Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Београд, 24. март 2024.

Први разред - А категорија

1. Приметимо да је $\sphericalangle BIC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = 120^\circ$, $\sphericalangle BOC = 2\alpha = 120^\circ$ и $\sphericalangle BA'C = \sphericalangle BAC = 60^\circ$. Сада је јасно да тачке O и A' леже на кружници описаној око троугла BIC. Означимо центар ове кружнице са S. Сада је $SA' = SO = SI$. Такође, познато је (а и лако се може показати једноставним рачуном углова) да су тачке A, I и S колинеарне. Знамо да је $\sphericalangle IAO = \sphericalangle IAA'$, одакле следи да је тачка S у пресеку симетрале угла $\sphericalangle A'AO$ и симетрале странице $A'O$, те је S средиште лука $\overset{\frown}{A'O}$ кружнице описане око троугла $AA'O$, који не садржи тачку A. Међутим, то, заједно са чињеницом да је $SI = SO = SA'$ и да је I на правој AS, нам даје да је I средиште уписане кружнице троугла AOA'. Отуда је права OI симетрала угла AOA'.

2. Доказаћемо да ако је $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, да је тада одговор k^2, док је за $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, одговор, такође, k^2. Прво, нека је $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Поделимо квадрат $2k \times 2k$ на k^2 квадрата димензије 2×2. С обзиром да су сви бројеви различити, а квадрати међусобно дисјунктни, максималне вредности унутар свих тих квадрата ће бити међусобно различите, па их је увек барем k^2. Остаје нам да нађемо пример. Обојимо сваком од ових k^2 квадрата доње десно поље црном бојом, а остала поља белом. Сада, у црна поља ставимо k^2 највећих бројева, а у остала, бела поља, ставимо остале бројеве. Видимо да ће максимални број у било ком 2×2 квадрату бити број у црном пољу, па је број различитих максималних вредности квадрата тачно k^2.
Нека је, сада, $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Поделимо полазни квадрат на k^2 квадратића, где су сва поља у последњој врсти и последњој колони празна, а остала припадају квадратима димензије 2×2. Како је тих квадрата k^2, на аналоган начин имаммо исту оцену као у претходном случају. Коначно, као пример, обојимо поново свако доње десно поље ових квадрата црном бојом. Затим, поново у црна поља можемо уписати k^2 највећих бројева. Видимо да ће максималан број у сваком 2×2 квадрату бити број уписан у црно поље, одакле следи да је различитих максималних вредности и у овом случају тачно k^2.

3. Приметимо да је под датим условом неједнакост коју треба доказати еквивалентна са

$$([a_1,a_2]+(a_1,a_2))+((a_2,a_3)+[a_2,a_3])+...+([a_{2023},a_{2024}]+(a_{2023},a_{2024}))+([a_{2024},a_1]+[a_{2024},a_1])\geqslant$$
$$\geqslant(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+...+(a_{2023}+a_{2024})+(a_{2024}+a_1). \qquad (1)$$

Уколико би за произвољне природне бројеве a и b важила неједнакост $(a,b)+[a,b] \geqslant a+b$, онда би важило $[a_1,a_2]+(a_1,a_2) \geqslant a_1+a_2$, $(a_2,a_3)+[a_2,a_3] \geqslant a_2+a_3, ..., (a_{2012},a_1)+[a_{2012},a_1] \geqslant a_{2012}+a_1$, па сабирањем свих ових неједнакости добијамо неједнакост (1), чиме би доказ тражене неједнакости био завршен. Стога, за доказ неједнакости (1) довољно је доказати да за произвољне природне бројеве a и b важи неједнакост $(a,b)+[a,b] \geqslant a+b$. Докажимо да она заиста важи. У том циљу, нека је $(a,b) = d$. Тада је $a = da'$ и $b = db'$, при чему су природни бројеви a' и b' узајамно прости. Зато је $[a,b] = da'b'$, па важи

$$[a,b]+(a,b)-a-b = da'b'+d-da'-db' = d(a'b'-a'-b'+1) = d(a'-1)(b'-1) \geqslant 0.$$

Овим смо доказали да за произвољне природне бројеве a и b важи неједнакост $[a,b]+(a,b) \geqslant a+b$, чиме је комплетиран доказ тражене неједнакости.

Покушајмо сада да конструишемо један пример бројева $a_1, a_2, ..., a_{2024}$ за које важи задати услов, те да у доказаној неједнакости важи знак једнакости. Из доказа неједнакости $[a,b]+(a,b) \geqslant a+b$ видимо да знак једнакости важи акко је $a'=1$ или, пак, $b'=1$. Ако је $a'=1$, онда је $a=d$, односно $a \mid b$. Слично, у случају $b'=1$, имамо $b \mid a$. Дакле, у неједнакости $[a,b]+(a,b) \geqslant a+b$ знак једнакости важи акко је један од бројева a или b дељив другим. Овај услов елегантније можемо записати у облику $\min\{a,b\} \mid \max\{a,b\}$. Зато у неједнакости (1) знак једнакости важи акко истовремено важи $\min\{a_1,a_2\} \mid \max\{a_1,a_2\}$, $\min\{a_2,a_3\} \mid \max\{a_2,a_3\}$, $...,\min\{a_{2023},a_{2024}\} \mid \max\{a_{2023},a_{2024}\}$, $\min\{a_{2024},a_1\} \mid \max\{a_{2024},a_1\}$. При конструкцији примера имамо на уму да за различите бројеве $a_1, a_2, ..., a_{2023}, a_{2024}$ треба да важи и задати услов. Из свега наведеног закључујемо да је довољно (не и нужно) одабрати бројеве $a_1, a_2, ..., a_{2023}, a_{2024}$ тако да важи $a_2 \mid a_1$, $a_2 \mid a_3$, $a_4 \mid a_3, a_4 \mid a_5, ..., a_{2024} \mid a_{2023}$, $a_{2024} \mid a_1$. Један такав одабир је $a_1 = 2^{1+1012}$, $a_2 = 2^1$, $a_3 = 2^{2+1012}$, $a_4 = 2^2, ...,$ $a_{2023} = 2^{1012+1012}$, $a_{2024} = 2^{1012}$ ($a_{2k-1} = 2^{k+1012}$, $a_{2k} = 2^k$, за $k = \overline{1,1012}$). Овим смо доказали да у неједнакости коју смо доказали може важити знак једнакости.

4. Доказаћемо да тражено n постоји и да је $n=11$. Приметимо најпре да вредност броја a_0 не утиче на број нула функције f. Заиста, како је функција која броју x додељује број $x-a_0$ очигледно бијекција, то једначина $f(x)=0$ има једнак број решења као и једначина

$$||...||y|-a_1|-a_2|-...|-a_{n-1}|=a_n. \tag{1}$$

Како једначина $|z|=a$ нема решења за $a<0$, док је за $a \geqslant 0$ еквивалентна са $z=\pm a$, то су сва решења једначине (1) бројеви

$$y = z_1(z_2(...z_{n-2}(z_{n-1}(z_n a_n + a_{n-1}) + a_{n-2}) + ... + a_2) + a_1), \tag{2}$$

за које је $a_n \geqslant 0$, $z_n a_n + a_{n-1} \geqslant 0$, $z_{n-1}(z_n a_n + a_{n-1}) + a_{n-2} \geqslant 0, ..., z_2(...z_{n-2}(z_{n-1}(z_n a_n + a_{n-1}) + a_{n-2}) + ... + a_2) + a_1 \geqslant 0$, при чему је $z_1, z_2, ..., z_n \in \{-1,1\}$. За фиксирано n, уз помоћ једнакости (2), дефинисано је 2^n бројева (тако дефинисани бројеви су једини „кандидати" за решења једначине (1)), те да би (1) имала 2023 решења неопходно је да важи неједнакост $2^n \geqslant 2023$, односно $n \geqslant 11$. Доказаћемо да за $n=11$ постоји одабир бројева $a_1, a_2, ..., a_{11}$ такав да (1) има тачно 2023 решења. Приметимо да је $2023 = 2^{11} - (2^4 + 2^3 + 1)$, па бројеве $a_{11}, a_{10}, ..., a_1$ бирамо тако да од свих бројева описаних са (2) одбацимо 2^4 бројева након одабира бројева $a_{11}, ..., a_5$ (што значи да један од одговарајућих резултата након одабира бројева $a_{11}, ..., a_5$ треба да буде нула, односно довољно је да важи $a_5 = a_{11} + a_{10} + ... + a_6$), одбацимо 2^3 бројева након одабира $a_{11}, ..., a_4$ (што значи да један од одговарајућих резултата након одабира бројева $a_{11}, ..., a_4$ треба да буде нула, односно довољно је да важи $a_4 = a_{11} + a_{10} + ... + a_5$) и одбацимо 1 број након одабира $a_{11}, a_{10}, ..., a_1$ (што значи да један од одговарајућих резултата након одабира бројева $a_{11}, ..., a_1$ треба да буде нула, односно довољно је да важи $a_1 = a_{11} + a_{10} + ... + a_2$). При свему овом, све остале суме описане након (2) треба да буду позитивне. Један избор бројева $a_{11}, a_{10}, ..., a_1$ који задовољава све описане услове је: $a_{11} = 1$, $a_{10} = 2$, $a_9 = 4$, $a_8 = 8$, $a_7 = 16$, $a_6 = 32$, $a_5 = 63$, $a_4 = 126$, $a_3 = 253$, $a_2 = 507$ и $a_1 = 1012$. Како неједнакост $a_k \geqslant a_{11} + ... + a_{k+1}$, важи за свако $k = \overline{1,10}$, а знак једнакости важи само за $k \in \{5,4,1\}$, то се формулом (2), након одбацивања $2^4 + 2^3 + 1$ бројева, добијају заиста 2023 различита броја.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Београд, 24. март 2024.

Други разред - А категорија

1. Докажимо да је највећи могући број сабирака које можемо обрисати, тако да буду задовољени услови задатка, једнак три. Увођењем смене $y = x + 14$, која је бијекција из $\mathbb{R}$ у $\mathbb{R}$, задати услов је еквивалентан са брисањем највећег могућег броја сабирака са леве стране неједнакости

$$(y-14)^2 + (y-13)^2 + ... + (y+13)^2 + (y+14)^2 \geqslant 2024 \qquad (**)$$

тако да новодобијена неједнакост буде тачна за сваки реалан број y. Нека је $f(y) = \sum_{k=-14}^{14}(y+k)^2 = 29y^2 + 2 \cdot \frac{14 \cdot 15 \cdot 29}{6} = 29y^2 + 2030$ и нека се након брисања сабирака $(y+n_1)^2, ..., (y+n_i)^2$, за неке $-14 \leqslant n_1 < n_2 < ... < n_i \leqslant 14$, из $f(y)$, добија функција $g(y)$. Да би новодобијена неједнакост важила потребно је (али не и довољно) да важи неједнакост $g(0) = 2030 - (n_1^2 + ... + n_i)^2 \geqslant 2024$. Отуда је неопходно да важи $6 \geqslant n_1^2 + ... + n_i^2$. Највећи број i за који може важити ова неједнакост је $i = 4$ (пошто је збир квадрата ма којих пет различитих бројева из скупа {-14,-13,...,13,14} већи од 6) и то само у случајевима $n_1 = -2,\ n_2 = -1, n_3 = 0, n_4 = 1$, односно $n_1 = -1,\ n_2 = 0,\ n_3 = 1,\ n_4 = 2$. Међутим, у оба случаја коефицијент уз y у $g(y)$ је различит од нуле, те функција g постиже минимум који је мањи од вредности $g(0) = 0$. Отуда, не може бити $i = 4$. Брисањем сабирака $(y-1)^2, y^2$ и $(y+1)^2$ добијамо $g(y) = 26y^2 + 2028 \geqslant 2024$. Овим смо доказали да је највећи могући број сабирака који се може обрисати, тако да важе наведени услови, једнак три.

2. Током решења ћемо за два човека рећи да су исте врсте уколико обојица говоре истину или обојица лажу, а иначе ћемо рећи да су различите врсте. Приметимо прво да ће неки човек за неког другог човека изјавити да говори истину ако и само ако су њих двојица исте врсте, док ће изјавити да лаже ако и само ако су различите врсте. Људи се за столом могу распоредити на 2^n суштински различитих начина - на свакој столици може да седи човек који говори истину, или човек који лаже. Како изјаве људи говоре само о томе да ли су они исте или различите врсте, можемо приметити да ће комплементарни распореди (распореди су комплементарни уколико за свако $1 \leqslant i \leqslant n$ на столици са бројем i у посматраним распоредима седе особе различите врсте) резултовати истом пролазном речју на крају поступка описаног у задатку. Уочимо сада произвољну пролазну реч. Уколико претпоставимо које је врсте човек на столици са бројем 1 (да ли говори истину или лаже), онда праћењем првих $n-1$ слова у посматраној речи, на јединствен начин можемо конструисати распоред људи који је могао да резултује овом пролазном речју. Заиста, уколико је на позицији i у посматраној речи слово Л, онда ће људи на столицама i и $i+1$ бити различите врсте, док уколико је на тој позицији слово И, онда ће они бити исте врсте. Како знамо које је врсте човек на првој столици, овај процес заиста јединствено дефинише распоред људи на столицама. Овиме смо доказали да свакој пролазној речи могу одговарати највише два распореда (у зависности од избора врсте човека на првој столици). Међутим, како мора постојати један такав распоред јер је реч пролазна, а тада ће и њему комплементарни распоред одговарати истој тој речи, знамо да свакој пролазној речи одговарају тачно два распореда људи на столицама. Како је могућих распореда 2^n, закључујемо да пролазних речи постоји 2^{n-1}.

3. Доказаћемо да су сва решења бројеви $n = 7 \cdot 17^2 \cdot p^1$, где је p произвољан прост број већи од 17, као и бројеви $n = 2^3 \cdot 11 \cdot 23^2$, односно $n = 3^4 \cdot 5^3$.
Нека је $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$, канонска факторизација броја n (при чему су $p_1 < p_2 < ... < p_k$ прости бројеви и $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{N}$). Докажимо да је

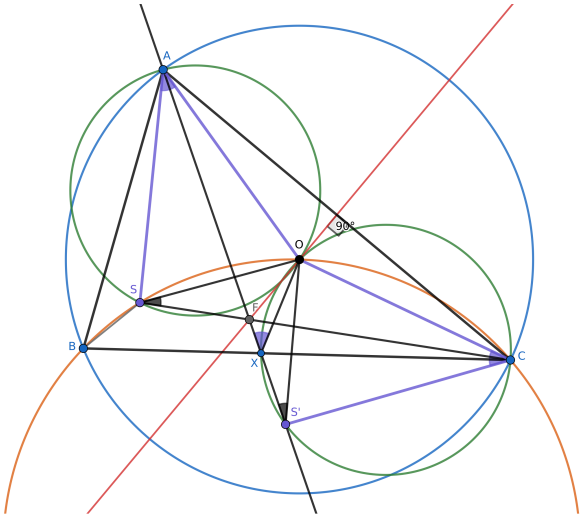
$$f(n) = \frac{n}{p_k} - (\alpha_k - 1). \qquad (ⓘⓘ)$$

Уколико је $\alpha_k = 1$ довољно је избацити све бројеве од 1 до n који су дељиви са p_k, пошто тада новодобијени производ неће бити дељив са p_k, а тиме ни са n. Таквих бројева је $\frac{n}{p_k} = \frac{n}{p_k} - (\alpha_k - 1)$. Ако је $\alpha_k > 1$ довољно је избацити све бројеве од 1 до n који су дељиви са p_k, осим бројева $1 \cdot p_k, (p_k + 1) \cdot p_k, (2p_k + 1) \cdot p_k, ..., ((\alpha_k - 2)p_k + 1) \cdot p_k$. Тада ће новодобијени производ бити дељив са $p_k^{\alpha_k} - 1$, али не и са $p_k^{\alpha_k}$, а тиме ни са n. Наведено избацивање је заиста могуће учинити, пошто је

$$((\alpha_k - 2)p_k + 1) \cdot p_k \leqslant 2^{\alpha_k - 3} \cdot p_k^2 + p_k \leqslant 2^{\alpha_k - 3} \cdot p_k^2 + 2^{\alpha_k - 3} \cdot p_k^2 = 2^{\alpha_k - 2} \cdot p_k^2 \leqslant p_k^{\alpha_k} \leqslant n.$$

Овим је доказано да је $f(n) \leqslant \frac{n}{p_k} - (\alpha_k - 1)$. Посматрајмо сада ма које избацивање где је избачено $\frac{n}{p_k} - \alpha_k$ и докажимо да је новодобијени производ дељив са n. То ћемо учини тако што проверимо да је при таквом избацивању остало (није избачено) по бар α_i бројева који су дељиви са p_i, за свако $i = \overline{1, k}$. Како бројева који нису дељиви са p_i има $n - \frac{n}{p_i}$, довољно је проверити да за свако $i = \overline{1, k}$ важи неједнакост $(n - (\frac{n}{p_k} - \alpha_k)) - (n - \frac{n}{p_i}) \geqslant \alpha_i$. За $i = k$ неједнакост очигледно важи, док за $i < k$ имамо $\frac{n}{p_i} - \frac{n}{p_k} + \alpha_k > \frac{p_k - p_i}{p_i p_k} \cdot n \geqslant \frac{1}{p_i p_k} \cdot n \geqslant \frac{1}{p_i p_k} \cdot p_i^{\alpha_i} p_k^{\alpha_k} \geqslant p_i^{\alpha_i - 1} \geqslant 2^{\alpha_i - 1} \geqslant \alpha_i$. Овим је доказано да је и $f(n) > \frac{n}{p_k} - \alpha_k$, па је доказ једнакости (ⓘⓘ) комплетиран.
Одредимо сада помоћу (ⓘⓘ) тражене бројеве n. За $\alpha_k = 1$ имамо $n = 2023p_k = 7 \cdot 17^2 \cdot p_k$, па је $n = 7 \cdot 17^2 \cdot p^1$, где p произвољан прост број већи од 17. За $\alpha_k = 2$ имамо $n = 2024p_k = 2^3 \cdot 11^1 \cdot 23^1 \cdot p_k$, па како $p_k^2 \mid\mid n$, мора бити $p_k = 23$, односно $n = 2^3 \cdot 11^1 \cdot 23^2$. За $\alpha_k = 3$ имамо $n = 2025p_k = 3^4 \cdot 5^2 \cdot p_k$, па како $p_k^3 \mid\mid n$, мора бити $p_k = 5$, односно $n = 3^4 \cdot 5^3$. Докажимо да у случају $\alpha_k \geqslant 4$ нема решења. Уколико би било $\alpha_k \geqslant 4$, онда би важило $2022 + \alpha_k = \frac{n}{p_k} \geqslant p_k^{\alpha_k - 1} \geqslant 2^{\alpha_k - 1}$, што је испуњено само за $\alpha_k \leqslant 11$ (математичком индукцијом тривијално доказујемо да је $2^{\alpha_k - 1} > 2022 + \alpha_k$, за $\alpha_k \geqslant 12$). Зато је $2033 \geqslant 2022 + \alpha_k = \frac{n}{p_k} \geqslant p_k^3$, те је и $p_k < 13$. Непосредном провером лако је установити да не постоји $4 \leqslant \alpha_k \leqslant 11$, $p_k \leqslant 11$ за које важи $p_k^{\alpha_k - 1} \mid 2022 + \alpha_k$. На овај начин је доказано да су сва решења бројеви $n = 7 \cdot 17^2 \cdot p^1$, где је p произвољан прост број већи од 17, као и бројеви $n = 2^3 \cdot 11 \cdot 23^2$, односно $n = 3^4 \cdot 5^3$.

4. Из услова задатка $\sphericalangle SBC + \sphericalangle SCB = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB - \sphericalangle BAC$, одакле је $\sphericalangle BSC = 2 \cdot \sphericalangle BAC$, па је четвороугао $BCOS$ тетиван. Како је $\sphericalangle CAX = \sphericalangle ACS$, знамо да су праве CS и AX симетричне преко симетрале дужи AC. Са F обележимо пресек правих CS и AX, који се онда мора налазити и на симетрали дужи AC. Нека је сада S' тачка симетрична тачки S у односу на симетралу дужи AC. По претходном, тачка S' се налази на правој AX. При посматраној симетрији, преко симетрале дужи AC се тачке O и F сликају саме у себе, те имамо $\sphericalangle OSF = \sphericalangle OS'F$, док из тетивности четвороугла $BSOC$ имамо $\sphericalangle OSF = \sphericalangle OBC$. Како је и $\sphericalangle OBC = \sphericalangle OCB$, закључујемо да је $\sphericalangle OS'F = \sphericalangle OCB$, одакле следи да је четвороугао $XS'CO$ тетиван. Такође, при посматраној симетрији, преко симетрале дужи AC се тачка O слика у саму себе, а тачка A се слика у тачку C, те је $\sphericalangle SAO = \sphericalangle S'CO$, а из тетивности четвороугла $XS'CO$ је $\sphericalangle S'CO = \sphericalangle AXO$, одакле добијамо $\sphericalangle SAO = \sphericalangle AXO$, што је и требало доказати.



Друштво математичара Србије

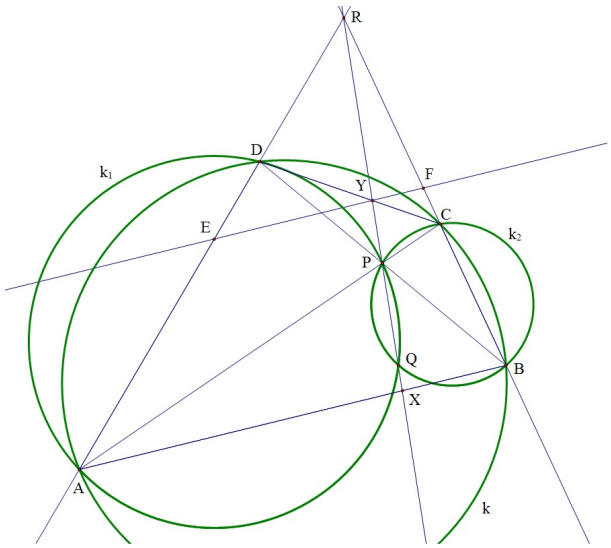
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Трећи разред - А категорија

1. Сортирајмо дискове по величини полупречника и радимо следеће: Прво, ћемо узети диск највећег полупречника и обрисати све дискове који нису дисјунктни са њим. Након тога, узмимо диск највећег полупречника који је остао и обришимо оне који нису дисјунктни са њим, и тако даље. За сваки диск постоји диск D већег полупречника који има заједничких тачака са њим, те се он налази у диску $3D$, тј. диску са истим центром као D, али три пута већим полупречника. Овим је доказ завршен.

2. Присетимо се формуле за број делилаца: ако је $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t}$ проста факторизација броја n, тада је број делилаца $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_t + 1)$. Посматрајмо вредност $n = 2^{p-1}$ за довољно велики прост број p. Једноставно тада видимо да је $\tau(n) = p$. Ово значи да је $\tau(a_n) = p$. Приметимо да ако a_n има барем два проста фактора, тада $\tau(a_n)$, по горњој формули, има барем два делиоца већа од 1, што није могуће, јер је прост број. Због тога a_n мора бити облика q^{p-1}, где је q прост број. Међутим, ако $q \neq 2$, онда је $a_n \geqslant 3^{p-1}$. Са друге стране је $a_n < kn = k2^{p-1}$. За довољно велико p је $(\frac{3}{2})^{p-1} > k$, али ово није могуће. Одавде следи да је $a_{2^{p-1}} = 2^{p-1}$, за све довољно велике p. Такође, из последњег директно следи да је $a_n = n$, за свако n, јер је $a_n \geqslant n$, што закључујемо на снову чињенице да је низ монотоно растући, а једнакост може да се достигне бесконачно много пута само уколико за низ важи $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Приметимо, најпре, да праве AD и BC нису паралелне. Заиста, ако би било $AD \parallel BC$, тада би $ABCD$ био једнакокраки трапез са основицама AD и BC, те би се кружнице описане око троуглова APD и BPC додиривале, што није случај због дефиниције тачке Q. Нека је k кружница описана око четвороугла $ABCD$, а k_1 и k_2, редом, кружнице описане око троуглова APD и BPC. Нека је R пресечна тачка правих AD и BC. Како је права AD радикална оса за k и k_1, а права BC радикална оса за k и k_2, то је тачка R, као пресек тих радикалних оса, уједно и радикални центар за k, k_1 и k_2. Зато се тачка R налази и на радикалној оси кружница k_1 и k_2, те права PQ пролази кроз R.



Докажимо да су праве AB и CD паралелне. Претпоставимо супротно и кроз тачку Y конструишимо праву паралелну са AB. Како та права није паралелна са CD, нека она праве AD и BC, редом, сече у E и F, при чему је $E \neq D$ и $F \neq C$. Сада, користећи Талесову теорему и дати услов $\frac{AX}{XB} = \frac{DY}{YC}$, имамо да важи $\frac{EY}{YF} = \frac{AX}{XB} = \frac{DY}{YC}$. Из последње једнакости је $\frac{EY}{YD} = \frac{FY}{YC}$, а како је и $\sphericalangle EYD = \sphericalangle FYC$, троуглови EYD и FYC су слични. Из ове сличности добијамо да је $\sphericalangle EDY = \sphericalangle FCY$, одакле следи да су праве ED и FC паралелне. Контрадикција!

Како су праве AB и CD паралелне, то је четвороугао $ABCD$ једнакокраки трапез, те због симетричности слике у односу на симетралу основице AB, закључујемо да права PQ полови дужи AB и CD. Одатле је, заиста, $AX + YC = XB + DY$, што је и требало доказати.

4. Јасно је да су чланови оба низа позитивни. Нека је $x_n = \frac{a_n}{b_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Из услова задатка је $x_{n+1} = \frac{b_n + \frac{1}{a_n}}{a_n + \frac{1}{b_n}} = \frac{\frac{a_n b_n + 1}{a_n}}{\frac{a_n b_n + 1}{b_n}} = \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{x_n}$, тј. $x_{n+2} = x_n$, за свако $n \in \mathbb{N}$.

Одавде је $x_{2023} = x_{2021} = \ldots = x_1 = \frac{1}{2}$, те отуда $b_{2023} = 2a_{2023}$. Нека је, сада, $p_n = a_n b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Имамо: $p_{n+1} = (b_n + \frac{1}{a_n})(a_n + \frac{1}{b_n}) = p_n + 2 + \frac{1}{p_n} > p_n + 2$, $n \in \mathbb{N}$, одакле, једноставном индукцијом, добијамо да је $p_n > p_1 + 2(n-1) = 2n$, односно $p_{2023} > 2 \cdot 2023$. Из претходног је $\frac{b_{2023}^2}{2} = p_{2023} > 4046$, те је $b_{2023} > 2\sqrt{2023}$.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Четврти разред - А категорија

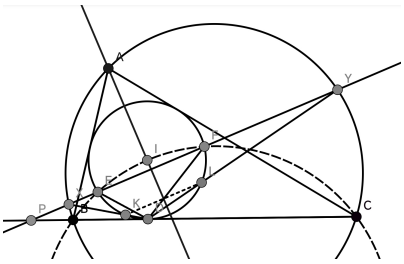
1. Докажимо да су једина решења задатка $n = 3^4 \cdot 5^2 - 1 = 2024$ и $n = 3^2 \cdot 5^4 = 5624$.
Нека је n неко решење задатка. Користићемо чињеницу да ако су $1 = t_1 < t_2 < ... < t_k = m$ сви делиоци броја m, онда је $t_i \cdot t_{k+1-i} = m$ за свако $i = \overline{1,k}$. Зато је $n + 1 = D_8 \cdot D_8$, те како бројеви $D_8 - 1$ и $D_8 + 1$ деле $D_8^2 - 1 = n$, важи $D_8 - 1, D_8 + 1 \in \{d_1, d_2, ..., d_{16}\}$. Међу паровима $\{d_1, d_{16}\}, \{d_2, d_{15}\}, ..., \{d_8, d_9\}$, који у производу дају n, најмања разлика бројева у пару је код пара $\{d_8, d_9\}$. Отуда, како $D_8 \nmid n = D_8^2 - 1$ и $(D_8 + 1) - (D_8 - 1) = 2$, закључујемо да је $D_8 - 1 = d_8$ и $D_8 + 1 = d_9$. Овим смо доказали да је $D_8 - d_8 = 1$. Размотримо случајеве у зависности од парности броја n.
1° n је непаран: Сада су бројеви $d_1, d_2, ..., d_{16}$ непарни, а због услова $(D_2 - d_2) \cdot (D_3 - d_3) \cdot (D_4 - d_4) = 1$ бројеви D_2, D_3 и D_4 морају бити парни. Најпре важи $D_2 = 2$. Ако је $D_i, i > 1$, неки делилац броја $n + 1$, онда се сви делиоци броја D_i, изузев њега самог, налазе међу бројевима $D_1, ..., D_{i-1}$. Отуда, како су D_3 и D_4 парни бројеви, закључујемо да је $D_3 = 2^2$ и $D_4 = 2^3$. Зато из $(D_2 - d_2) \cdot (D_3 - d_3) \cdot (D_4 - d_4) = 1$ имамо да је $d_2 = 3, d_3 = 5$ и $d_4 = 7$. Сада, на основу формуле за $\tau(n)$ имамо да је $n \in \{3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1, 3^1 \cdot 5^3 \cdot 7^1, 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^3\}$ или је $n = 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot p^1$ за неки прост број p, $p > 7$. Лако проверавамо да за $n \in \{3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1, 3^1 \cdot 5^3 \cdot 7^1, 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^3\}$ важи $n \equiv_4 1$, те $4 \nmid n + 1$, што је у супротности са $D_3 = 4$. Дакле, једина решења у овом случају могу бити евентуално бројеви облика $n = 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot p^1$, за неки прост број p, $p > 7$. На основу формуле за $\tau(n+1)$, знајући да $2^3 \mid n + 1$, лако утврђујемо да је $n + 1 = 2^{14}$ или $n + 1 = 2^4 \cdot q^2$, где је q неки прост број већи од 7 (с обзиром да су бројеви n и $n+1$ узајамно прости, а n је дељиво са $3, 5$ и 7). Како за $n = 2^{14} - 1$ важи $n \equiv_5 -2$, односно $5 \nmid n$, то он није решење. Преостаје да решимо једначину $105p = 16q^2 - 1$, где су p и q прости бројеви већи од 7. Бројеви $4q - 1$ и $4q + 1$ су, као узастопни непарни бројеви, узајамно прости, те је бар један од њих узајамно прост са простим бројем p. Отуда, из једнакости $(4q - 1)(4q + 1) = 105p$ добијамо да $4q - 1 \mid 105$ или $4q + 1 \mid 105$. Међутим, одавде, како је $4q + 1 > 4q - 1 \geqslant 4 \cdot 11 - 1 = 43$, имамо да је $4q - 1 = 105$ или $4q + 1 = 105$. Одавде је $q = \frac{51}{2}$ или $q = 26$, што није могуће. Овим смо доказали да у случају да је n непаран нема решења.
2° n је паран: Сада су бројеви $D_1, D_2, ..., D_{16}$ непарни, а због услова $(D_2 - d_2) \cdot (D_3 - d_3) \cdot (D_4 - d_4) = 1$ бројеви d_2, d_3 и d_4 морају бити парни. Аналогно, као у првом случају, закључујемо да је $d_2 = 2$, $d_3 = 2^2$ и $d_4 = 2^3$. Зато, из $(D_2 - d_2) \cdot (D_3 - d_3) \cdot (D_4 - d_4) = 1$ имамо да је $D_2 = 3, D_3 = 5$ и $D_4 = 9$. Дакле, број $n + 1$ има бар два проста фактора (3 и 5), те како је $\tau(n+1) = 15$ једине могућности су $n+1 = 3^4 \cdot 5^2 = 2025$ и $n+1 = 3^2 \cdot 5^4 = 5625$. Лако проверавамо да бројеви $n = 2024$ и $n = 5624$ заиста задовољавају све услове задатке, те су они једина решења.

2. Нека је P пресек правих BC и EF. Тада, из потенција таче P у односу на кружнице описане око троуглова ABC, BCI и EDF, редом, налазимо да је

$$PX \cdot PY = PB \cdot PC = PE \cdot PF = PD^2,$$

одакле закључујемо да је права PD, односно BC, тангента на кружницу k описану око троугла XDY у тачки D.

Сада лако видимо једнакост тражених углова. Наиме, ако је K друга тачка пресека праве XD и уписане кружнице k_1 троугла ABC, а L друга тачка пресека праве YD и поменуте уписане кружнице, тада је



$\sphericalangle KDB = \sphericalangle KLD$, као тангентни и периферијски угао тетиве KD кружнице k_1. Такође је $\sphericalangle XDB = \sphericalangle XYD$, опет, као тангентни и периферијски угао, овог пута тетиве XD кружнице k. Стога, закључујемо да је $\sphericalangle KLD = \sphericalangle XYD$, те је $XY \parallel KL$, односно, $EF \parallel KL$ и $KLFE$ је једнакокраки трапез. Дакле, $\sphericalangle XDE = \sphericalangle KDE = \sphericalangle LDF = \sphericalangle YDF$, што се и тврдило.

3. Доказаћемо да су једина решења $a = -1$, односно $a = -2023$.
Одредимо најпре моничан полином чије су све нуле бројеви $y_i = x_i^3, i = \overline{1, 2023}$. Нека је $\varepsilon = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Тада је

$$P(x) = (x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_{2023}),$$

$$P(\frac{x}{\varepsilon}) = (\frac{x}{\varepsilon} - x_1) \cdot ... \cdot (\frac{x}{\varepsilon} - x_{2023}) = (x - x_1\varepsilon) \cdot ... \cdot (x - x_{2023}\varepsilon) \cdot \frac{1}{\varepsilon^{2023}},$$

$$P(\frac{x}{\varepsilon^2}) = (\frac{x}{\varepsilon^2} - x_1) \cdot ... \cdot (\frac{x}{\varepsilon^2} - x_{2023}) = (x - x_1\varepsilon^2) \cdot ... \cdot (x - x_{2023}\varepsilon^2) \cdot \frac{1}{\varepsilon^{2\cdot 2023}}.$$

Како је су за ма које $z \in \mathbb{C}$ сви терћи корени из z^3 бројеви $z, z\varepsilon$ и $z\varepsilon^2$, множећи претходне три једнакости и користећи $\varepsilon^3 = 1$, имамо:

$$P(x) \cdot P(\frac{x}{\varepsilon}) \cdot P(\frac{x}{\varepsilon^2}) = (x^3 - x_1^3) \cdot ... \cdot (x^3 - x_{2023}^3) = Q(x^3), \qquad (✠)$$

где је $Q(t) = (t - x_1^3) \cdot ... \cdot (t - x_{2023}^3)$ (и његове све нуле су $x_1^3, ..., x_{2023}^3$). Из (✠), полином $P(x) \cdot P(\frac{x}{\varepsilon}) \cdot P(\frac{x}{\varepsilon^2})$ је полином по x^3 (те су сви његови коефицијенти уз степене који нису дељиви са 3 једнаки нули), па је:

$$P(x) \cdot P(\frac{x}{\varepsilon}) \cdot P(\frac{x}{\varepsilon^2}) = (x^{2023} + ax + b)((\frac{x}{\varepsilon})^{2023} + a\frac{x}{\varepsilon} + b)((\frac{x}{\varepsilon^2})^{2023} + a\frac{x}{\varepsilon^2} + b) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^{3\cdot 2023}}x^{3\cdot 2023} + a(\frac{1}{\varepsilon^{2023}\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon\varepsilon^{2\cdot 2023}} + \frac{1}{\varepsilon^{2023}\varepsilon^{2\cdot 2023}})x^{2\cdot 2023+1} + a^2(\frac{1}{\varepsilon\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^{2023}\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon\varepsilon^{2\cdot 2023}})x^{2023+1+1} +$$

$$+ a^3\frac{1}{\varepsilon\varepsilon^2}x^3 + b^3 = (x^3)^{2023} + 3a(x^3)^{1349} + 3a^2(x^3)^{675} + a^3x^3 + b^3,$$

те је $Q(t) = t^{2023} + 3at^{1349} + 3a^2t^{675} + a^3t + b^3$. Све нуле полинома $Q(t)$ су $y_i, i = \overline{1, 2023}$, те су све нуле полинома $Q(t-1)$ бројеви $z_i = y_i + 1, i = \overline{1, 2023}$. Посматрана сума једнака је збиру реципрочних вредности бројева $z_i, i = \overline{1, 2023}$, те је на основу Вијетових формула једнака количнику уз линеаран и слободан члан, помножено са (-1) (наведени коефицијенти су за полином $Q(t-1)$). Како је, на основу биномне формуле, код полинома $Q(t-1) = (t-1)^{2023} + 3a(t-1)^{1349} + 3a^2(t-1)^{675} + a^3(t-1) + b^3$ коефицијент уз линеаран члан једнак $2023 + 3a\cdot 1349 + 3a^2\cdot 675 + a^3$, док је слободан члан $-1 - 3a - 3a^2 - a^3 + b^3$, то је вредност посматране суме једнака $\frac{2023+3a\cdot 1349+3a^2\cdot 675+a^3}{(a+1)^3-b^3}$. Вредност последњег израза не зависи од b, $b \neq a+1$, акко $2023 + 3a\cdot 1349 + 3a^2\cdot 675 + a^3 = 0$. Очигледно решење последње једначине је $a = -1$, те растављањем добијамо да је $2023 + 3a\cdot 1349 + 3a^2\cdot 675 + a^3 = (a+1)^2(a+2023)$. Отуда су једина решења $a = -1$, односно, $a = -2023$.

4. Како се парови тенисера који играју меч у сваком тренутку бирају произвољно, без умањења општости можемо претпоставити да је читав жреб одрађен пре првог кола. Другим речима, турнир можемо представити помоћу комплетног бинарног стабла где корен садржи ранг победника турнира, његови потомци рангове финалиста, итд.
Уочавамо да сваки чвор који није лист одговара мечу између својих потомака, од којих један има исти ранг као и уочени чвор. Претпоставимо да је у датом (произвољном) турниру највећа разлика рангова у мечу N, што је, по претходном, уједно и највећа разлика између чвора и његовог потомка, односно највећа разлика чворова на оба

краја једне гране. Нека је $x_0x_1\dots x_k$ (јединствени) пут у стаблу између листа ранга 1 и листа ранга 2^n (уместо као чворове, x_i ћемо посматрати као одговарајуће рангове, тј. $x_0 = 1$ и $x_k = 2^n$). Тада је $|x_k - x_0| \leqslant |x_k - x_{k-1}| + |x_{k-1} - x_{k-2}| + \dots + |x_1 - x_0| \leqslant kN$. Притом се први заједнички предак посматраних листова једини појављује са обе своје гране у посматраном путу, а како је један од његових потомака истог ранга као и он сам, то је бар један од чланова у претходном збиру сигурно 0, те можемо написати и $2^n - 1 = |x_k - x_0| \leqslant (k-1)N$, тј. $N \geqslant \frac{2^n-1}{k-1}$. Највећа вредност дужина пута k достиже када се први и последњерангирани лист налазе у различитим крајевима стабла, односно, када им је први заједнички предак сам корен стабла, и тада је $k = 2n$. Према томе, за произвољан турнир важи $N \geqslant \frac{2^n-1}{2n-1}$, одакле, ако посматрамо турнир са $N = M$, закључујемо да је $M \geqslant \frac{2^n-1}{2n-1}$.

Покажимо сада горњу оцену за M. За то је довољно да нађемо пример турнира у коме је највећа разлика рангова $N = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ и у коме побеђује последњепласирани тенисер. Заиста, уколико овакав турнир постоји за свако n, да бисмо добили за нијансу бољу оцену дату у задатку, довољно је да узмемо таква два турнира са по 2^{n-1} играча, рангове једног од њих одузмемо од $2^n + 1$ (тада остају рангови $2^{n-1} + 1 \dots 2^n$ и на поттурниру побеђује најбољепласирани тенисер), и два поттурнира спојимо финалним мечом њихових победника (чија је разлика у рангу сада $(2^{n-1} + 1) - 2^{n-1} = 1$). Тада, највећа разлика у рангу на целом турниру остаје једнака највећој разлици у неком од поттурнира, односно, $\binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}$.

Конструишимо сада турнир са 2^n тенисера, максималном разликом у рангу $N = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ и последњепласираним тенисером као победником. Представимо опет турнир преко стабла. Идеја је да победник сваког меча буде десни предак и да мечеве играју искључиво тенисери из суседних „слојева”, односно они чији се ранг не разликује много. Конкретно, кажимо да корен припада нултом слоју, а слојеве даље рекурзивно дерфинишемо: ако произвољни чвор који није лист припада k-том слоју, његов десни предак припада истом слоју, а леви $(k+1)$-вом слоју. На тај начин добијамо n слојева (n-том слоју припада само најлевљи чвор), и притом сваки тенисер из $(k+1)$-вог слоја игра тачно једном с неким тенисером из k-тог слоја (јер тај меч губи, а све претходне, које игра с тенисерима из $(k+2)$-гог слоја, је победио).

Стабло попуњавамо на следећи начин. На почетку упишемо ранг 2^n у сва места одређена за нулти слој (десна страна костура), а даље попуњавамо рекурзивно: након што смо попунили цео k-ти слој, посматрамо листове $(k+1)$-вог слоја, те најдешњи лист који нема претка из свог слоја (и који дакле први и једини меч игра против k-тог слоја), у њега уписујемо први следећи слободан ранг (тако да је разлика у рангу у том мечу неко $r_{k+1,0}$ и потом у све листове $(k+1)$-вог слоја који немају претка из свог слоја уписујемо ранг за $r_{k+1,0}$ мањи од ранга тенисера из $(k+1)$-вог слоја с којим игра меч. Исто понављамо за остале листове: у најдешњи, који има тачно једног претка из свог слоја, уписујемо први следећи слободан ранг, тако да је разлика у његовом јединому мечу против претходног слоја неко $r_{k+1,1}$ и потом у све остале листове из $(k+1)$-вог, који имају тачно једног претка из свог слоја, уписујемо ранг за $r_{k+1,1}$ мањи од ранга тенисера из k-тог слоја с којим игра меч. Ово настављамо до попуњавања листова $(k+1)$-вог слоја, након чега у сваки преостали чвор $(k+1)$-вог слоја уписујемо исти ранг који има његов десни предак (који је у истом слоју).

1	2	3	7	4	8	11	17	5	9	12	18	14	20	23	27	6	10	13	19	15	21	24	28	16	22	25	29	26	30	31	32
2		7		8		17		9		18		20		27		10		19		21		28		22		29		30		32	
7				17				18				27				19				28				29				32			
17								27								28								32							
27																32															
32																															

Индуктивно, лако показујемо да се у k-том слоју налази тачно $\binom{n}{k}$ листова. Притом је разлика у рангу два тенисера из суседних слојева k и $k+1$, који играју меч по конструкцији, константна у оквиру кола у коме се игра меч и расте што је више коло,

па је самим тим највећа у мечу који одигравају најбољерангирани тенисери из та два слоја (тај меч је увек с леве стране костура), а та разлика је једнака броју тенисера у $(k+1)$-вом слоју. Како је тај број једнак неком од биномних коефицијената, највише је једнак највећем међу њима, централном, односно $N = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Тиме је доказ завршен.