Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

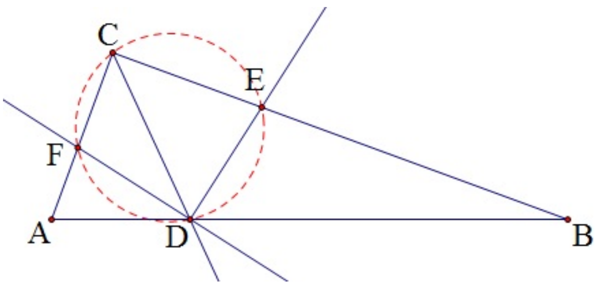
Нови Пазар, 20. април 2024.

Први разред - Б категорија

1. Прво ћемо одредити позиције на којима се налазе те три цифре нула. Како нула не може бити на почетку броја, као ни на крају (јер је цифра јединица прост број), од преосталих пет позиција бирамо три, на којима ћемо поставити нуле. То можемо учинити на $\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!} = 10$ начина (овде смо поделили са $3! = 3\cdot 2\cdot 1$, јер нам није битно којим редоследом бирамо позиције). Када фиксирамо позиције где су цифре нула, како су све остале цифре међусобно различите, тада цифру јединица можемо одредити на четири начина (јер су просте цифре 2, 3, 5 и 7), одакле, за преостале три цифре имамо $8\cdot 7\cdot 6 = 336$ могућности. Дакле, укупнан број тражених седмоцифрених бројева је $10\cdot 4\cdot 336 = 13440$.

2. Претпоставимо да полином $P(x)$, са наведеним особинама, постоји и да је, не умањујући општост $c = \max\{a, b, c\}$, тј, нека је c највећи међу њима. Како је $P(x)$ са целобројним коефицијентима, тада, за било која два различита цела броја x и y, важи $x - y \mid P(x) - P(y)$. Специјално, $c - b \mid P(c) - P(b) = a - c$, $c - a \mid P(c) - P(a) = a - b$ и $b - a \mid P(b) - P(a) = c - b$. Како је $a < c$ и $b < c$, то је $c - b \leqslant c - a$, јер $c - b \mid c - a = -(a - c)$, тј. важи $a \leqslant b$, односно, $a < b$, јер су различити. Аналогно, $c - a \leqslant b - a$, јер $b - a > 0$ и $c - a \mid b - a = -(a - b)$. Следи, $c \leqslant b$, односно $c < b$, јер су различити, што је у контрадикцији са максималношћу броја c. Аналогно се задатак решава уколико се претпостави да је број b највећи, као и у случају када је број a највећи међу датим целим бројевима.

3. Доказаћемо да троугао ABC не мора бити једнакокрак. Нека је ABC произвољан правоугли троугао, са правим углом код темена C. Како је $\angle EDF = \angle EDC + \angle FDC = \frac{1}{2}(\angle ADC + \angle BDC) = 90°$, то је $\angle EDF + \angle ECF = 180°$, те је четвороугао $DECF$ тетиван. Како једнаким периферијским угловима, у некој кружници, одговарају једнаке тетиве, из једнакости углова $\angle DCE$ и $\angle DCF$ имамо једнакост $DE = DF$. Тиме смо доказали да је троугао DEF једнакокрак, при чему почетни троугао није једнакокрак.



4. Решења су $n = 3$ или $n = 4$. Заиста, како је $d(m)$ позитивно за све m, имамо да је $(d(n), d(n+1)) \in \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$. Такође, једино за $m = 1$ имамо да је $d(m) = 1$. Отуда, ако је $d(n) = 1$, тада је $n = 1$, али $d(2) = 2 \neq 4$, дакле $d(n) =\neq 1$. Ако је $d(n+1) = 1$, тада је $n + 1 = 1$. Следи $n = 0$, што није могуће. Дакле, $(d(n), d(n+1))$ је $(2,3)$ или $(3,2)$.
Приметимо, сада, да $d(m) = 2$ ако и само је m прост број. Ако је $d(m) = 3$, тада је m сложен. Међутим, m не може бити производ два различита природна броја $a, b \neq$

1, отуда $1, a, b, m$ једино могу бити природни делиоци од m, одакле произилази да је $d(m) \geqslant 4$. Једини природни бројеви m за које је $d(m) = 3$ су квадрати простих бројева. Отуда, ако је $(d(n), d(n+1)) = (3, 2)$, тада је n квадрат простог броја и $n+1$ је прост. Ако је $d(n) = 2$ и $d(n+1) = 3$, тада $n = p$ и $n + 1 = q^2$, за неке просте бројеве p и q, одакле следи да је $p = (q-1)(q+1)$. Како је p прост број, $q - 1 = 1$, тј. $q = 2$. Следи $n + 1 = q^2 = 4$, тј. $n = 3$. Провером добијамо да је за $n = 3$, $d(3) + d(4) = 5$. Ако је $d(n) = 3$ и $d(n+1) = 2$, тада је $n = p^2$ и $n + 1 = q$, за неке просте бројеве p и q. Одавде следи да је $q = p^2 + 1$. Ако је p непаран, тада је $p \geqslant 3$. Отуда, q је паран природан број већи или једнак од 10, што значи да је q сложен, што је у контрадикцији са тим да је q прост. Дакле, p је паран, тј. $p = 2$, одакле је $n = p^2 = 4$. Провером добијамо да је $n = 4$ решење, тј. важи $d(4) + d(5) = 5$.

5. Математичар може да произвољно изабере једног од присутних научника. Означимо га са x. Затим, математичар треба да пита научника x да за свакога од преосталих 2023 научника одговори на питање "Ко је он?" (укупно поставља 2023 питања). Означимо групу научника, који су по изјави научника x, хемичари са H, а алхемичари са A. Ако научник говори истину, тада је скуп $H \cup \{x\}$ бројнији од скупа A, па је $H \cup \{x\}$ скуп хемичара, док је A скуп алхемичара. У супротном, $H \cup \{x\}$ је скуп алхемичара, док је скуп A скуп хемичара.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Нови Пазар, 20. април 2024.

Други разред - Б категорија

1. Нека су x_1 и x_2 решења полазне квадратне једначине. Тада је $x_1 + x_2 = -a$, као и $x_1x_2 = b + 1$, јер је $x^2 + ax + b + 1 = (x - x_1)(x - x_2)$. Сада, лако добијамо да је

$$a^2 + b^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_1x_2 - 1)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2 + 1 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1).$$

Приметимо да, ако је једно од решења полазне једначине цео број, на пример x_1, тада је и друго решење једначине, такође, цео број, јер је, у овом случају, $x_2 = -a - x_1 \in \mathbb{Z}$. Даље, како је $b \neq -1$, имамо да је $x_1x_2 \neq 0$, те је $x_1^2 \geqslant 1$ и $x_2^2 \geqslant 1$ (квадрати целих бројева различитих од нуле су природни бројеви), тј. $x_1^2 + 1 \geqslant 2$ и $x_2^2 + 1 \geqslant 2$. Дакле, број $a^2 + b^2$ се може записати као производ два чиниоца који су већи од 1, одакле следи да је број $a^2 + b^2$ је сложен.

2. Јасно је да једначина има смисла само за $x > 0$. Како је $8 = 2^3$ и $24 = 2^3 \cdot 3$, то је једначина може записати у облику

$$2^{3\log x} + 3^{1-\log x} \cdot 2^{3\log(10x)} \cdot 3^{\log(10x)} = 2^{3\log x} + 2^{3\log(10x)} \cdot 3^{1-\log x+\log(10x)} = 73.$$

Ставимо да је $t = \log x \in \mathbb{R}$. Тада, једначина постаје

$$2^{3t} + 2^{3(1+t)} \cdot 3^2 = 73,$$

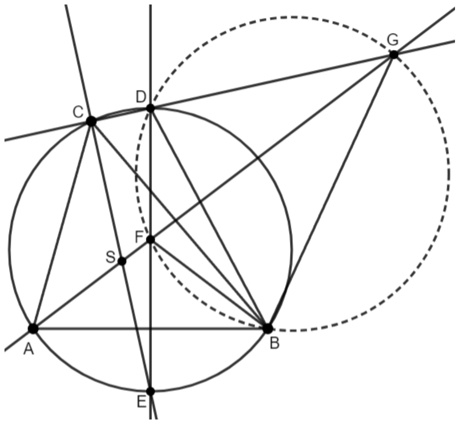
јер је $\log(10x) = \log 10 + \log x = 1 + t$, одакле добијамо

$$2^{3t}(1 + 72) = 73,$$

јер је $2^{3(1+t)} = 2^{3+3t} = 2^3 \cdot 2^{3t} = 8 \cdot 2^{3t}$. Дакле, важи $2^{3t} = 1$, тј. $3t = 0$, тј. $t = 0$. Коначно, како је $t = \log x$, добијамо да је $x = 10^0 = 1$ (нулти степен броја 10) решење полазне једначине, што се провером испоставља да јесте.

3. Нека је $d = \text{НЗД}\,(a, b) \in \mathbb{N}$. Тада је $a = md$ и $b = nd$, за неке природне бројеве m и n. Следи, број $\frac{md+1}{nd} + \frac{nd+1}{md} = \frac{m^2d+m+n^2d+n}{mnd}$ је природан, одакле следи да d дели $m^2d + m + n^2d + n$, тј. d мора да дели $m + n$. То значи да је $d \leqslant m + n$, одакле се добија да је $d \leqslant \frac{a}{d} + \frac{b}{d}$, тј. $d^2 \leqslant a + b$, тј. $d \leqslant \sqrt{a + b}$.

4. Уведимо стандардне ознаке за углове троугла ABC: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ и $\sphericalangle ACB = \gamma$. Како су тачке D и E средишта лукова који одговарају тетиви AB описане кружнице око троугла ABC (са E смо означили тачку која је са друге стране праве AB у односу на тачку C), то је права DE симетрала дужи AB. Даље, како је троугао AFB једнакокрак и како је AF симетрала угла α, то је $\sphericalangle DFB = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$.
Приметимо да је дуж DE, заправо, пречник кружнице описане око троугла ABC, па је $\sphericalangle DCE = 90^\circ$. Како је права CE симетрала угла γ, имајући у виду $\sphericalangle DCE = 90^\circ$, добијамо да је права CD симетрала спољашњег угла код темена C троугла ABC.



Јасно је да је тачка G на симетрали унутрашњег угла α, па је једнако удаљена од правих одређених дужима AC и AB. С друге стране, тачка G је на симетрали спољашњег угла код темена C, па је једнако удаљена од правих одређених дужима CB и AC. Дакле, тачка G једнако удаљена од правих одређених дужима BC и AB, из чега произилази да тачка G припада симетрали спољашњег угла код темена B.

Сада лако рачунамо $\sphericalangle BCG = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$ и $\sphericalangle CBG = 90^\circ - \dfrac{\beta}{2}$, па је $\sphericalangle DGB = \sphericalangle CGB = 180^\circ - (90^\circ - \dfrac{\gamma}{2} + 90^\circ - \dfrac{\beta}{2}) = \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{2}$.

Коначно, $\sphericalangle DFB + \sphericalangle DGB = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{2} = 180^\circ$, па је четвороугао $DFBG$ тетиван, што је и требало показати.

5. Познато је да је број је дељив са 25 ако му је двоцифрени завршетак дељив са 25, тј. ако је једнак 00, 25, 50 или 75.

(а) Ако му је цифра стотина дељива са 5, то значи да је она 0 или 5, те како се цифре не понављају, двоцифрени завршетак не може бити ни 00, нити 50, већ мора бити 25 или 75. Одавде, одмах, закључујемо да цифра стотина мора бити једнака 0, што нам олакшава одређивање I цифре). Стога, прва цифра може бити било која цифра различита од последње 3 (имамо 7 могућности), друга било која различита од I, V, VI и VII (имамо 6 могућности), итд. Дакле, укупн број таквих бројева је $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 1680$.

$\underline{\quad}\ \ \underline{\quad}\ \ \underline{\quad}\ \ \underline{\quad}\ \ \underline{0}\ \ \underline{\overset{2}{7}}\ \ \underline{5}$

$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 1680.$

(б) Ако цифра стотина једног таквог седмоцифреног броја, при дељењу са 6, даје остатак 2, то значи да је она 2 или 8. Стога, задатак ћемо урадити разматрајући два одвојена случаја: 1° цифра стотина је 2 или 2° цифра стотина је 8, у оквиру којих ћемо разматрати одговарајуће подслучајеве, водећи рачуна о чињеници да се цифре не могу понављати.

1° (а) Ако је троцифрени завршетак 250, имамо:

$\underline{\quad}\ \ \underline{\quad}\ \ \underline{\quad}\ \ \underline{\quad}\ \ \underline{2}\ \ \underline{5}\ \ \underline{0}$

$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 840.$

1° (б) Ако је троцифрени завршетак 275 имамо (на почетку не може нула, те имамо само 6 могућности):

$\underline{\quad}\ \ \underline{\quad}\ \ \underline{\quad}\ \ \underline{\quad}\ \ \underline{2}\ \ \underline{7}\ \ \underline{5}$

$6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 720.$

Дакле, у 1°, тј. када је цифра стотина 2, ћемо имати укупно $840 + 720 = 1560$ тражених бројева.

2° (а) Ако је троцифрени завршетак 825 имамо (на почетку не може 0, те и ту имамо 6 могућности):

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \_ & & \_ & & \_ & & \_ & & \underline{8} & & \underline{2} & & \underline{5} & & \\ 6 & \cdot & 6 & \cdot & 5 & \cdot & 4 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & = & 720. \end{array}$$

2° (б) Ако је троцифрени завршетак 850 имамо:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \_ & & \_ & & \_ & & \_ & & \underline{8} & & \underline{5} & & \underline{0} & & \\ 7 & \cdot & 6 & \cdot & 5 & \cdot & 4 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & = & 840. \end{array}$$

2° (в) Ако је троцифрени завршетак 875 имамо (на почетку не може 0, те и овде имамо 6 могућности):

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \_ & & \_ & & \_ & & \_ & & \underline{8} & & \underline{7} & & \underline{5} & & \\ 6 & \cdot & 6 & \cdot & 5 & \cdot & 4 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & = & 720. \end{array}$$

Дакле, у 2°, тј. када је цифра стотина 8, ћемо имати укупно $720 + 840 + 720 = 2280$ бројева.

Коначно, укупан број седмоцифрених природних бројева са захтеваним особинама има $1560 + 2280 = 3840$.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Нови Пазар, 20. април 2024.

Трећи разред - Б категорија

1. Координате четвртог темена могу бити: $D_1(2,8)$ (тада је $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD_1} = \overrightarrow{BA}$) или $D_2(8,0)$ (тада је $\overrightarrow{BD_2} = \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CD_2} = \overrightarrow{AB}$) или $D_3(-4,-4)$ (тада је $\overrightarrow{AD_3} = \overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{BD_3} = \overrightarrow{CA}$). Како је у сваком од добијена три случаја површина паралелограма једнака двострукој површини троугла $\triangle ABC$, јер дијагонала AC паралелограма дели површину тог паралелограма на два једнака дела, то ће у сва три случаја површине бити једнаке. Површину троугла $\triangle ABC$ најлакше рачунамо ако из квадрата $MNPC$, где су $M(-1,4)$, $N(-1,-2)$ и $P(5,-2)$, одузмемо површине правоуглих троуглова $\triangle MAC$, $\triangle NAB$ и $\triangle PBC$. Стога, важи

$$P_{\triangle ABC} = P_{\square MNPC} - P_{\triangle MAC} - P_{\triangle NAB} - P_{\triangle PBC} =$$

$$= 6 \cdot 6 - \frac{6 \cdot 2}{2} - \frac{3 \cdot 4}{2} - \frac{3 \cdot 6}{2} = 36 - 6 - 6 - 9 = 15,$$

па је површина паралелограма $P = 2 \cdot P_{\triangle ABC} = 30$.

2. Детерминанта система је $D = (|a+2024|-1)^2$, док су одговарајуће детерминанте, које одговарају променљивим x, y и z, редом, једнаке: $D_x = (|a+2024|-1)(a|a+2024|-a-b)$, $D_y = a(|a+2024|-1)$ и $D_z = (b-a)(|a+2024|-1)$. Стога, размотрићемо следеће случајеве:
1° $a \neq -2023$ и $a \neq -2025$: У овом случају је $D \neq 0$, те систем има јединствено решење, тј. уређену тројку бројева

$$\left(\frac{a|a+2024|-a-b}{|a+2024|-1}, \frac{a}{|a+2024|-1}, \frac{b-a}{|a+2024|-1}\right).$$

2° $a = -2023$: Тада је прва једначина система $x+y+z = -2023$, а друга постаје $x+y+z = -4046$, што је немогуће, те систем у овом случају нема решења.
3° $a = -2025$: Тада, из прве јадначине је $x+y+z = -2025$, а друга једначина постаје $x+y+z = -4050$, па систем, поново, нема решења.

3. Нека је $\frac{a(a-b)+b(b-c)+c(c-a)}{2} = d^2$, где је d неки природан број или нула, $x = a-b$, $y = b-c$ и $z = c-a$. Тада је, очигледно,

$$x+y+z = 0, \;\; x^2+y^2+z^2 = 4d^2. \qquad (1)$$

У случају да је неки од x, y или z једнак нула, на пример $x = 0$, тада је, на основу претходног, $z = -y$, одакле је $y^2+z^2 = y^2+(-y)^2 = 2y^2 = 4d^2$, тј. $y^2 = 2d^2$. Ако је $d = 0$, тада је и $y = 0$, те је и $z = 0$, одакле добијамо $a = b = c$, што се и тврдило. У супротном, тј. ако би било $d \neq 0$, тада би важило $2 = \frac{y^2}{d^2}$, тј. $\sqrt{2} = \frac{|y|}{d}$, што је немогуће, јер је $\sqrt{2}$ ирационалан број (не може се представити као количник целог и природног). Дакле, у случају $x = 0$ важи тврђење (аналогно важи и у случајевима $y = 0$ или $z = 0$).
Стога, претпоставимо да је $x \cdot y \cdot z \neq 0$, тј. нека су сви различити од нула (тада је d природан, тј. не може бити нула). Докажимо да је овај случај немогућ. Заиста, како квадрати целих бројева, при дељењу са 4, могу давати само остатке 0 или 1, што је тривијално проверити, следи да су бројеви x^2, y^2 и z^2 дељиви са 4, што значи да бројеви x, y и z морају бити парни цели бројеви. Нека је сада $x = 2^u \cdot x_1$, $y =$

$2^v \cdot y_1$ и $z = 2^\omega \cdot z_1$, при чему су u, v и ω природни бројеви (то су, заправо, максимални степени двојке у факторизацији целих бројева x, y и z, редом), а x_1, y_1 и z_1 су непарни цели бројеви (из овог разлога је издвојен случај када је неки од x, y или z једнак нула). Због симетричности једнакости записаних у (1), без умањења општости, можемо претпоставити да је $1 \leqslant u \leqslant v \leqslant \omega$. Тада је из $x^2 + y^2 + z^2 = 4d^2$ испуњено

$$(2^u \cdot x_1)^2 + (2^v \cdot y_1)^2 + (2^\omega \cdot y_1)^2 = 4d^2,$$

тј.

$$4^u \cdot x_1^2 + 4^v \cdot y_1^2 + 4^\omega \cdot z_1^2 = 4d^2,$$

тј.

$$4^{u-1}(x_1^2 + 4^{v-u} \cdot y_1^2 + 4^{\omega-u} \cdot z_1^2) = d^2, \tag{2}$$

али важи и $x + y + z = 2^u \cdot x_1 + 2^v \cdot y_1 + 2^\omega \cdot z_1 = 2^u(x_1 + 2^{v-u} \cdot y_1 + 2^{\omega-u} \cdot z_1) = 0$, тј. $x_1 + 2^{v-u} \cdot y_1 + 2^{\omega-u} \cdot z_1 = 0$. Из последње једнакости тривијално закључујемо да тачно један од бројева $2^{v-u} \cdot y_1$ или $2^{\omega-u} \cdot z_1$ мора бити непаран, а други мора бити паран, јер је x_1 непаран цео број. Како је $u \leqslant v \leqslant \omega$, мора бити први непаран, тј. $v - u = 0$, тј. $v = u$, али и $\omega > u = v$. Дакле, за непарне целе бројеве x_1, y_1 и z_1 важи: $x_1 + y_1 + 2^{\omega-u} \cdot z_1 = 0$ и $4^{u-1}(x_1^2 + y_1^2 + 4^{\omega-u} \cdot z_1^2) = d^2$. Ако је $u = 1$, тада је $x_1^2 + y_1^2 + 4^{\omega-u} \cdot z_1^2 = d^2$, те како је тада $\omega \geqslant 2$, то број на левој страни добијене једнакости даје остатак 2 при дељењу са 4 (x_1 и y_1 су непарни цели), док број на десној страни исте може дати 0 или 1. Дакле, $2 \leqslant u < \omega$ и $v = u$. У овом случају је испуњено $u - 1 > 0$, те $4^{u-1} \mid d^2$, тј. 2^{u-1} дели d, јер је број 2 прост. Стога, $d = 2^{u-1}d_1$, за неки природан број d_1, те је $d^2 = 4^{u-1}d_1^2$, одакле следи, користећи једнакост (2), $x_1^2 + y_1^2 + 4^{\omega-u} \cdot z_1^2 = d_1^2$. Поново, како је $\omega > u$, то број на левој страни последње једнакости даје остатак 2 при дељењу са 4, док остатак који може дати десна страна, тј. број d_1^2, могу бити 0 или 1. Дакле, не може да важи $x \cdot z \cdot z \neq 0$, одакле, на основу доказаног у првом делу, мора бити $x = y = z = 0$, односно $a = b = c$.

4. Управда нема победничку стратегију, јер Набор може да осигура бар нерешен исход. Наиме, Набор у првом свом потезу бира произвољну тачку S и даље игра централно симетрично Управди у односу на тачку S. Заиста, како је k парно, уколико Управда одигра потез на некој правој, која садржи тачку S, Набор ће свакако бити у прилици да након ње одигра свој потез на тој правој, док за праву која не садржи тачку S, Набор игра на њој паралелној правој, која је централносиметрична у односу на тачку S, и самим тим, ако је Управдин потез био коректан, такав је и Наборов. С друге стране, ни услов за l тачака које се виде не може спречити Наборов потез. Наиме, уколико је Управда одиграла коректан потез, након њега је у равни највише $l-1$ изабраних тачака које се све виде. Претпоставимо да Набор не може да одигра централно симетрично Управди. То би значило да би избор те тачке довео до тога да постоји скуп A од l тачака које се виде, међу којима је и новоизабрана тачка. Али међу тих l тачака не могу постојати две централносиметричне у односу на тачку S, јер би тачка S спречила њихову видљивост. Самим тим, скуп од l тачака централносиметричних тачкама скупа A у односу на тачку S и сам представља скуп од l тачака које се све међусобно виде и које су све биле изабране већ и након последњег Управдиног потеза (јер је Наборова тачка у скупу A и различита је од тачке S, која је једина фиксна тачка), што је супротно претпоставци да је Управдин потез био коректан. Према томе, Набор увек може да одговори на Управдин потез и самим тим његов потез никад није последњи, односно Набор не губи игру.

5. Број M, заправо, представља збир еуклидских растојања измађу појединих тачака у координатној равни.

Заиста, број $\sqrt{a^2+1}$ представља растојање од тачке $(0,0)$ до тачке $(a,1)$. Аналогно, број $\sqrt{(a-b)^2+4}$ је растојање од тачке $(a,1)$ до тачке $(b,3)$, $\sqrt{(b-c)^2+1}$ је растојање од тачке $(b,3)$ до тачке $(c,4)$, док је број $\sqrt{(c-6)^2+16}$ растојање од тачке $(c,4)$ до тачке $(6,8)$ те равни. Коначно, како је M збир дужина дужи, он је најмањи могућ када су крајеви тих дужи колинеарне тачке, тј. M је по неједнакости троугла број већи или једнак, тј. не мањи, од растојања тачке $(6,8)$ од координатног почетка. Дакле, $M \geqslant \sqrt{(6-0)^2+(8-0)^2} = \sqrt{100} = 10$.
Докажимо да постоје позитивни реални бројеви a, b и cтакви да је $M = 10$. Да би се достигла једнакост, тачке $(a,1)$, $(b,3)$ и $(c,4)$ морају да се налазе на дужи која спаја тачку $(6,8)$ и координатни почетак. Једначина праве која спаја поменуте тачке је $y = \frac{4}{3}x$. Стога, одговарајуће тачке су $\left(\frac{3}{4},1\right)$, $\left(\frac{9}{4},3\right)$ и $(3,4)$. Заменом добијених вредности, тј. стављајући $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{9}{4}$ и $c = 3$, добијамо да је минимална вредност датог израза, заиста, једнака 10, јер се иста достиже за $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{9}{4}$ и $c = 3$.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Нови Пазар, 20. април 2024.

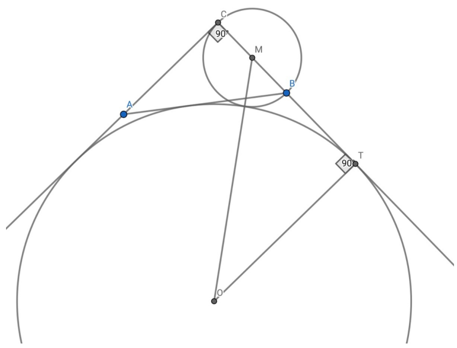
Четврти разред - Б категорија

1. (а) Не мора. Заиста, посматрајмо полином $P(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Нека је $a = 4$ и $b = 6$. Тада, $a \mid P(b)$, јер $4 \mid 8$, као и $b \mid P(a)$, јер $6 \mid 6$. Међутим, $a \cdot b = 24$ не дели $P(a + b) = P(10) = 12$.
(б) У случају када су a и b узајамно прости, тј. када је НЗД$(a, b) = 1$, тврђење, свакако, важи. Заиста, како је P полином са целим коефицијентима, тада за било која два различита цела броја α и β важи $\alpha - \beta \mid P(\alpha) - P(\beta)$. Стога, стављајући, прво, $\alpha = a+b$ и $\beta = b$, добијамо да важи $\alpha - \beta = a \mid P(\alpha) - P(\beta) = P(a+b) - P(b)$. Како $a \mid P(b)$, то мора важити и $a \mid P(a + b)$. Аналогно, стављајући $\alpha = a + b$ и $\beta = a$, добијамо да важи $\alpha - \beta = b \mid P(\alpha) - P(\beta) = P(a+b) - P(a)$. Како $b \mid P(a)$, то мора важити и $b \mid P(a+b)$. Дакле, $a \mid P(a + b)$ и $b \mid P(a + b)$, те како су a и b узајамно прости, то $a \cdot b \mid P(a + b)$.

2. Нека је тачка M средиште дужи BC, O центар споља приписане кружнице троугла ABC, која одговара страници AB, T додирна тачка ове кружнице и праве BC, $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, s полуобим троугла ABC и $r = OT$, тј. полупречник дате споља приписане кружнице. Како је $BT = s - a$ (може се извести посматрањем тангентних дужи из тачака C, A и B на поменуту споља приписану кружницу или користити готова формула), добијамо да је $MT = s - \frac{a}{2}$. Очигледно је $OM = r + \frac{a}{2}$, јер се, по услову задатка, споља приписана кружница и кружница конструисана над дужи BC, као над пречником, додирују. Сада, из правоуглог троугла OTM добијамо релацију

$$\left(r + \frac{a}{2}\right)^2 = r^2 + \left(s - \frac{a}{2}\right)^2,$$

одакле је $ar = s(s - a)$. Знамо да је $r = \frac{P}{s-c}$, где је P површина троугла ABC (формула се може добити применом формула за површине троуглова $\triangle OBC$, $\triangle OAC$ и $\triangle OAB$, узимајући оне формуле које укључују висине тих троуглова дужине r и релације $P_{OAC} + P_{OBC} - P_{OAB} = P$, а може се користити и готова формула).



Ако искористимо Херонов образац, добијамо да је $P = a(s - b)$. Како a, b и c чине узастопне чланове неког аритметичког низа, можемо записати да је $a = b - d$, $c = b + d$, за неко $d \in \mathbb{R}$. Сада је $s = \frac{3b}{2}$, $s - a = \frac{b}{2} + d$, $s - b = \frac{b}{2}$, $s - c = \frac{b}{2} - d$. Ако ове изразе узмемо у обзир и заменимо их у релацији $P = a(s-b)$, те, поново, искористимо Херонов образац, добијамо једначину

$$(b-d)^2 = 3\left(\frac{b^2}{4} - d^2\right),$$

која има јединствено решење $d = \frac{b}{4}$. Отуда, за странице троугла ABC ће важити да је $a = \frac{3b}{4}$, $c = \frac{5b}{4}$. Међутим, како је, сада, $a^2 + b^2 = c^2$, закључујемо да је $\sphericalangle ACB = 90°$.

3. Приметимо да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, што се тривијално доказује принципом математичке индукције.
Даље, нађимо прво број $N(B)$. Укупан број троуглова, којима тачка B није теме, ће бити $\binom{2023}{3}$, јер тачку B не узимамо у обзир, тј. из скупа од 2023 тачке бирамо три. Слично, укупан број конвексних четвороуглова ће бити $\binom{2023}{4}$, јер тачку B, поново, не узимамо у обзир, тј. из скупа од 2023 тачке бирамо четири. Аналогно, укупан број конвексних петоуглова чија су темена на датој кружници и различита су од тачке B је $\binom{2023}{5}$, итд. Поступак налажења броја $N(B)$ завршавамо тиме што на крају из датог скупа од 2023 тачке (B је избачена) бирамо тачно 2023, које ће одређивати темена конвексног 2023-тоугла, што можемо учинити на $\binom{2023}{2023} = 1$ начин. Дакле, важи

$$N(B) = \sum_{k=3}^{2023} \binom{2023}{k}.$$

Аналогно, ради одређивања броја $S(B)$, тј. укупаног броја посматраних конвексних многоуглова којима је једно од темена истакнута тачка B, кренућемо од броја троуглова. Како је тачка B већ једно од темена, то ће укупан број троуглова, са теменима у датим тачкама, бити једнак $\binom{2023}{2}$, јер је тачка B изабрана, те из скупа од 2023 тачке бирамо, заправо, само две. Слично, укупан број конвексних четвороуглова којима су темана дате тачке, при чему је једно теме тачка B, ће бити $\binom{2023}{3}$, јер је тачка B изабрана, те, стога, из скупа од 2023 тачке бирамо три. Аналогно, укупан број конвексних петоуглова чија су темена на датој кружници, а једно од темена је тачка B, је $\binom{2023}{4}$, итд. Поступак налажења броја $S(B)$ завршавамо тиме што на крају из датог скупа од 2023 тачке (B је, као и раније, већ изабрана) бирамо тачно 2023, које ће, заједно са тачком B, одређивати темена једног јединог конвексног 2024-тоугла, што можемо учинити на $\binom{2023}{2023} = 1$ начин. Дакле, важи

$$S(B) = \sum_{k=2}^{2023} \binom{2023}{k}.$$

Коначно,

$$S(B) - N(B) = \sum_{k=2}^{2023} \binom{2023}{k} - \sum_{k=3}^{2023} \binom{2023}{k} =$$

$$= \binom{2023}{2} = \frac{2023 \cdot 2022}{2} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2022 = \sum_{k=1}^{2022} k.$$

Иначе, користећи Биномну формулу, тј. чињеницу да је

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

тривијално налазимо да је $N(B) = 2^{2023} - 1 - 2023 - \frac{2023 \cdot 2022}{2} = 2^{2023} - 2024 - 2023 \cdot 1011$, као и $S(B) = 2^{2023} - 1 - 2023 = 2^{2023} - 2024$, тј. $S(B) - N(B) = 2023 \cdot 1011 = \frac{2023 \cdot 2022}{2} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2022$.

4. Доказаћемо да посматрана једначина има тачно два реална решења. У том циљу, посматрајмо функцију $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, дефинисану са $f(x)=4^x-2^x+x^4-x^2$, за свако $x\in\mathbb{R}$. Лако налазимо да је $f'(x)=4^x\ln 4-2^x\ln 2+4x^3-2x=(2^{2x+1}-2^x)\ln 2+2x(2x^2-1)$, $x\in\mathbb{R}$. Нека је, сада, $x<-1$. Очигледно је $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(4^x-2^x+x^2(x^2-1))=+\infty$ и $f(-1)=-\frac{1}{4}<0$, те како је у овом случају и $2x+1<x$, то је $2^{2x+1}<2^x$, тј. $2^{2x+1}-2^x<0$. Са друге стране, за $x<-1$ важи и $2x^2-1\geqslant 1>0$, одакле закључујемо да је за $x<-1$ испуњено $f'(x)<0$, те је посматрана функција f на интервалу $(-\infty,-1)$ строго опадајућа. Зато она на интервалу $(-\infty,-1)$ може имати тачно једну реалну нулу, јер је непрекидна. Заправо, како је $f(-2)>0$ и $f(-1)<0$, због непрекидности функције f, закључујемо да се поменута нула налази у интервалу $(-2,-1)$. Овим је доказано да посматрана једначина има тачно једно решење на скупу $(-\infty,-1]$, јер је $f(-1)\neq 0$. За $x\in(-1,0)$ важи $x^2>x^4$ и $2^x>4^x$, те полазна једначина нема решења на $(-1,0)$. Слично овом, за бројеве $x\geqslant 1$ важи $4^x>2^x$ и $x^4\geqslant x^2$, те полазна једначина нема решења ни на скупу $[1,\infty)$. Тривијално, решење полазне једначине је и $x=0$. Докажимо још да нема решења на интервалу $(0,1)$. Нека је $g:(0,1)\to\mathbb{R}$, дефинисана са $g(x)=4x^3-2x$, $x\in(0,1)$. Како је $g'(x)=12x^2-2=2(6x^2-1)=2(\sqrt{6}\,x-1)(\sqrt{6}\,x+1)$, $x\in(0,1)$, то је $g'(x)<0$, за $0<x<\frac{1}{\sqrt{6}}$, док је $g'(x)>0$, за $\frac{1}{\sqrt{6}}<x<1$, те на посматраном интервалу, тј. на $(0,1)$, њен минимум се достиже у тачки $x=\frac{1}{\sqrt{6}}$ и износи $g(\frac{1}{\sqrt{6}})=-\frac{4}{3\sqrt{6}}$. За $x\in(0,1)$ важи и $2^{2x+1}-2^x=2^x(2^{x+1}-1)>1$. Дакле, из свега наведеног имамо да за $x\in(0,1)$ важи $(2^{2x+1}-2^x)\ln 2+2x(2x^2-1)=(2^{2x+1}-2^x)\ln 2+g(x)>\ln 2-\frac{4}{3\sqrt{6}}>\frac{2}{3}-\frac{4}{3\cdot 2}=0$, те је $f'(x)>0$ за $x\in(0,1)$, тј. f строго расте на $(0,1)$. Отуда, због $f(0)=0$, полазна једначина на $(0,1)$ нема других решења. Овим је показано да посматрана једначина има тачно два реална решења.

5. Доказаћемо да је одговор потврдан. Нека се избацивањем картице на којој је записан број n, $n\in\{1,2,\ldots,2024\}$, добија број a_n. Како је $10^4\equiv_{101}1$, а тиме и $10^{4k}\equiv_{101}1$, за произвољно $k\in\mathbb{N}$, имамо да за $1000\leqslant n\leqslant 2023$ важи

$$a_{n+1}-a_n=-1\cdot 10^{4\cdot(2023-n)}\equiv_{101}-1. \qquad (\heartsuit)$$

Из $(\heartsuit)$ закључујемо да бројеви $a_{1924},a_{1925},a_{1926},...,a_{2023}$ и a_{2024} при дељењу са 101, редом, дају исте остатке као и бројеви $a_{1924},a_{1924}-1,a_{1924}-2,...,a_{1924}-99$ и $a_{1924}-100$. Како овде имамо узастопне целе бројеве и то тачно њих 101 узастопних, то је тачно један од њих дељив са 101. Тиме смо доказали да се избацивањем неке од картица са бројем $1923,1924,...,2023$ или 2024 добија број који је дељив са 101.