P(x) \cdot Q(x) = x^{2024} + 1$, где је $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ и $Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$?

2. Дат је природан број n. На почетку је на табли написано неколико природних бројева. У једном потезу Игор бира два броја a и b са табле, који су исте парности, а затим на истој табли записује број $\frac{a+b}{2}$. После неколико потеза на табли су написани управо бројеви $1, 2, \ldots, n$. У зависности од n, одредити колико је најмање бројева могло бити иницијално написано на табли.

3. Дат је троугао $\triangle ABC$ са центром описане кружнице у тачки O. Пресек симетрале унутрашњег угла у темену A са правом BC је тачка D. Подножје висине из темена A је тачка E, а пресек правих AO и BC је тачка I. Пресеци кружнице описане око троугла $\triangle ADE$ са правама AB и AC, редом, су тачке F и G, а пресек праве FG са правом BC је тачка H. Уколико се кружница описана око троугла $\triangle AHI$ и описана кружница око троугла $\triangle ABC$ секу, по други пут, у тачки J, доказати да је права AJ симедијана троугла $\triangle ABC$.

4. За природан број n означимо са $n!_0$ природан број који се добија одбацивањем свих нула које се налазе на крају декадног записа броја $n!$ (нпр. $4!_0 = 24,\ 7!_0 = 504$). У скупу природних бројева решити једначину

$$a!_0 + b!_0 = c!_0.$$

Предвиђено време за израду задатака је 240 минута.
Сваки задатак вреди 10 бодова.
Решења задатака детаљно образложити.