Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред - А категорија

1. Јасно је да ваыхи $x \varrho y \overset{\text{деф}}{\iff} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x-2y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ или $x = 2y$.
(а) Релација јесте рефлексивна, јер $x^2 - 3x^2 + 2x^2 = 0$, за свако $x \in \mathbb{R}$ (односно $x = x$). Релација није симетрична, јер $2 \varrho 1$, а $1 \not\varrho 2$. Даље, релација јесте антисиметрична, јер $x \varrho y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 2y. \end{cases}$, а $y \varrho x \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = 2x. \end{cases}$, што је могуће само за $x = y$. КОначно, релација ϱ није транзитивна, јер из $4 \varrho 2, 2 \varrho 1$, очигледно, не следи $4 \varrho 1$, јер не важи $4 = 1$ нити $4 = 2 \cdot 1 = 2$.
(б) и (в): Релација ϱ није транзитивна, па самим тим ϱ није ни релација еквиваленције, ни релација поретка.

2. Доказаћемо да је једино за $r = -1$ могуће наћи такво једно a. Видимо да је $p(x) = x^3 + (a+r)x^2 + (ar+1)x + a$, па желимо наћи све реалне бројеве r за које постоји тачно један реалан број a такав да су истовремено задовољене следеће три неједнакости:

$$\begin{aligned} &a \geq 0 \quad \text{(слободни члан)} \\ &ar + 1 \geq 0 \quad \text{(коефицијент уз } x\text{)} \\ &a + r \geq 0 \quad \text{(коефицијент уз } x^2\text{)}\ . \end{aligned}$$

Ако је $r \geqslant 0$, тада свако $a \geqslant 0$ задовољава све три неједнакости, па позитивни реални бројеви r сигурно нису решење задатка. Размотримо, сада, случај $r < 0$. Тада, последња неједнакост тривијално имплицира прву, па њу не морамо ни разматрати. Друге две неједнакости у случају $r < 0$ су еквивалентне са:

$$\begin{aligned} a &\leqslant -\frac{1}{r} \\ a &\geqslant -r. \end{aligned}$$

Дакле, тражимо све вредности $r < 0$ за које тачно један реалан број a задовољава

$$-r \leqslant a \leqslant -\frac{1}{r}.$$

Јасно, ово је могуће ако и само ако важи $-r = -\frac{1}{r}$. Једнакост $-r = -\frac{1}{r}$ је могућа само за $r = \pm 1$. Како смо раније закључили да мора бити $r < 0$, имамо да је једина преостала могућност $r = -1$. У том случају јединствен реалан број a који задовољава посматране неједнакости је $a = 1$. Лако се да проверити да у том случају имамо полином

$$(x+1)\left(x^2 - x + 1\right) = x^3 + 1,$$

који заиста има све ненегативне коефицијенте.

3. Ставимо да је $p^{q+r} + q^{p+r} + r^{q+p} = a^2$, за неки непаран природан број a. Израз на левој страни је симетричан, те можемо претпоставити да важи $2 \leqslant r \leqslant q \leqslant p$. Ако је $p = 2$, тада видимо да мора бити $q = r = 2$, што не може. Стога, претпоставимо да је p непаран прост број. Јасно је да r не може бити непаран прост, јер би у том случају $(q \geqslant r)$ и q био такав. Како су тада бројеви $q+r$, $p+r$ и $q+p$ парни, израз на левој страни

би се свео на збир квадрата три непарна природна броја, те како квадрати непарних природних бројева дају остатак 1 при дељењу са 4, то би израз на левој страни дао остатак 3 при дељењу са 4, док би онај на десној давао остатак 1, што је немогуће. Дакле, $r = 2$. Истим аргументом и број q не може бити непаран, те је $q = 2$. У том случају ($q = r = 2$) полазни израз постаје

$$p^4 + 2^{p+3} = a^2.$$

Претпоставимо да је $p > 3$. На основу мале Фермаове теореме, број p^2 ће давати остатак 1 при дељењу са 3, те и p^4. Такође, $p+3$ је паран, па важи да 2^{p+3} даје остатак 1 при дељењу са 3, одакле следи да у овом случају лева страна даје остатак 2 при дељењу са 3, што није случај и са десном страном (квадрати природних бројева при дељењу са 3 дају остатке 0 или 1). Дакле, $p = 3$. Међутим, провером видимо да $p = 3$ није решење. Стога, такви прости бројеви не постоје.

4. Приметимо да Маргита никако не може увећати број непарних бројева који се појављују на табли: наиме, уколико свој потез одигра на два парна, односно парном и непарном броју, на табли остају опет два парна, односно паран и непаран број, док у случају да потез одигра на два непарна броја, на табли остају непаран и паран број. Како је на почетку на табли тачно k непарних бројева, закључујемо да Маргита сме играти искључиво потезе прва два типа, и притом је сваки потез након ког остаје ново појављивање броја n Маргита морала играти над парним и непарним бројем, јер је то једини тип дозвољених потеза који мења непарне бројеве.

Нека су a и b бројеви над којима је Маргита одиграла неки потез након кога се је на табли остало ново појављивање броја n. Тада мора бити $a + b = n$ и уколико је $a, b > 1$, то је $ab > a + b = n$, па оба новонастала броја остају неупотребљива за даље коришћење (оба су бар n, те их Маргита не може употребити да добије нову копију n). С друге стране, уколико је $a = 1$ (аналогно $b = 1$), то је b нужно $n - 1$ и након одигравања потеза на табли остају $n - 1$ и n, који су опет оба неупотребљива за добијање нових појављивања n, јер нема више јединица с којима би се $n - 1$ једино могло упарити. Како на почетку нема нити једне копије броја n (јер је $n > 2k-1$) и како би након евентуалног добијања $(k - 1)$-вог појављивања броја n сви бројеви на табли сем највише једног остали неупотребљиви, закључујемо да Маргита може направити највише $(k - 1)$ копију броја n и никако њих тачно n.

5. Означимо са O центар описаног круга троугла ABC и унутрашње углове $\triangle ABC$ са α, β и γ. Дефинишимо тачку H' као тачку симетричну тачки D у односу на O. Како је O средиште DH', B средиште DE и C средиште DF, закључујемо да је троугао $EH'F$ сличан са троуглом BOC, па је $H'E = H'F$ и $\sphericalangle EH'F = 2\alpha$. Како је $\sphericalangle EGA = \gamma$ и $\sphericalangle FGA = \beta$, знамо да је $\sphericalangle EHF = 2\alpha$. Како је и $HE = HF$, а H и H' су са исте стране праве BC, закључујемо да је $H' \equiv H$, чиме је тврђење задатка доказано.

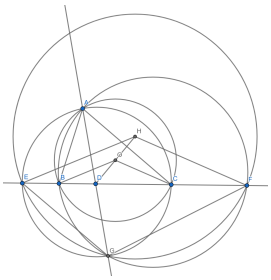


Figure 1:

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Други разред - А категорија

1. Претпоставимо да је n особа у датој групи. Посматрајмо једну особу међу њима. Означимо је са C. Она има тачно три пријатеља међу осталим члановима групе. Како из претпоставке сваки пријатељ његових пријатеља има такође три пријатеља, тада укупан број пријатеља од пријатеља не може бити већи од $3{\cdot}2$, јер је за сваког пријатеља од особе C пријатељство са особом C већ урачунато (зато је $3 \cdot 2$, а не $3 \cdot 3$). Стога, максималан број особа у поменутој групи је $1+3+3\cdot 2 = 10$, тј. $n \leqslant 10$. Напоменимо да смо у екстремалном случају, тј. када је $n = 10$, рачунали да се пријатељи од пријатеља и особа C не познају. На слици је дат пример познанстава у случају групе од $n = 10$ особа, који испуњава услове задатка.

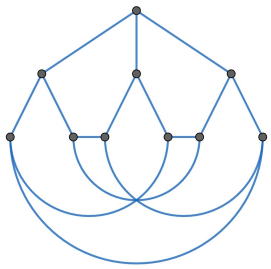


Figure 2:

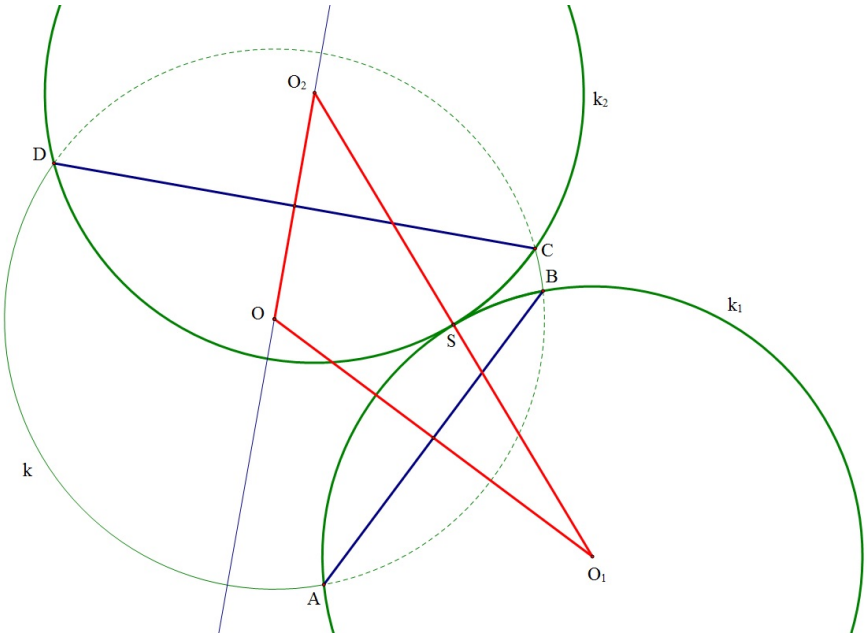
2. Како су обе нуле x_1 и x_2 у $(0,1)$, то значи да су $f(0), f(1) \neq 0$ (и цели бројеви), па важи $|f(0)\cdot f(1)| \geqslant 1$. Функцију можемо записати као $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$, па услов $|f(0)\cdot f(1)| \geqslant 1$ постаје $a^2x_1x_2(1-x_1)(1-x_2) \geqslant 1$. Из А-Г неједнакости, за $x \in (0,1)$, имамо да је $\dfrac{1}{2} = \dfrac{x+(1-x)}{2} \geqslant \sqrt{x(1-x)}$, те кад квадрирамо добијамо $\dfrac{1}{4} \geqslant x(1-x)$, тј. $x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$, при чему једнакост важи када су једнаки, тј. када је $x = 1-x = \frac{1}{2}$. Дакле, како су обе нуле x_1 и x_2 из $(0,1)$, добијамо да важи $x_1(1-x_1) \leqslant \dfrac{1}{4}$ и $x_2(1-x_2) \leqslant \dfrac{1}{4}$, па кад помножимо ове неједнакости долазимо до $x_1x_2(1-x_1)(1-x_2) < \frac{1}{16}$ (овде важи строга неједнакост, јер не могу бити и x_1 и x_2 једнаки $\frac{1}{2}$, с обзиром да квадратна функција $f(x)$ има 2 различите нуле). Из $a^2x_1x_2(1-x_1)(1-x_2) \geqslant 1$ и $x_1x_2(1-x_1)(1-x_2) < \frac{1}{16}$, следи да је $a^2 > 16$, а како је a природан број мора бити $a \geqslant 5$, што је и требало показати.

За $a = 5$ имамо пример функције $f(x) = 5x(1-x)+1 = 5x^2-5x+1$ која испуњава услове задатка.

3. Нека су $k_1(O_1, R)$ и $k_2(O_2, R)$, редом, осносиметричне слике круга k у односу на тетиве AB и CD. Нека је S додирна тачка пресликаних лукова из формулације задатка, а тиме и кругова k_1 и k_2. Тачка S налази се у унутрашњости круга k (не може бити на самој кружници k, пошто би тада тетиве AB и CD имале заједничку тачку). Нека је $AB = 2x$, $CD = 2y$ и нека је растојање тачке O од тетива AB и CD, редом, једнако z и t. Размотримо најпре случај када тачке O_1, O и O_2 нису колинеарне. Како је $O_1O_2 = 2R, OO_1 = 2z$, $OO_2 = 2t$, а OS је тежишна дуж у троуглу O_1O_2O и $OS < R$, имамо

$R^2 > OS^2 = \frac{2\cdot(2z)^2+2\cdot(2t)^2-(2R)^2}{4}$, те је

$$R^2 > z^2 + t^2. \tag{1}$$



У случају да су тачке O_1, O и O_2 колинеарне, имамо да је $2R = O_1O_2 = O_1O + O_2O = 2z + 2t$, па је $R = z + t$, односно $R^2 = z^2 + t^2 + 2zt > z^2 + t^2$. Овим неједнакост (1) важи и у том случају. На основу Питагорине теореме имамо да је $R^2 = z^2 + x^2$ и $R^2 = t^2 + y^2$, те је $2R^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$. Одавде, на основу (1), добијамо неједнакост $R^2 < x^2 + y^2$, односно $4R^2 < AB^2 + CD^2$.

4. Имамо $2024^x = y^2 - 1 = (y-1)(y+1)$. Како је десна страна цео број, то мора бити и израз 2024^x, па је $x \geqslant 0$. Ако је $x = 0$, требало би да важи $y^2 = 2$, што није могуће.. Дакле, надаље решавамо једначину за $x \in \mathbb{N}$. Јасно је да је $y \neq 0$. Сада ћемо, без умањења општости, претпоставити да је $y > 0$. Знамо да је $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, па како је НЗД$(y-1, y+1) \in \{1, 2\}$, и како је 2024 паран број, знамо да су и $y-1$ и $y+1$ парни, то јест да је НЗД$(y-1, y+1) = 2$. Даље, 11^x се налази у факторизацији једног од чинилаца $y-1$ и $y+1$, а исто важи и за 23^x. Сада, како је $y^2 = 2024^x + 1 > 1936^x + 1$, знамо да је $y - 1 \geqslant \sqrt{1936^x} = 44^x$, а како је $y^2 = 2024^x + 1 \leqslant 2025^x$, $y \leqslant 45^x$. Ако би 11^x и 23^x делили исти чинилац, он би био дељив са 253^x, па би био већи или једнак од 253^x, али како је $y + 1 < 45^x + 1 < 253^x$, ово је немогуће. Ако би 23^x и 2^{3x-1} делили исти чинилац, он би био дељив са $23^x \cdot 2^{3x-1}$, па би био већи или једнак од $23^x \cdot 2^{3x-1}$, али $y+1 \leqslant 45^x + 1 \leqslant 46^x = 23^x \cdot 2^x < 23^x \cdot 2^{3x-1}$, па је и ово немогуће. Дакле, како од делилаца 23^x, 11^x и 2^{3x-1} бар два деле исти чинилац, доказали смо да то морају бити 11^x и 2^{3x-1}. Због тога је неки чинилац дељив са $\frac{88^x}{2}$, па је $y+1 \geqslant \frac{88^x}{2}$, а већ знамо да је $y+1 \leqslant 45^x + 1$. Дакле, мора важити $2 \cdot (45^x + 1) \geqslant 88^x$, а индукцијом лако доказујемо да ово не важи за $x > 1$. За $x = 1$ налазимо једина решења задатка $(x, y) \in \{(1, 45), (1, -45)\}$.

5. Уколико је n потпун квадрат побеђује Бобан, док у супротном побеђује Ана. У сваком потезу се експоненти простих делилаца броја на табли смањују за 0 или 1. Због тога, ако број који се налази на табли у неком тренутку није потпун квадрат, играч који је на потезу може да изабере делилац такав да након његовог потеза буде потпун квадрат. Заиста, све непарне експоненте смањи за 1 (овакав је барем 1 пошто број није квадрат), док парне не мења. Нека n није потпун квадрат. Анина стратегија

је да након сваког њеног потеза број на табли буде квадрат. Ово је у првом потезу могуће према претходној дискусији. Након Бобановог потеза број на табли неће бити квадрат (морао би експонент неког простог броја да смањи бар за 2, што не сме да уради), па ће Ана увек моћи да прати своју стратегију. Како се број стално смањује и након сваког Бобановог потеза број на табли није квадрат, па је самим тим различит од 1, Ана побеђује. Уколико је n квадрат, након првог Аниног потеза више није квадрат. Пошто је сада Бобан на потезу (он има улогу првог играча), на основу претходно урађеног он има победничку стратегију.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Трећи разред - А категорија

1. Нека је A карактеристични збир магичног квадрата 3×3, тј. збир по колонама, тј. врстама, односно, дијагоналама. Јасно је да је $3A = S$, а $A = 3e$ (видети слику).

a	b	c
d	e	f
g	h	i

.

Тада је $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ A & A & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & A \\ d & e & A \\ A & A & 3A \end{vmatrix} = A \cdot \begin{vmatrix} a & b & A \\ d & e & A \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3A \cdot \begin{vmatrix} a & b & e \\ d & e & e \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. Како је детерминанта која има све елементе целе бројеве, такође цео број, показали смо да је D дељиво са $3A = S$, тј. $D : S$ је цео број, за $S \neq 0$.

2. Доказаћемо да Бранко има победничку стратегију. Бранко, најпре, докле год је то могуће, брише ма који сабирак чији је степен непаран. Након тога брише ма који од преосталих сабирака, само не сабирак 1. Докажимо да Бранко заиста може да спроведе ову стратегију и да је она победничка. Нека је након неког Аациног потеза на табли полином $A(x)$, који нема реалну нулу (ако има реалну нулу, онда је Аца већ изгубио игру). Зато је полином $A(x)$ константног знака и како је $A(0) = 1$, то за свако $x \in \mathbb{R}$ важи $A(x) > 0$. Уколико полином $A(x)$ садржи ма који сабирак облика x^{2k-1}, за неко $k \in \{1, 2, ..., 1012\}$, Бранко брисањем сабирка x^{2k-1} добија полином $A(x) - x^{2k-1}$. За $x \leqslant 0$ важи $A(x) - x^{2k-1} \geqslant A(x) > 0$, док за $x > 0$ очигледно важи $A(x) - x^{2k-1} > 0$ (пошто у сваком тренутку, осим ако је табла празна, на табли стоји полином чији су сабирци позитивни за свако позитивно x). На овај начин, након Бранковог потеза, полином на табли нема реалну нулу. Уколико су пак сви сабирци у полиному $A(x)$ парног степена, њих има парно много (закључно са Аациним потезом уклоњено не укупно непарно много сабирака, а у почетку их је такође непарно много) и зато Бранко може обрисати ма који од њих, али да то није сабирак 1. Тиме новодобијени полином (након овог Бранковог потеза) има сабирке само парног степена, те нема реалну нулу (пошто је увек позитиван). На овај начин Бранко увек "има одговор", те ће Аца изгубити игру или доћи у позицију да избрише и последњи сабирак, чиме се добија нула полином који има реалну нулу (и тиме Аца, опет, губи игру).

3. Потенције тачке D у односу на кругове описане око троуглова ACE и ABF су једнаке и износе по $2 \cdot DB \cdot DC$, одакле следи да се тачка G налази на правој AD и $DA \cdot DG = 2 \cdot DB \cdot DC$. Из потенције тачке D у односу на круг описан око троугла AEF знамо да је $DA \cdot DH = 4 \cdot DB \cdot DC$. Из овога закључујемо да је $DH = 2 \cdot DG$, те како су D, G и H колинеарне, закључујемо и да је $DG = GH$, чиме је тврђење задатка показано.

4. Доказ вршимо индукцијом по n, при чему је база за $n = 2$ тривијална. Приметимо да смемо произвољно да мењамо места колонама и редовима и да притом добијемо проблем еквивалентан задатку. Изаберимо ред или колону која садржи највише обојених поља. Нека је, без умањења општости, у питању ред. Заменимо места уоченом реду и последњем реду табле (уколико уочени ред већ није био последњи). У овом реду према услову задатка постоји барем једно необојено поље. Уколико оно није у првој колони, заменимо места одговарајућим колонама тако да је сада у доњем левом ћошку табле необојено поље. Ово поље изаберемо као једно од n које желимо и избришимо прву

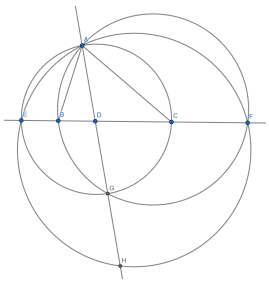


Figure 3:

колону и последњи ред табле. Остаје да проверимо да за преосталу таблу странице $n-1$ важе услови задатка, одакле тврђење следи индукцијом. Прво, избрисани ред садржи барем два обојена поља осим када је $n=3$ и у сваком реду и свакој колони постоји тачно једно обојено поље у ком је случају лако изабрати жељена 3 поља. У супротном, у остатку табле има највише $2n-5$ обојених поља. Даље, не постоји ниједан ред или колона који су потпуно обојени јер би онда и последњи ред почетне табле имао барем $n-1$ обојено поље па би на почетној табли било барем $n-1+n-1=2n-2$ обојених поља супротно услову задатка. Дакле, можемо применити индукцијску хипотезу на таблу странице $n-1$ и изабрати $n-1$ поља које заједно са једним већ изабраним чине тражених n поља. Овим је индукција завршена.

5. Додефинишимо низ тако да је $a_2 = a_1 + 3 \cdot a_0$ и $a_1 = a_0 + 3 \cdot a_{-1}$. Тиме је $a_0 = 0$. Користећи једнакост $a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n$, за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$a_{n+6} \equiv a_{n+5} + 3a_{n+4} \equiv 4a_{n+4} + 3a_{n+3} \equiv 7a_{n+3} + 4a_{n+2} \equiv 3a_{n+2} + 5a_{n+1} \equiv a_n (mod\ 8).$$

Отуда је $a_{2024} \equiv_8 a_{2+337\cdot 6} \equiv_8 a_2 \equiv_8 1$. (1) Слично претходном имамо да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$a_{n+12} \equiv a_{n+11} + 3a_{n+10} \equiv 4a_{n+10} + 3a_{n+9} \equiv 7a_{n+9} + a_{n+8} \equiv 8a_{n+8} + 10a_{n+7} \equiv 7a_{n+7} + 2a_{n+6} \equiv$$

$$\equiv 9a_{n+6} + 10a_{n+5} \equiv 8a_{n+5} + 5a_{n+4} \equiv 2a_{n+4} + 2a_{n+3} \equiv 4a_{n+3} + 6a_{n+2} \equiv 10a_{n+2} + a_{n+1} \equiv 8a_n \pmod{11},$$

те одавде, користећи $a_8 = 217$, налазимо да је

$$a_{2024} \equiv_{11} a_{8+168\cdot 12} \equiv_{11} a_8 \cdot 8^{168} \equiv_{11} 217 \cdot 8^{168} \equiv_{11} 8^{169} \equiv_{11} 2^{507} \equiv_{11} (2^{10})^{50} \cdot 2^7 \equiv_{11} 1^{50} \cdot 128 \equiv_{11} 7. \tag{2}$$

Опет, користећи једнакост $a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n$, за свако $n \in \mathbb{N}_0$ важи

$$a_{n+22} \equiv a_{n+21} + 3a_{n+20} \equiv 4a_{n+20} + 3a_{n+19} \equiv 7a_{n+19} + 12a_{n+18} \equiv 19a_{n+18} + 21a_{n+17} \equiv 17a_{n+17} + 11a_{n+16} \equiv$$

$$\equiv 5a_{n+16} + 5a_{n+15} \equiv 10a_{n+15} + 15a_{n+14} \equiv 2a_{n+14} + 7a_{n+13} \equiv 9a_{n+13} + 6a_{n+12} \equiv 15a_{n+12} + 4a_{n+11} \equiv$$

$$\equiv 19a_{n+11} - a_{n+10} \equiv 19(19a_n - a_{n-1}) - (15a_n + 4a_{n-1}) \equiv 346a_n \equiv a_n \pmod{23}.$$

Зато је $a_{2024} \equiv_{23} a_{0+92\cdot 22} \equiv_{23} a_0 \equiv_{23} 0$. (3)
Посматрајмо систем конгруенција, који се састоји од једначина $(1), (2)$ и (3). По Кинеској теореми о остацима тај систем има јединствено решење по модулу $8 \cdot 11 \cdot 23 = 2024$. Лако проверавамо да је једно његово решење број 161, одакле закључујемо да a_{2024} при дељењу са 2024 даје остатак 161.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Четврти разред - А категорија

1. Убацивањем $a = b = 1$ у дату дељивост, закључујемо да $2f(1)|f(1) - 1$, па је једина могућност $f(1) = 1$. Сада ћемо индукцијом доказати да је $f(n) = n$, за сваки природан број n. База, за $n = 1$ је већ доказана. Претпоставимо да је $f(n-1) = n-1$, за неко $n \geqslant 2$ и докажимо да је $f(n) = n$. Убацивањем $a = n - 1$ и $b = n$ у дату дељивост добијамо да важи $n-1+f(n)|(n-1)^2 - n^2$, односно $n-1+f(n)|2n-1$. Како је $n-1+f(n) > (2n-1)/2$ мора битие $n - 1 + f(n) = 2n - 1$, односно $f(n) = n$, чиме је доказ индукцијом завршен. Лако се проверава да функција $f(n) = n$, за свако $n \in \mathbb{N}$, задовољава услове задатка.

2. Нека је $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ неко решење једначине, $L = 10^a + 2^b$ и $D = 2024^c$. Ако би број c био паран, онда, посматрањем једначине по модулу 3, добијамо $3 \mid 2^a$, што није тачно. Дакле, број c је непаран. Размотримо следеће случајеве:
1° $a > b$: Тада, $2^b \mid\mid L$ и $2^{3c} \mid\mid D$, те је $b = 3c$. Сада је $L \equiv_9 1 + 8^c$, а $D \equiv_9 8^c$, те због $L = D$ имамо $1 \equiv_9 0$. Контрадикција.
2° $a = b$: Како је $L = 2^a(5^a + 1)$ и $5^a + 1 \equiv_4 1 + 1 \equiv_4 2$, то $2^{a+1} \mid\mid L$. Са друге стране $2^{3c} \mid\mid D$, те је $a + 1 = 3c$. Међутим, сада је $2024^c = 10^a + 2^a < 2 \cdot 10^a < 2 \cdot 10^{3c} = 2 \cdot 1000^c$, па је $2 < \frac{2024}{1000} \leqslant (\frac{2024}{1000})^c < 2$. Контрадикција.
3° $a < b$: Тада, $2^a \mid\mid L$ и $2^{3c} \mid\mid D$, те је $a = 3c$. Скраћивањем једначине са 2^{3c} добијамо $5^{3c} + 2^{b-3c} = 253^c$, односно $2^{b-3c} = 253^c - 125^c$. Сада би за $c > 1$ важило

$$2^{b-3c} = 253^c - 125^c = (253 - 125)(253^{c-1} + 253^{c-2} \cdot 125 + ... + 253 \cdot 125^{c-2} + 125^{c-1}).$$

Одавде, како број $253^{c-1} + 253^{c-2} \cdot 125 + ... + 253 \cdot 125^{c-2} + 125^{c-1}$ већи од 1 представља збир непарно много непарних бројева (број сабирака је c, а доказано је да је c непарно), он је непаран број већи од 1 који дели 2^{b-3c}. Контрадикција. Коначно, за $c = 1$ имамо $2^{b-3} = 253 - 125$, те је $b = 10$. Из свега наведеног закључујемо да је једнино решење једначине уређена тројка $(a, b, c) = (3, 10, 1)$, што се тривијално проверава.

3. Докажимо да за бројеве x и y важи $x = y$. Претпоставимо супротно. Због симетричности система, без губљења општости, можемо претпоставити да је $y > x$. Како је $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2}(\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, то за бројеве x и y важи $x, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Одузимањем једнакости $y = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$ и $x = \sqrt{2} \cos(y - \frac{\pi}{4})$ добијамо

$$L = y - x = \sqrt{2} \cdot (-2 \cdot \sin \frac{x - y}{2} \cdot \sin(\frac{x + y}{2} - \frac{\pi}{4})) = D. \tag{1}$$

Пошто је $x < y$, то због $x, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, имамо $\frac{x-y}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, те је $\sin \frac{x-y}{2} < 0$. Одавде, на основу (1), пошто је $L > 0$, имамо $\sin(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4}) > 0$. Из последње неједнакости, како је $\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4} \in (-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, имамо да је $\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4} \in (0, \frac{\pi}{4})$, те је $|\sin(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4})| < \frac{\sqrt{2}}{2}$. На основу ове неједнакости, користећи познату неједнакост $|\sin t| < |t|$, за свако $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, из (1) следи

$$|L| = |D| = 2\sqrt{2} \cdot |\sin \frac{x - y}{2}| \cdot |\sin(\frac{x + y}{2} - \frac{\pi}{4})| < 2\sqrt{2} \cdot |\frac{x - y}{2}| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = |x - y| = |L|,$$

што је контрадикција. Овим је доказано да важи $\sin x + \cos x = x$. Како за $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$ важи $\sin x > x$ и $\cos x > 0$, то је $\sin x + \cos x > x$. Зато је $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Користећи познату

неједнакост $\cos t \geqslant 1 - \frac{t^2}{2}$, која важи за свако $t \in \mathbb{R}$, имамо

$$x = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) \geqslant \sqrt{2}(1 - \frac{(x - \frac{\pi}{4})^2}{2}),$$

одакле, након сређивања, добијамо да је $x^2 + (\sqrt{2} - \frac{\pi}{2})x + \frac{\pi^2}{16} - 2 > 0$. Лако је установити да квадратна функција $f(t) = t^2 + (\sqrt{2} - \frac{\pi}{2})t + \frac{\pi^2}{16} - 2$ има две реалне нуле $t_1 < t_2$. При томе је из Вијетових формула $t_1 t_2 = \frac{\pi^2}{16} - 2 < 0$, те је $t_1 < 0 < t_2$. Зато из $f(x) > 0$ имамо да је $x < t_1$ или је $x > t_2$. Прву могућност одбацујемо, пошто смо доказали да је $x > 0$, а $t_1 < 0$. Уколико докажемо да је $t_2 > \frac{5}{4}$, доказ неједнакости $x > \frac{5}{4}$ ће бити комплетиран. Довољно је проверити да важи $f(\frac{5}{4}) < 0$. Последња неједнакост је заиста задовољена с обзиром да је

$$f(\frac{5}{4}) = \frac{25}{16} + \frac{5}{4} \cdot (\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi^2}{16} - 2 < \frac{25}{16} + \frac{5}{4} \cdot (1,42 - 1,57) + \frac{10}{16} - 2 = 0.$$

4. Нека су O_1 и O_2 центри кругова ω_1 и ω_2, а пресек њихових заједничких тангенти тачка O'. Приметимо да постоји хомотетија у тачки O' која шаље круг ω_1 у ω_2. Стога, тачке O_1, O_2 и O' су колинеарне. Нека права $O'A$ сече ω_2 други пут у тачки F. Тада је $\sphericalangle O'FO_2 = \sphericalangle O'AO_1$. Пошто је $AO_2 = FO_2$, онда је $\sphericalangle FAO_2 = \sphericalangle O'FO_2 = \sphericalangle O'AO_1$. Приметимо сада да је $\sphericalangle AO'D = 2\sphericalangle AO'O_1 = 2(\sphericalangle AO_1O_2 - \sphericalangle O'AO_1) = \sphericalangle AO_1D - (180^\circ - \sphericalangle O_1AO_2) = 2\sphericalangle ABD - (180^\circ - (90^\circ - \sphericalangle ABD + 90^\circ - \sphericalangle ACD)) = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ACB$.

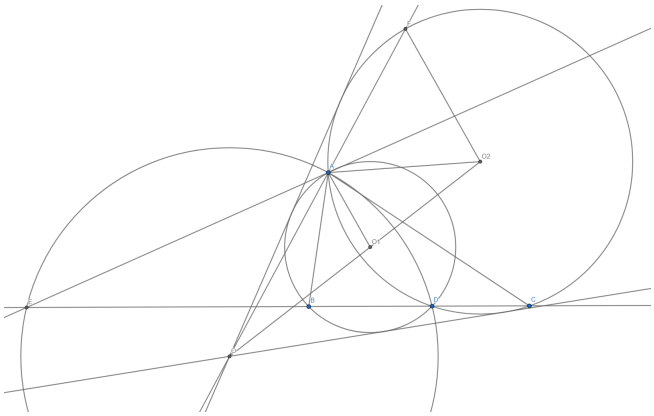


Figure 4:

Такође, $\sphericalangle AOD = 2\sphericalangle AED = 2(\sphericalangle ABC - \sphericalangle EAB) = 2(\sphericalangle ABC - (90^\circ - \frac{\sphericalangle BAC}{2})) = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ACB$. Приметимо да важи $AO = DO$ и $AO' = DO'$ и $\sphericalangle AO'D = \sphericalangle AOD$. Дакле, закључујемо да је $O = O'$, чиме је задатак решен.

5. Међупланетарних познанстава постоји тачно n према условима задатка, док унутарпланетарних има у збиру $\frac{n(n-1)}{2}$ јер тамо где на ДМС2024 не постоји познанство, постојаће по условима на ДМС2024', и обратно. То даје укупно $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ познанстава. Да би дато постављање за округли сто уопште било могуће, потребно је да постоји бар $2n$ познанстава, односно $2n \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$, што након сређивања даје $3 \leqslant n$.

За $n = 3$, морају за столом бити искоришћена сва познанства, односно сва три међупланетарна. Ово, пак, није могуће, јер обилазећи сто почев од произвољног становника планете ДМС2024, сваки пут кад наиђемо на међупланетарно познанство долазимо наизменично до становника планете ДМС2024' и ДМС2024, а како се на крају морамо

вратити до становника планете ДМС2024, то и број међупланетарних познанстава мора бити паран, а самим тим и различит од 3. Контрадикција.

За парно $n = 2k$, $k \geqslant 2$, једно могуће смештање око стола је следеће: $1, 1', 2', 2, ..., (2k-1)', 2k', 2k, 1$, док је за непарно $n = 2k+1$, $k \geqslant 3$, могући распоред: $1, 1', 2k+1', 2', 2, 2k+1, 3, , ..., 2k-1, 2k-1', 2k', 2k, 2k+1, 1$. Лако проверавамо да овако дата познанства не побијају услове задатка.

Тиме остаје случај $n = 5$. Слично као у случају $n = 3$ закључујемо да за столом мора бити паран број међупланетарних познанстава, и притом је тај број строго позитиван јер обиласком стола у бар једном тренутку од становника планете ДМС2024 долазимо до становника ДМС2024'. Према томе, број међупланетарних познанстава за столом је или 2 или 4. За 2 међупланетарна познанства, можемо без умањења општости узети да су то она између 1 и $1'$, односно 5 и $5'$, а да су преостали суседи њих двоје 2 и 4 (морају бити са ДМС2024). Ове две особе по претпоставци немају суседа из ДМС2024', па њихов преостали сусед за столом може бити једино особа 3, што даје распоред $1', 1, 2, 3, 4, 5, 5'$, док између $1'$ и $5'$ простају само становници ДМС2024'. Притом су због познанстава $3-2$ и $3-4$ једини могући суседи $3'$ управо $1'$ и $5'$, што онемогућује да између $1'$ и $5'$ сместимо и $2'$ и $4'$, контрадикција. Ако би, пак, 1 и 5 имали преосталог познаника заједничког, нека је то без умањења општости 3 (мора бити са ДМС2024). Али тада би 2 и 4 међу становницима ДМС2024 за познаника могли имати само један другог, а како по претпоставци не седе поред својих познаника са ДМС2024', то оставља само једно доступно познанство за њих, иако су бар два потребна за смештање око стола, контрадикција.

Коначно, за 4 међупланетарна познанства, узмимо без умањења општости да су у питању $1-1'$, $2-2'$, $3-3'$ и $4-4'$. Како нема других међупланетарних познанстава, распоред мора бити (без умањења општости) облика $1, 1', \ldots, 2', 2, \ldots, 3, 3', \ldots, 4', 4, \ldots 1$, и негде су на местима три тачке 5 и $5'$. Како они они међусобно нису суседи, оба њихова суседа морају бити са сопствене планете, нека су за 5 то 2 и 3. То као једине могуће суседе $5'$ оставља $1'$ и $4'$, али то није могуће додати у распоред. Контрадикција.

Према томе, $n = 5$ није решење, што као решења оставља $n = 4$ и $n \geqslant 6$

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред - Б категорија

1. Претпоставимо да постоји троугао ABC са тежишним дужима $AA_1 = 1$, $BB_1 = 2$ и $CC_1 = 3$, при чему су тачке A_1, B_1 и C_1, редом, средишта страница BC, CA и AB тог троугла. Означимо са T тачку пресека тих тежишних дужи, тј. тежиште троугла ABC. Нека је, даље, A_1' тачка на правој одређеној тежишном дужи AA_1 таква да је тачка A_1 средиште дужи TA_1' (тачке T и A_1' су симетрично распоређене у односу на тачку A_1 на правој AA_1, тј. $TA_1 = A_1'A_1 = \frac{1}{3}AA_1 = \frac{1}{3}$). Како је четвороугао $BA_1'CT$ паралелограм, јер му се дијагонале међусобно полове, то је $BA_1' = TC = \frac{2}{3}CC_1 = 2$. Посматрајмо сада троугао $BA_1'T$. Његове странице су дужина $BA_1' = 2$, $A_1'T = A_1'A_1 + A_1T = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3}$ и $TB = \frac{2}{3}BB_1 = \frac{4}{3}$. Како је у сваком троуглу збир дужина ма које две странице тог троугла строго већи од дужине треће странице, то мора важити $2 = \frac{6}{3} = A_1'T + TB > BA_1' = 2$, што није могуће. Дакле, такав троугао не постоји.

2. Шестоцифрених бројева који имају тачно једну цифру 1 има: $9^5+5\cdot 8\cdot 9^4 = 9^4\cdot(9+40) = 49\cdot 9^4$ (ако је јединица на првом месту, њих је 9^5, док, ако је јединица на неком другом месту - таквих места има 5, бројева са том особином ће бити $5\cdot 8\cdot 9^4$, јер на првом месту не можемо ставити нулу). Са друге стране, бројева са тачно једном цифром 1 који у свом запису не садрже нити једну парну цифру има $6\cdot 4^5$ (бирамо позицију за цифру 1, а за осталих 5 места имамо тачно 4 могућности). Дакле, бројева са наведеним особинама има $49\cdot 9^4 - 6\cdot 4^5 = 315345$.

3. Уведимо смену $y = x-c$. Како је c цео број, то је x цео број акко је y цео број и притом сваком броју y одговара тачно један број x. Одавде, број целобројних решења (по x) неједначине $||x-c|-b| < a$ једнак је броју целоброј решења (по y) неједначине $||y|-b| < a$. Последња неједначина еквивалентна је са $-a < |y| - b < a$, односно са $b - a < |y| < a + b$. Како је $\{a, b, c\} = \{2, 3, 2024\}$, то је $a + b \leqslant 2027$, те неједначина $b - a < |y| < a + b$ не може имати више од $2\cdot 2026 + 1 = 4053$ целобројних решења (по y). Одабиром $a = 2024, b = 3$ и $c = 2$ неједначина $b - a < |y| < a + b$ постаје $-2021 < |y| < 2027$ и има тачно 4053 целобројна решења (по y). Овим је доказано да је највећи могући број целобројних решења полазне неједначине једнак 4053.

4. Означимо са (u, v) највећи заједнички делилац целих бројева u и v. Како је, на основу услова задатка, $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ цео, такав је и број $2ab$. Следи, број $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ је такође цео, као разлика два цела броја. Докажимо, сада, да је и број $a - b$ цео. Како је он рационалан, облика је $\frac{u}{v}$, где је $u \in \mathbb{Z}$ и $v \in \mathbb{N}$, $(u, v) = 1$. Дакле, $(a - b)^2 = \frac{u^2}{v^2} = k$, за неки ненегативан цео број k. Следи, $u^2 = kv^2$, па $v \mid u^2$, тј. $v \mid u$, јер важи $(u, v) = 1$. Дакле, $v = (u, v) = 1$, одакле је $a - b = u \in \mathbb{Z}$, те како је и $a + b$ цео број, то су цели и бројеви $2a = (a + b) + (a - b) = k$ и $2b = (a + b) - (a - b) = l$, за неке $k, l \in \mathbb{Z}$. Довољно је доказати да су бројеви k и l парани цели бројеви, тј. да не могу бити непарани. Заиста, уколико би важило $k = 2k_1 - 1$ и $l = 2l_1 - 1$, за неке целе бројеве k_1 и l_1, тада бисмо имали $a = k_1 - \frac{1}{2}$, као и $b = l_1 - \frac{1}{2}$, одакле добијамо $a^2 + b^2 = k_1^2 - k_1 + \frac{1}{4} + l_1^2 - l_1 + \frac{1}{4} = k_1^2 - k_1 + l_1^2 - l_1 + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$, тј. $\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$, што је немогуће. Дакле, a и b су цели бројеви.

5. На основу Питагорине теореме, коју примењујемо на троугао ABD, јасно је да је $BD = 5$. Због инваријантности површине тог троугла имамо да је $AB\cdot AD = BD\cdot AH$, те је $AH = \frac{12}{5}$. Такође, применом Питагорине теореме на троуглове ABH и AHD налазимо да је $BH = \frac{16}{5}$ и $HD = \frac{9}{5}$, одакле закључујемо да је познато у ком односу тачка H

дели дуж BD. Стога, важи $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AD} + \frac{9}{25}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} + \frac{9}{25}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \frac{9}{25}\overrightarrow{AB} + \frac{16}{25}\overrightarrow{AD}$. Са друге стране, очигледно важи $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, као и $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, јер је $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Како је $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$, то је $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} = -\frac{9}{50}\overrightarrow{AB} + \frac{17}{25}\overrightarrow{AD}$.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Други разред - Б категорија

1. Како је $p-1$ једнако апсолутној вредности реалног броја, мора бити $p-1 \geqslant 0$, односно $p \geqslant 1$. Два пара решења добијамо разматрањем два случаја. Први случај: Нека је $x^2-px-2p+1=p-1$, односно $x^2-px-3p+2=0$. Применом Вијетових формула добијамо да је $x_1^2+x_2^2=p^2+6p-4$. Други случај: Нека је $x^2-px-2p+1=1-p$, односно $x^2-px-p=0$. Из Вијетових формула, у овом случају, добијамо да је $x_3^2+x_4^2=p^2+2p$. Ако сада искористимо услов $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=20$, добијамо да је $2p^2+8p-4=20$, односно $p^2+4p-12=0$. На основу последње једначине закључујемо да је $p=-6$ или $p=2$. Како смо на почетку закључили да мора бити $p \geqslant 1$, добијамо једину могућност $p=2$. Директном провером се добија да за $p=2$ дата једначина има 4 различита решења, која испуњавају постављени услов.

2. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Приметимо да је $x=-2024$ једно решење једначине, пошто је

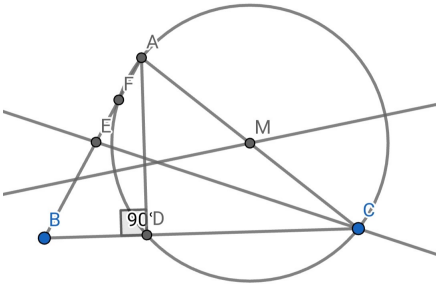
$$\sqrt[3]{-2024+2023}+\sqrt[3]{-2024+2024}+\sqrt[3]{-2024+2025}=\sqrt[3]{-1}+\sqrt[3]{0}+\sqrt[3]{1}=-1+0+1=0.$$

Како је функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, дефинисана са $f(t)=\sqrt[3]{t}$ за свако $t\in\mathbb{R}$, строго растућа, имамо да за $x>-2024$, редом, важи $\sqrt[3]{x+2023}>\sqrt[3]{-2024+2023}=-1$, $\sqrt[3]{x+2024}>\sqrt[3]{-2024+2024}=0$ и $\sqrt[3]{x+2025}>\sqrt[3]{-2024+2025}=1$. Отуда за $x>-2024$ важи $\sqrt[3]{x+2023}+\sqrt[3]{x+2024}+\sqrt[3]{x+2025}>0$, те посматрана једначина нема решења међу бројевима x за које је $x>-2024$. Аналогно претходном, за бројеве $x<-2024$, доказујемо неједнакост $\sqrt[3]{x+2023}+\sqrt[3]{x+2024}+\sqrt[3]{x+2025}<0$, те посматрана једначина нема решења ни међу бројевима x за које је $x<-2024$. Овим је доказано да је једино решење једначине $x=-2024$.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Увођењем смене $y=x+2024$ добијамо једначину $\sqrt[3]{y-1}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y+1}=0$, односно

$$\sqrt[3]{y-1}+\sqrt[3]{y+1}=-\sqrt[3]{y}. \tag{1}$$

Нека је y неко решење једначине (1). Степеновањем једначине (1) на трећи степен добијамо једначину $y-1+3\sqrt[3]{y-1}\sqrt[3]{y+1}(\sqrt[3]{y-1}+\sqrt[3]{y+1})+y+1=-y$. Одавде, како је y решење једначине (1) и тиме важи $\sqrt[3]{y-1}+\sqrt[3]{y+1}=-\sqrt[3]{y}$, имамо $2y+3\sqrt[3]{y^2-1}(-\sqrt[3]{y})=-y$. Одавде је $\sqrt[3]{y^2-1}\sqrt[3]{y}=y$, односно $\sqrt[3]{y^3-y}=\sqrt[3]{y^3}$, те је $y=0$. Овим смо доказали да уколико једначина (1) има решења, онда је $y=0$. Због импликацијске методе коју смо користили неопходно је проверити да ли је $y=0$ заиста решење једначине (1). Лако проверавамо да је $y=0$ заиста решење једначине (1), чиме смо установили да полазна једначина има јединствено решење $x=0-2024=-2024$.



3. Обележимо углове троугла $\triangle ABC$ са $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ и $\sphericalangle BCA = \gamma$. Сада услови из задатка постају $\alpha = 2\gamma$ и $2\beta = \alpha + \gamma$, а уз услов $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ лако рачунамо $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 60^\circ$ и $\gamma = 40^\circ$. Приметимо сада да је $\sphericalangle CEA = \beta + \frac{\gamma}{2} = 80^\circ$, па је троугао $\triangle ACE$ једнакокраки са врхом у C, одакле закључујемо да је CF висина троугла $\triangle ACE$, па је $\sphericalangle CFA = 90^\circ$. Како је и $\sphericalangle ADC = 90^\circ$, закључујемо да је четвороугао $AFDC$ тетиван са пречником AC, односно са средиштем AC као центром описаног круга. Како се центар круга мора налазити на симетрали сваке његове тетиве, закључујемо да се средиште AC налази на симетрали DF, чиме смо доказали да је M средиште странице AC, односно $AM = MC$.

4. Најпре, лако уочавамо да не може бити $y \leqslant 0$, као и да је за $y = 1$ свака тројка $(2^z + 1, 1, z)$, за $z \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, решење дате једначине. Нека је $y > 1$. Тада је $|x| > 1$, $z > 1$, x је непаран број и важи

$$(x-1)(x^{y-1} + x^{y-2} + \ldots + x + 1) = 2^z.$$

Одавде закључујемо да је $x^{y-1} + x^{y-2} + \ldots + x + 1$ паран број, па је $y - 1 = 2k + 1$, за неки ненегативан цео број k. Дакле, претходну једнакост можемо записати у облику

$$(x-1)(x+1)(x^{y-2} + x^{y-4} + \ldots + 1) = 2^z.$$

Из последње једнакости следи да је $(x-1)(x+1)$ степен двојке, а то је могуће ако и само ако је $x \in \{-3, 3\}$. За $x = 3$ добијамо

$$9^k + 9^{k-1} + \ldots + 1 = 2^{z-3}$$

и

$$2^z = 9^{k+1} - 1 = (3^{k+1} - 1)(3^{k+1} + 1).$$

Одавде, лако видимо да је $k = 0$, тј. $y = 2$ и $z = 3$, па је тројка $(3, 2, 3)$ решење дате једначине. На сличан начин, за $x = -3$, добијамо да је тројка $(-3, 2, 3)$, такође, решење полазне једначине.

5. Низ може имати највише 300 чланова. Заиста, посматрајмо низ који се састоји од 100 јединица на првих 100 места, затим 100 нула и поново 100 јединица на последњих 100 места. Лако се види да у овом низу међу сваких 200 узастопних чланова се налази једнако нула и јединица, али међу сваких 202 узастопних чланова низа број нула и јединица није једнак. Нека је $a_1, a_2, \ldots, a_n$ низ који испуњава услов задатка. Посмтарајмо скупове

$$\{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+199}\} \text{ i } \{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+201}\},$$

за свако k за које су ови скупови дефинисани, тј. за $1 \leqslant k \leqslant n - 201$. Први скуп садржи једнако нула и јединица, али није у другом, одакле закључујемо да мора важити $a_{k+200} = a_{k+201}$. Ова једнакост је тачна за свако k из наведеног интервала, одакле закључујемо да важи $a_{201} = a_{202} = \ldots = a_n$. Ако је $n > 300$, тада у низу од 200 узастопних чланова

$$a_{n-199}, a_{n-198}, \ldots, a_n,$$

више од пола њих је једнако a_n, што је у контрадикцији са условом задатка. Дакле, низ који испуњава услове задатке може имати највие 300 чланова.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Трећи разред - Б категорија

1. Детерминанта датог система једначина је $D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & 1 \\ 1 & 1 & \cos a \\ 1 & \cos^2 a & 1 \end{vmatrix} = 1 + \cos^2 a + \cos^2 a - 1 - \cos^3 a - \cos a = 2\cos^2 a - \cos^3 a - \cos a = -\cos a(1 - 2\cos a + \cos^2 a) = -\cos a(1 - \cos a)^2$. Лако се рачунају и одговарајуће детерминанте, које одговарају непознатим x, y и z. Добијамо:

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & 1 \\ 1 & 1 & \cos a \\ \cos a & \cos^2 a & 1 \end{vmatrix} = 1 + \cos^3 a + \cos^2 a - \cos a - \cos a - \cos^3 a$$
$$= 1 - 2\cos a + \cos^2 a = (1 - \cos a)^2,$$
$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos a \\ 1 & \cos a & 1 \end{vmatrix} = 1 + \cos a + \cos a - 1 - \cos^2 a - 1$$
$$= 2\cos a - \cos^2 a - 1 = -(1 - \cos a)^2,$$
$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos^2 a & \cos a \end{vmatrix} = \cos a + \cos a + \cos^2 a - 1 - \cos^2 a - \cos^2 a$$
$$= 2\cos a - 1 - \cos^2 a = -(1 - \cos a)^2.$$

Разликоваћемо два случаја.

1° $D = -\cos a(1 - \cos a)^2 \neq 0$, тј. $\cos a(1 - \cos a)^2 \neq 0$, што је еквивалентно са $\cos a \neq 0$ и $\cos a \neq 1$, тј. $a \neq -\frac{\pi}{2}$ и $a \neq \frac{\pi}{2}$ и $a \neq 0$, јер $a \in (-\pi, \pi)$: У овом случају систем има јединствено решење $x = \frac{D_x}{D} = -\frac{1}{\cos a}$, $y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{\cos a}$ и $z = \frac{D_z}{D} = \frac{1}{\cos a}$.

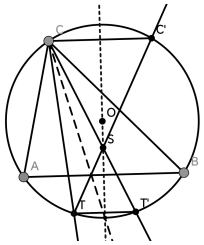
2° $D = -\cos a(1 - \cos a)^2 = 0$, тј. $\cos a(1 - \cos a)^2 = 0$, што је еквивалентно са $\cos a = 0$ или $\cos a = 1$, тј. $a = -\frac{\pi}{2}$ или $a = \frac{\pi}{2}$ или $a = 0$, јер $a \in (-\pi, \pi)$: У овом случају за $a = -\frac{\pi}{2}$ или $a = \frac{\pi}{2}$ (ту је $D = 0$, $D_x = 1$ и $D_z = D_z = -1$) важи да систем нема решења, јер прва једначина постаје $x + z = 1$, а трећа $x + z = 0$, што је немогуће. У случају да је $a = 0$ систем постаје $x + y + z = 1$ (све три једначине система се своде на исту), који има бесконачно много решења која су облика $(x, y, z) = (u, v, 1 - u - v)$, $u, v \in \mathbb{R}$.

Дакле:

- за $a \neq -\frac{\pi}{2}$ и $a \neq \frac{\pi}{2}$ и $a \neq 0$ важи $x = -\frac{1}{\cos a}$, $y = \frac{1}{\cos a}$ и $z = \frac{1}{\cos a}$,
- за $a = 1$ је $x = u$, $y = v$ и $z = 1 - u - v$, где су u и v произвољни реални бројеви,
- за $a = -\frac{\pi}{2}$ или $a = \frac{\pi}{2}$ систем нема решења.

2. Нека је $I(a, b) = |20^a - 23^b|$. Докажимо да је $I(a, b) \geqslant 3$. Претпоставимо супротно. Тада, како је број $I(a, b)$ очигледно непаран, важи $I(a, b) = 1$, те је $20^a - 23^b = 1$ или је $20^a - 23^b = -1$, за неке $a, b \in \mathbb{N}$. Посматрањем десне стране једначине $20^a = 23^b + 1$ по модулу 12 добијамо да је $20^a \equiv_{12} 0$ или $20^a \equiv_{12} 2$, па $3 \mid 20^a$ или $4 \mid 20^a - 2$. Контрадикција. Посматрањем једначине $20^a = 23^b - 1$ по модулу 11, добијамо $20^a \equiv_{11} 0$. Контрадикција. Овим је доказано да за свако $a, b \in \mathbb{N}$ важи $I(a, b) \geqslant 3$, а како је $I(1, 1) = 3$, то је тражена најмања вредност једнака 3.

3. Нека је $M = A_1B \cap KB_1$ и $KB = x$. Из сличности троуглова KBM и A_1MB_1 следи да је $MB : A_1M = KB : A_1B_1$, одакле је $A_1M \cdot x = MB$. Са друге стране, $A_1M + MB = A_1B = \sqrt{2}$, као дијагонала квадрата ABB_1A_1. Узимајући у обзир последње две релације добијамо да је $MB = \frac{x\sqrt{2}}{x+1}$. Означимо са V запремину пирамиде $KBCB_1$.



Тада је $V = \frac{1}{3}P_{KBC}BB_1 = \frac{x}{6}$. Означимо са L подножје нормале из тачке B на раван KCB_1. Изразимо сада запремину V у облику $V = \frac{1}{3}P_{KCB_1}H$, где је H дужина висине BL пирамиде $KBCB_1$ на раван KCB_1. Угао од 60° који права AB заклапа са равни KCB_1 је угао између правих AB и ML (ML је нормална пројекција праве AB на раван KCB_1). Из троугла MBL добијамо да је $\frac{BL}{MB} = \sin 60^\circ$, односно $H = \frac{x\sqrt{6}}{2(x+1)}$. Како је $B_1K = CK = \sqrt{x^2+1}$ (као хипотенузе одговарајућих правоуглих троуглова) и $B_1C = \sqrt{2}$ (као дијагонала квадрата BCC_1B_1), добијамо да је површина једнакокраког троугла KCB_1 једнака $P_{KCB_1} = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{2}$. Зато је $V = \frac{x\sqrt{6(2x^2+1)}}{12(x+1)}$. Узимајући у обзир оба добијена израза за запремину V, добијамо да је $\frac{x}{6} = \frac{x\sqrt{6(2x^2+1)}}{12(x+1)}$, одакле је $x = \frac{1}{2}$, а затим и да је $V = \frac{1}{12}$. Нека је B' подножје нормале из тачке B на праву KC. Дакле, $KC \perp BB'$, а како је $B_1B \perp KBC$, онда је $KC \perp B_1B$. Онда је $KC \perp B'B_1$, што значи да права $B'B_1$ садржи висину троугла KCB_1 на страницу KC. Сада је $BB' = \frac{1}{\sqrt{5}}$, као висина на хипотенузу правоуглог троугла KBC са катетама $\frac{1}{2}$ и 1. Угао B_1BB' је прав, зато из правоуглог троугла $B'BB_1$ добијамо да је $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\measuredangle BB'B_1 = \frac{BB_1}{BB'} = \sqrt{5}$.

4. Приметимо најпре да је $\log_{14} 2 + \log_{14} 98 = \log_{14} 196 = 2$, те је $\log_{14} 2 = 2 - b$. Одавде, коришћењем основних особина логаритама, имамо:

$$\log_{28} 490 = \frac{\log_{14} 490}{\log_{14} 28} = \frac{\log_{14} 98 + \log_{14} 5}{\log_{14} 14 + \log_{14} 2} = \frac{b + \frac{\log_2 5}{\log_2 14}}{1 + 2 - b} = \frac{b + a(2-b)}{3-b} = \frac{2a + b - ab}{3-b},$$

што је и требало доказати.

5. Ако су пет посматраних бројева $1, 2, 3, 4, 5$, производ разлика је

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 288.$$

Посматрајмо произвољних 5 целих бројева a, b, c, d, e. Докажимо да ће 288 сигурно делити P, где је P производ 10 разлика парова ових бројева. Доказаћемо, прво, да 2^5 дели P. По Дирихлеовом принципу, барем 3 од ових бројева су исте парност. Без умањења општости нека су то a, b, c. Поново, по Дирихлеовом принципу можемо закључити да барем два од ових бројева, без умањења општости нека су то a и b, дају исти остатак при дељењу са 4. Сада је производ $|a-b| \cdot |a-c| \cdot |b-c|$ дељив са 2^4, а самим тим је P. Ако су d и e исте парности, тада је $|d-e|$ парно, одакле следи да 2^5 дели P. У супротном, d и e су различите парности, па је један од њих, без умањења општости нека је то d, исте парности као што су a, b, c. Дакле, разлика $|a-d|$ је парна, одакле следи да је P дељиво са 2^5 и у овом случају.
Докажимо, сада, да 3^2 дели P. По Дирихлеовом принципу можемо закључити да барем два од ових бројева, без умањења општости нека су то a и b, дају исти остатак при дељењу са 3. Тада је разлика $|a-b|$ дељива са 3, а самим тим је и P. Ако преостала три броја дају све различите остатке при дељењу са 3, неки од њих, без умањења општости нека је то c, даје исти остатак при дељењу са 3 као a и b. Тада је разлика $|a-c|$ дељива са 3, одакле следи да је P дељиво са 9. У супротном, преостала 3 броја нису сви

различити по модулу 3, те по Дирихлеовом принципу су нека два од њих, без умањења општости нека су то c и d, дају исти остатак при дељењу са 3. Тада је разлика $|c-d|$ дељива са 3, одакле закључујемо да је P дељиво са 3^2 и у овом случају.
Како је производ P дељив и са 2^5 и са 3^2, који су узајамно прости, закључујемо да је дељив са $2^5 \times 3^2 = 288$.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Четврти разред - Б категорија

1. На основу формулације задатка одмах закључујемо да дати полином, јер је са реалним коефицијентима, има и коњуговано комплексан број као нулу, тј. број $x_3 = 1 - 2i$, одакле, из Виетове формуле $x_1 + x_2 + x_3 + x + 4 = 1$, добијамо да је преостала нула $x_4 = -4$. Сада, тражене коефицијенте најлакше добијамо из једнакости $P(x) = ((x - x_2) \cdot (x - x_3)) \cdot ((x - x_1) \cdot (x - x_4)) = (x^2 - 2x + 5) \cdot (x^2 + x - 12) = x^4 - x^3 - 9x^2 + 29x - 60$, одакле је $p = -9$, $q = 29$ и $r = -60$.

2. Нека је A карактеристични збир магичног квадрата 3×3, тј. збир по колонама, тј. врстама, односно, дијагоналама. Јасно је да је $3A = S$, а $A = 3e$ (видети слику), где је S збир свих бројева у квадрату.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

.

Јасно је да је да мора бити $n > 1$, па је n облика $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, за неке природне бројеве $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$, $k \in \mathbb{N}$. Следи, да број n има тачно $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1) = 9$ позитивних делилаца, јер је сваки делилац облика $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$, $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Из претходног, једине могућности су да је $n = p^2q^2$, за неке просте бројеве p и q, односно, $n = r^8$, за неки прост број r.

1° $n = p^2q^2$: У овом случају су логаритми (природни логаритми) делилаца од n облика $0, \ln p, 2\ln p, \ln q, 2\ln q, \ln p + \ln q, \ln p + 2\ln q, 2\ln p + \ln q, 2\ln p + 2\ln q$. Уколико би са њима могао да се попуни магични квадрат, имали бисмо да је у том случају збир $S = 9\ln p + 9\ln q$, $A = 3\ln p + 3\ln q$, те је елемент у средишту $e = \ln p + \ln q$. Лако се проверава да је у овом случају могуће попунити магични квадрат на следећи начин: У овом случају је могуће попунити магични квадрат (видети слику).

$\ln p + 2\ln q$	$2\ln p$	$\ln q$
0	$\ln p + \ln q$	$2\ln p + 2\ln q$
$2\ln p + \ln q$	$2\ln q$	$\ln p$

.

2° $n = r^8$: У овом случају су логаритми (природни логаритми) делилаца од n облика $0, \ln r, 2\ln 2, \ldots, 8\ln r$. У овом случају је могуће попунити магични квадрат (видети слику).

$3\ln r$	$2\ln r$	$7\ln r$
$8\ln r$	$4\ln r$	0
$\ln r$	$6\ln r$	$5\ln r$

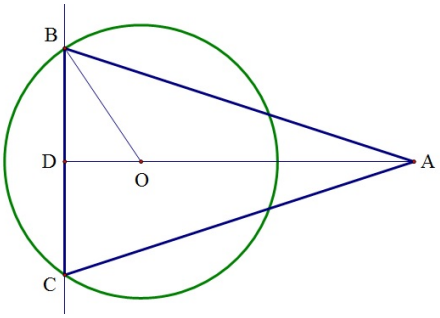
.

Дакле, решење задатка је $n = p^2q^2$, за неке просте бројеве p и q, односно, $n = r^8$, за неки прост број r.

3. У сваком сету који се завршио Новаковим освајањем 6 гемова, он је добио последњи гем у сету, нпр. у II је пре 6:1 било 5:1, па је резултат у овом сету могао да се креће на $\binom{6}{1}$ (бирамо од првих 6 одиграних гемова онај који је добио Федерер, јер тада аутоматски знамо да је остале добио Ђоковић). Слично, у IV је пре 6:2 било 5:2, па је резултат

у овом сету могао да се креће на $\binom{7}{2}$ начина. У остала 3 сета је резултат ишао до 5:5. То може на $\binom{10}{5}$ начина, а онда је један од ова два играча добио последња 2 гема. Дакле $N = \binom{6}{1}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{10}{5}^3 = 2^7\cdot 3^8\cdot 7^4 = 2016379008$. Следи, број делилаца броја $N = 2^7\cdot 3^8\cdot 7^4$ је $\tau(N) = 8\cdot 9\cdot 5 = 360$.

4. Нека је D подножје висине из темена A, троугла ABC, O центар кружнице k и $h = AD$. При распореду тачака $A-D-O$ важи $OD = 2R-h$, док при распореду тачака $A-O-D$ важи $OD = h-2R$, те без обзира на распоред тачака важи $OD = |h-2R|$.

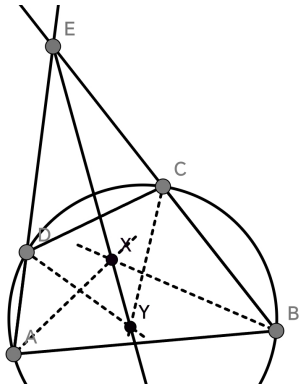


Применом Питагорине теореме на троугао BOD имамо да је $BD = \sqrt{R^2-(h-2R)^2}$, те је $P_{ABC} = h\sqrt{R^2-(h-2R)^2}$. Размотримо зато сада функцију $f:(R,3R)\to R$, дефинисану са $f(h) = h\sqrt{R^2-(h-2R)^2}$, за свако $h\in(R,3R)$. Важи

$$f'(h) = \sqrt{R^2-(h-2R)^2}+h\frac{-2(h-2R)}{2\sqrt{R^2-(h-2R)^2}} = \frac{R^2-(h-2R)^2-h(h-2R)}{\sqrt{R^2-(h-2R)^2}} = \frac{-2h^2+6Rh-3R^2}{\sqrt{R^2-(h-2R)^2}}.$$

Лако налазимо да су сва решења неједначине $f'(h)>0$ (уз услов $h\in(R,3R)$) бројеви $h\in(R,\frac{3+\sqrt{3}}{2}R)$, те функција f расте на $(R,\frac{3+\sqrt{3}}{2}R)$ и опада на $(\frac{3+\sqrt{3}}{2}R,3R)$. Отуда се њен максимум постиже за $h = \frac{3+\sqrt{3}}{2}R$, те за свако $h\in(R,3R)$ важи $f(h)\leqslant f(\frac{3+\sqrt{3}}{2}R) = \frac{(3+\sqrt{3})\sqrt[4]{12}}{4}R^2$. Овим је доказ тврђења комплетиран.

5. Нека је T' друга пресечна тачка CS и описаног круга. Како је симетрала $\sphericalangle ACB$ уједно и симетрала $\sphericalangle TCT'$, закључујемо да се средишта лукова AB и TT' поклапају, а самим тим и симетрале AB и TT', па су T и T' симетричне у односу на OS, а слично и C и C', где је C' друга пресечна тачка описаног круга и TS.



Сада једноставним рачуном углова добијамо:

$$180^\circ - \sphericalangle COS = \frac{1}{2}\sphericalangle COC' = \sphericalangle CTC' = \sphericalangle CTS$$

одакле видимо да C,O,S,T чине темена тетивног четвороугла.