број: 115/3 година: 2023/24.

Тангента

ЧАСОПИС ЗА МАТЕМАТИКУ И РАЧУНАРСТВО ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Београд, 2024.

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
„ТАНГЕНТА”- часопис за математику и рачунарство
за ученике средњих школа.
Излази у четири броја током школске године.
Адреса: „Тангента”, Друштво математичара Србије,
Поштански фах 355, 11000 Београд
Телефон: (011)3036-818

Уплате на жиро рачун:
Друштво математичара Србије – број 340-13536-62.
На уплатници као сврху уплате назначити „За Тангенту”.

Главни и одговорни уредник: Војислав Петровић, Нови Сад
e-mail: vojpet@gmail.com
Технички уредник: Ненад Вуловић, Крагујевац
e-mail: vlnenad@gmail.com

Чланови редакције:

Александар Миленковић, Крагујевац
Ненад Стојановић, Крагујевац
Миодраг Живковић, Београд
Мирјана Катић, Београд

Сва права умножавања, прештампавања и превођења задржава Друштво математичара Србије

Штампа: **Донат Граф** д.о.о, Београд
На основу члана 23. став 2, тачка 9. Закона о порезу на додатну вредност („Регистар прописа”, број 11 – новембар 2004.) часопис се сматра серијском публикацијом од посебног интереса за науку и опорезије се по стопи од 8%. Корице freepik.

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51
ТАНГЕНТА : часопис за математику и рачунарство за ученике средњих школа : часопис за математику и рачунарство Друштва математичара Србије / главни и одговорни уредник Војислав Петровић. - 1995/1996, бр. 1- . - Београд : Друштво математичара Србије, 1995- (Београд : Донат граф). - 24 cm

Тромесечно.
ISSN 0354-656X = Тангента
COBISS.SR-ID 103642375

Линеарне једначине

Радоје Шћепановић, Подгорица (Црна Гора)

У претходном броју Тангенте представили смо тзв. линеарна пресликавања. С њима су директно повезане линеарне једначине о којима ће бити реч у овом чланку.

Дефиниција. Једначину

$$L(x) = b, \tag{1}$$

где је $L : X \to Y$ линеарно пресликавање скупа X у скуп Y и b фиксирани елемент из скупа Y, називамо *линеарна једначина*.

Ако је $b = 0$, где 0 неутрални елемент за сабирање, тада за једначину

$$L(x) = 0 \tag{2}$$

кажемо да је *хомогена линеарна једначина*. У супротном, она је *нехомогена линеарна једначина*.

Решење једначине (1), односно (2) је елемент $x_0 \in X$ такав да је $L(x_0) = b$, односно $.L(x_0) = 0$. Решити једначину значи наћи сва њена решења или доказати да она нема решења. Другим речима, то значи одредити скуп решења те једначине.

Хомогене линеарне једначине

Како је линеарно пресликавање L адитивно (видети чланак из Тангенте 114), то је $L(0 + 0) = L(0) + L(0)$, тј. $L(0) = 0$. То значи да хомогена линеарна једначина (2) увек има нулу као решење.

Због адитивности пресликавања L, на линеарна једначина (2) има следећу важну особину. Ако, осим 0, има решење x_1, тада она има бесконачно много решења. Штавише, ако су x_1 и x_2 решења једначине (2), тада је $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, где су λ_1 и λ_2 произвољни реални бројеви, такође решење те једначине.

Из тога следи да ако са Ω означимо скуп свих решења једначине (2), тј. $\Omega = \{x \in X: L(x) = 0\}$, тада је Ω тзв. линеарни простор. О таквим просторима нећемо се посебно бавити у овом чланку.

Ево неколико примера хомогених линеарних једначина.

Пример 1. *Једначина* $ax = 0$, $a \neq 0$. У скупу реалних бројева $\mathbb{R}$ има јединствено решење 0.

Пример 2. *Једначина* $0 \cdot x = 0$. У скупу $\mathbb{R}$ има бесконачно много решења. Сваки реалан број је решење.

НАГРАДНИ ЗАДАЦИ

Александар Миленковић, Ненад Стојановић

У рубрици „Наградни задаци” у сваком броју дајемо 20 задатака који су подељени у две групе. Задаци из прве групе су подељени по разредима и намењени су пре свега ученицима који се такмиче у Б категорији, док су задаци из друге групе намењени ученицима А категорије и нису подељени по разредима.

Позивамо све читаоце да шаљу предлоге задатака које сматрају посебно интересантним, као и сугестије које ће нам помоћи при састављању рубрике. Такође, позивамо све ученике да на адресу редакције шаљу откуцана или читко исписана решења постављених задатака; сваки задатак на засебном листу. Исто важи и за предлоге задатака. У наредним бројевима часописа публикују се комплетна решења раније постављених задатака, а на крају циклуса најуспешнији решавачи се награђују.

Предлоге и решења задатака слати на адресу:

„Тангента” – за рубрику „Наградни задаци”
Природно-математички факултет
Радоја Домановића 12
34000 Крагујевац

или **електронском поштом** (искључиво **pdf** формат) на адресу

tg_nagradnizadaci@yahoo.com

најкасније до 15.04.2024.

Прва група

Први разред

M2014. Када се последња цифра у декадном запису броја m премести на прво место, добија се број k, такав да је $m = 3k$. Доказати да је m дељиво са 27.

M2015. Дат је тангентни четвороугао $ABCD$ коме су дијагонале узајамно нормалне. Доказати да је четвороугао $ABCD$ делтоид.

Hello, World!
Примена рачунара приликом решавања неких математичких проблема

Владимир Јанковић, Миодраг Живковић
Математички факултет, Београд

1. Увод

У књигама које се баве популаризацијом математике и у математичким часописима који имају рубрику са занимљивим задацима често се појављују математички проблеми који се баве цифрама у децималном запису неког броја. У овом чланку ћемо размотрити три таква проблема.

1. *Дат је природан број* $k > 1$. *Одредити све природне бројеве* $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1}$ *чији је* k*-ти корен једнак збиру његових цифара, тј.*

$$\sqrt[k]{\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1}} = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1.$$

2. *Други проблем је специјални случај првог, када је број цифара броја* a *једнак реду корена,*

$$\sqrt[k]{\overline{a_k a_{k-1} \dots a_1}} = a_k + a_{k-1} + \dots + a_1.$$

3. *За задати природан број* n *одредити све бројеве* $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1}$ *једнаке збиру* n*-тих степена својих цифара,*

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1} = a_n^n + a_{n-1}^n + \dots + a_1^n.$$

Овде се подразумева да су цифре о којима је реч цифре у децималном запису броја.

2. Први проблем

За свако $k > 1$ проблем има тривијално решење $a = 1$. Разне варијанте овог проблема су решаване у више бројева математичког часописа *Математика в школе* у рубрици *Занимателна страница*, почев од броја 1 из 1974. године, закључно са бројем 3 из 1988. године.

Почело се са једнакошћу

$$\sqrt[3]{5832} = 5 + 8 + 3 + 2,$$

која је објављена као куриозитет, да би се наставило са налажењем сл-ичних једнакости са другим бројевима цифара и другим коренима. У завршној фази која се одвијала осамдесетих година двадесетог века, када је поче-

ПРЕДЛОЗИ ЗА ТРЕЋИ ПИСМЕНИ ЗАДАТАК

Мирјана Катић

ГИМНАЗИЈЕ, СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

I РАЗРЕД

Круг; четвороугао; конструкције; рационални алгебарски изрази

1. Конструисати ΔABC ако је дато: α, β, r_O. (r_O– полупречник описаног круга.)

2. Упростити израз $\frac{xy(x-y)-xz(x-z)+yz(y-z)}{(x-y)(y-z)}$.

3. Колика је дужина полупречника описаног круга око једнакокраког троугла, ако је дужина основице 6, а крака 5?

4. Трапез је описан око круга полупречника r. Ако је позната да је површина трапеза (у cm^2) пет пута већа од обима тог трапеза (у cm), колика је дужина полупречника r (у cm)?

5. При дељењу полинома $p_1(x)$ полиномом x^2-1 добија се остатак x, а при дељењу полинома $p_2(x)$ полиномом x^2-1 добија се остатак $x+2$. Колики се остатак добија при дељењу полинома $p_1(x)p_2(x)$ полиномом x^2-1?

II РАЗРЕД

Системи квадратних једначина; ирационалне једначине и неједначине; експоненцијална и логаритамска функција

1. Колико има реалних решења једначине

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}\ ?$$

2. Колика је разлика највећег и најмањег решења неједначине

$$x\sqrt{x^2+x-6}\geq 2x^2-4x\ ?$$

3. Колики је збир квадрата свих реалних решења једначине

$$2\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^{x+1}-\left(3+2\sqrt{2}\right)^{x+1}=1\ ?$$

НАШ ГОСТ

НАШЕ ГОРЕ ЛИСТ

Средњошколцима са израженим смислом за математику, а којима садржаји из редовне наставе математике нису довољни за њихове потребе и могућности, нема бољег савета него да упишу неку математичку гимназију.

Таквих школа има у више градова Србије, али најстарија, најугледнија и најквалитетнија свакако је београдска Математичка гимназија (МГ). Она је изнедрила бројне математичаре који су је прославили и код нас и широм света.

Један од њих сигурно је наш млади гост – Лука Милићевић. Лука је, „за сваки случај“, у МГ похађао и 7. и 8. разред да би након тога, више него успешно, наставио гимназијске дане.

По матурирању, определио се за студије математике на чувеном Тринити колеџу у Кембрицу. Следе дипломирање, мастер и докторске студије на истом универзитету. А потом, блистава каријера.

Изгледа пуно за тако кратко време. Али, тако само изгледа.

Лука, почнимо од самог почетка. Кад те је математика први пут и чиме заинтересовала?

Пре поласка у школу доста времена сам проводио играјући се Лего коцкама. Можда је то био први знак склоности према математици, односно решавању проблема.

Сама математика је почела да ме интересује у млађим разредима основне школе. Похађао сам ОШ „Свети Сава“ у Београду, где је моја учитељица Горица Ивановић уочила да поседујем одређени талент за математику.

Због тога ме је упутила на часове код учитеља Миливоја Лукића, који је био предавач у математичкој школи *Интеграл*. Та настава ми је била толико важна – рекао бих да је битно утицала на моју даљу опредељеност за математику – да се и дан данас јасно сећам првог часа. Осим те школе, дуго времена сам похађао наставу у познатом клубу математичара *Архимедес*.

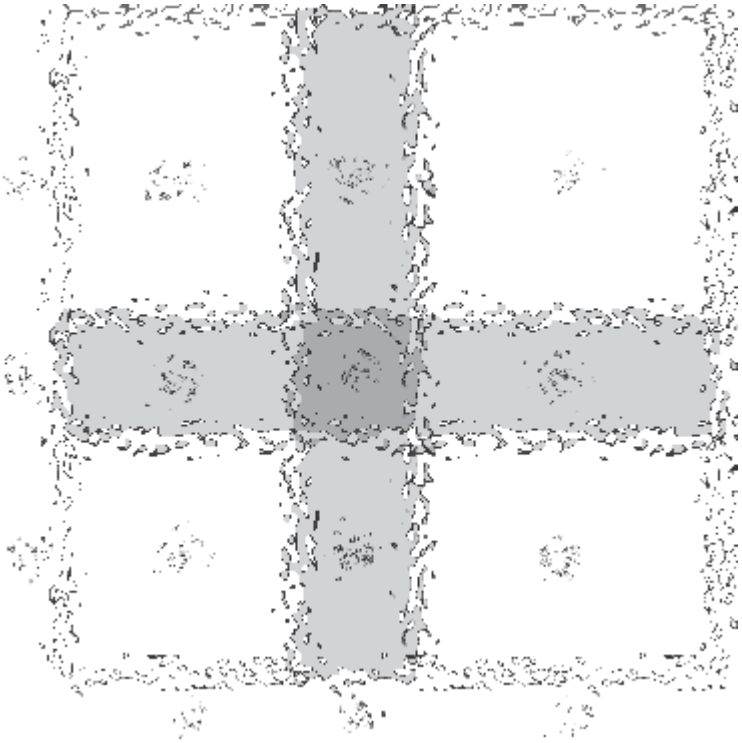
Коначно, можда сам заволео математику и само зато што ми је добро ишла.

ДОКАЗ БЕЗ РЕЧИ

Ненад Стојановић

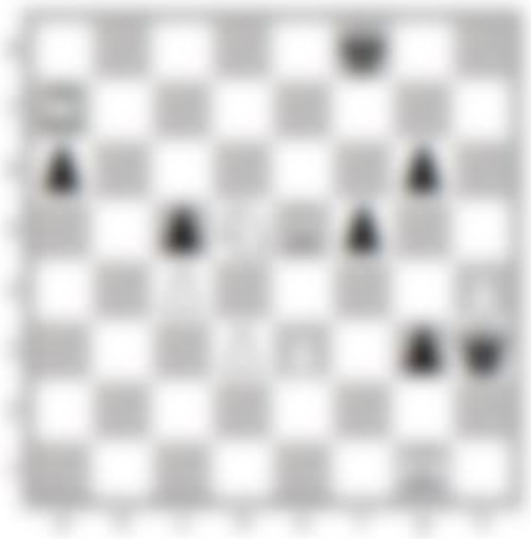
Доказ без речи, назив је за методу визуелног „доказивања“ математичких тврђења. Појавио се у прошлом веку и брзо стекао широку популарност. Представља спој уметности и математике. Бројне речи и ознаке замењује слика која својим садржајем све објашњава.

Квадрат тринома



$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$

НАГРАДНИ ШАХОВСКИ ЗАДАТАК
Тангента 113 - решење



Бели вуче и матира у 3 потеза

1. Ld6+

1. ... Ke8 2. Sf6+ Kd8 3. Ta8 мат

1. ... Kg8 2. Sf6+ Kh8 3. Th7 мат

НАГРАЂЕНИ

Павле Милошевић, 3. разр. Гимназија, Велика Плана

ШАХОВСКА СТРАНА

НЕОБИЧНИ ПРОБЛЕМИ

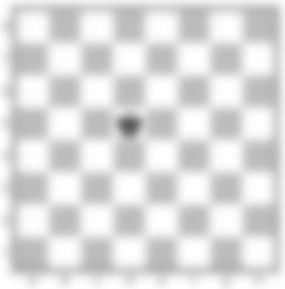
Недавно је Друштво математичара Србије објавило књигу „Шаховске загонетке Шерлока Холмса“ аутора Рејмонда Смалиана, превод Јожефа Варге. Књига садржи 50 проблема из тзв. ретро анализе. У њима решавач, баш као чувени детектив Холмс, треба да утврди шта се десило у прошлости, тј. шта је претходило датој позицији. Ево једног од њих.

Бели је на потезу, а питање је: „Шта су били последњи потези црног и белог?“ Очигледно, црни је одиграо Ка7-а8. То значи да је пре тога био у шаху од ловца са g1. А како је дошло до тог шаха пошто бели ловац није могао да стигне на g1? Решење је у откривеном шаху.

Претходна позиција је била

Након **1. Sa8+ Ka8** настаје позиција с првог дијаграма.

Проблеми везани за шах постоје од када постоји и сама игра. Неки су пратили његов развој и прилагођавали му се, а неки су остали актуелни и дан данас. Такав је следећи.

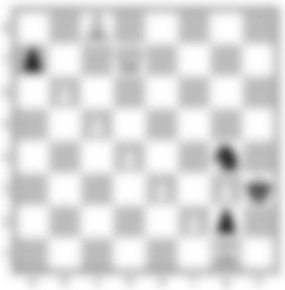


Задатак је из 15. века од непознатог аутора. Бели треба да постави своја 4 топа, једног за другим, тако да сваки постављени топ даје шах и да последњи матира црног.

Први топ на d2. (Због симетрије, може и на a5, d8 или на g5.) Црни краљ има 6 узмака, на c4, c5, c6, e4, e5 или e6. На 1. Kc4 други топ иде a4. Сада на 2. Kc5 (c3) бели бели ставља трећег топа c2 и четвртог на b4 с матом у оба случаја. А на 2. Kb3 (b5) топови иду на b4 и c2 с матом. Остављамо читаоцу да сам утврди како бели поставља топове на остале потезе црног.

Посебна врста проблема су тзв. *самоматови*. Они су нека врста шаховског мазохизма. Наиме, бели све чини да буде матиран, а црни, опет, све чини да то избегне.

На пример, у позицији



црни је скоро у пату и делује нестварно да може да матира белог. Главну улогу игра скромни пешак a7. **1. La6! ab6 2. Lb5 bc5 3. Lc4 cd4 4. Ld3 de3 5. Le2 ef2 мат**. Импресивно је како бели ловац усмерава црног пешака и непогрешиво га води ка пољу f2 и самоматирању.

Делује невероватно да бели у следећој позицији

може да присили црног да га овај матира у 6 потеза. Том утиску доприносе чињенице да је црни буквално патиран и да је бели краљ „скроз на чистини“. Како да у тим околностима бели буде матиран?

Ипак, чуда се, дешавају. **1. Sb5 ab5 2. Sa6 ba6 3. Kd4 Kb7 4. Dd5+ Kc8 5. b7+ Kc7 6. Kc5**. И сада црни има на располагању само један потез и то је **6. ... La7 мат**.

НАГРАДНИ ЗАДАТАК

Самомат у 2 потеза

Решења слати на адресу:
vojpet@gmail.com

Најуспешнији решавачи биће награђивани шаховском литературом издавачке куће „Шаховски информатор“.

Војислав Петровић

1 *Радоје Шћепановић*, Линеарне једначине
7 *Александар Миленковић*, *Ненад Стојановић*, Наградни задаци
27 *Владимир Јанковић, Миодраг Живковић*, Hello World! – Примена рачунара приликом решавања неких математичких проблема
36 *Мирјана Катић*, Предлози за трећи писмени задатак
43 *Војислав Петровић*, Наш гост – Наше горе лист
49 *Ненад Стојановић*, Доказ без речи
50 Наградни шаховски задатак
51 *Војислав Петровић*, Шаховска страна, Необични проблеми

YU ISSN 0354-656X