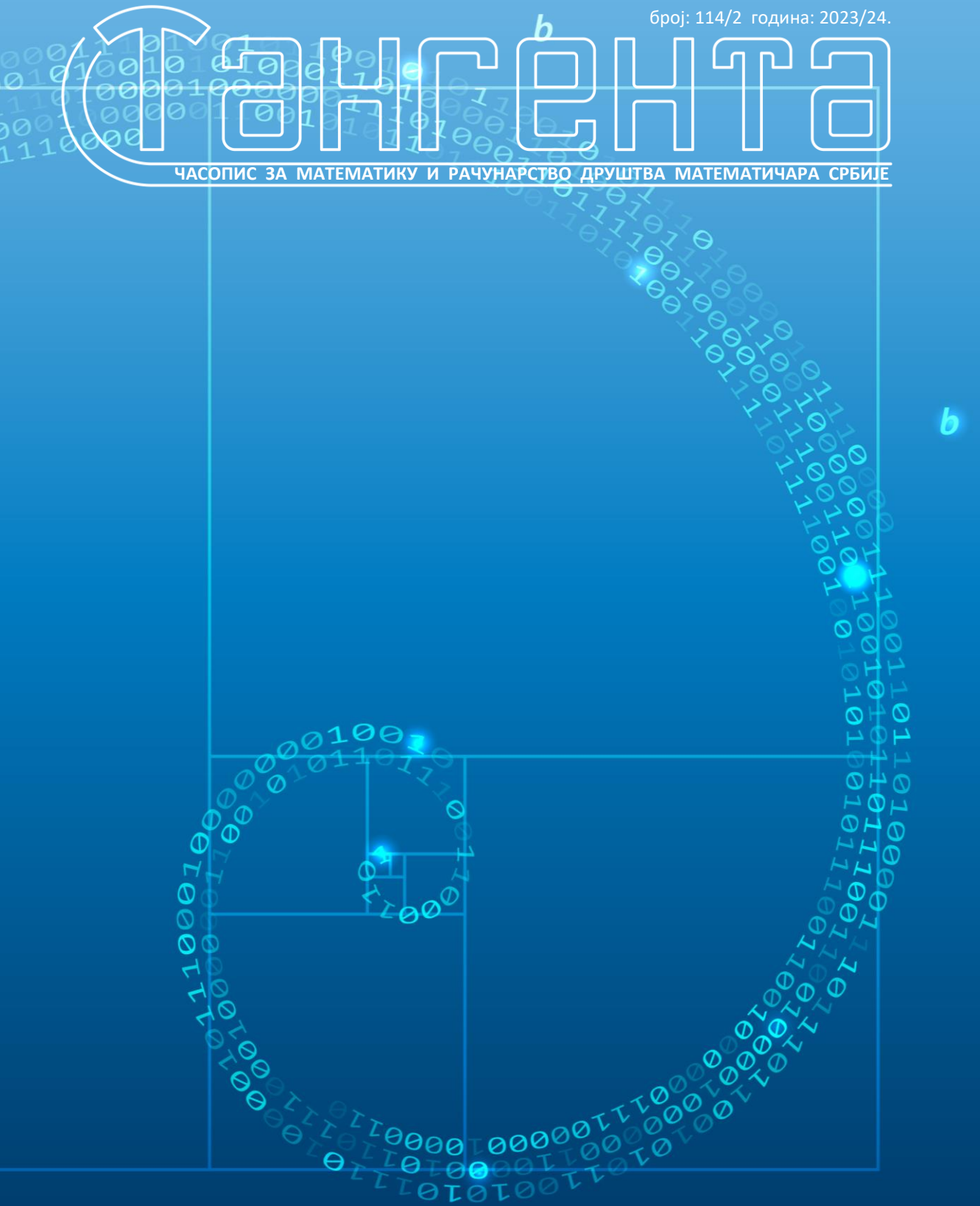
број: 114/2 година: 2023/24.

# Тангента

ЧАСОПИС ЗА МАТЕМАТИКУ И РАЧУНАРСТВО ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ



Београд, 2023.

**ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ**
**„ТАНГЕНТА”- часопис за математику и рачунарство**
**за ученике средњих школа.**
Излази у четири броја током школске године.
Адреса: „Тангента”, Друштво математичара Србије,
Поштански фах 355, 11000 Београд
Телефон: (011)3036-818

Уплате на жиро рачун:
*Друштво математичара Србије* – број 340-13536-62.
На уплатници као сврху уплате назначити „За Тангенту”.

**Главни и одговорни уредник:** Војислав Петровић, Нови Сад
*e-mail: vojpet@gmail.com*
**Технички уредник:** Ненад Вуловић, Крагујевац
*e-mail: vlnenad@gmail.com*

**Чланови редакције:**

Александар Миленковић, Крагујевац
Ненад Стојановић, Крагујевац
Миодраг Живковић, Београд
Мирјана Катић, Београд

Сва права умножавања, прештампавања и превођења задржава Друштво математичара Србије

Штампа: **Донат Граф** д.о.о, Београд
На основу члана 23. став 2, тачка 9. Закона о порезу на додатну вредност („Регистар прописа”, број 11 – новембар 2004.) часопис се сматра серијском публикацијом од посебног интереса за науку и опорезије се по стопи од 8%. Корице freepik.

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51
**ТАНГЕНТА** : часопис за математику и рачунарство за ученике средњих школа : часопис за математику и рачунарство Друштва математичара Србије / главни и одговорни уредник Војислав Петровић. - 1995/1996, бр. 1- . - Београд : Друштво математичара Србије, 1995- (Београд : Донат граф). - 24 cm

Тромесечно.
ISSN 0354-656X = Тангента
COBISS.SR-ID 103642375

# О линеарним пресликавањима

***Радоје Шћепановић, Подгорица* (*Црна Гора*)**

## Линеарна пресликавања

Пресликавање је један од основних појмова у математици и среће се у свим њеним дисциплинама. Чине га три дела (компоненте): два скупа $X$ (домен) и $Y$ (кодомен) и правило (закон) $f$. Сходно правилу $f$, сваком елементу скупа $X$ придружује се неки елемент скупа $Y$. То записујемо са $f: X \to Y$. Кажемо још да $f$ пресликава (слика) скуп $X$ у скуп $Y$.

Међу бројним пресликавањима, посебно место и значај имају тзв. *линеарна пресликавања*. Управо њима је посвећен овај чланак.

**Дефиниција 1.** Пресликавање $f: X \to Y$ је *линеарно* уколико задовољава следећа два услова:

(а) за свако $x_1, x_2 \in X$, важи $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$;

(б) за свако $\lambda \in \mathbb{R}$ и свако $x \in X$, важи $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

**Напомена.** $1^{\circ}$ Овде се подразумева да су на скуповима $X$ и $Y$ дефинисане операције сабирања $+$ и операције множења елемената реалним бројевима $\cdot$ (ознака $\cdot$ је изостављена и уместо $\lambda \cdot x$ писали смо $\lambda x$ и сл.). Узимамо да је $0 \cdot x = 0 \cdot y = 0$ и да је $1 \cdot x = x$ и $1 \cdot y = y$ за свако $x \in X$ и свако $y \in Y$.

Иако су означене истим симболима, операције $+$ и $\cdot$ то не морају **<u>бити</u>** исте на скуповима $X$ и $Y$. Када су $X$ и $Y$ скупови бројева, те операције се најчешће своде на обична сабирања и множења.

$2^{\circ}$ Услов (а) се зове адитивност, а услов (б) хомогеност.

Као директну последицу наведене дефиниције имамо следеће тврђење.

**Теорема 1.** Ако је $f: X \to Y$ линеарно пресликавање и ако су $\lambda_1$ и $\lambda_2$ произвољни реални бројеви, тада је

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

*Доказ.* Због адитивности (а) је

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = f(\lambda_1 x_1) + f(\lambda_2 x_2),$$

а због хомогености (б) важи

# НАГРАДНИ ЗАДАЦИ

***Александар Миленковић, Ненад Стојановић***

У рубрици „Наградни задаци” у сваком броју дајемо 20 задатака који су подељени у две групе. Задаци из прве групе су подељени по разредима и намењени су пре свега ученицима који се такмиче у Б категорији, док су задаци из друге групе намењени ученицима А категорије и нису подељени по разредима.

Позивамо све читаоце да шаљу предлоге задатака које сматрају посебно интересантним, као и сугестије које ће нам помоћи при састављању рубрике. Такође, позивамо све ученике да на адресу редакције шаљу откуцана или читко исписана решења постављених задатака; сваки задатак на засебном листу. Исто важи и за предлоге задатака. У наредним бројевима часописа публикују се комплетна решења раније постављених задатака, а на крају циклуса најуспешнији решавачи се награђују.

Предлоге и решења задатака слати на адресу:

**„Тангента” – за рубрику „Наградни задаци”**
**Природно-математички факултет**
**Радоја Домановића 12**
**34000 Крагујевац**

или **електронском поштом** (искључиво **pdf** формат) на адресу

tg_nagradnizadaci@yahoo.com

најкасније до 10.01.2024.

## Прва група

***Први разред***

**M1994.** Квадрат $3 \times 3$ подељен је на 9 јединичних квадрата – поља. У свако од поља треба да се постави по један од 4 врсте жетона (плави, жути, црвени, зелени) тако да се у сваком квадрату $2 \times 2$ појављују жетони све четири боје. Два таква распореда жетона приказани су на слици доле.

| | | |
|---|---|---|
| П | Ц | П |
| Ж | З | Ж |
| П | Ц | П |

| | | |
|---|---|---|
| П | Ц | Ж |
| Ж | З | П |
| П | Ц | Ж |

# *Hello, World!*
# Судоку за почетнике

***Владимир Јанковић, Миодраг Живковић***
***Математички факултет, Београд***

## Увод

Интересовање за стару јапанску логичко-комбинаторну игру судоку почело је да расте од 1986. године (википедиа), да би до данас њена популарност достигла невероватан ниво, какав није имала ниједна слична игра. Судоку проблеми се објављују у многим дневим новинама, у енигматским часописима незаобилазна је рубрика посвећена овој игри, а штампају се и периодични часописи посвећени искључиво њој. Направљен је велики број програма за играње ове игре на свим платформама које су данас у широкој употреби.

У овом чланку ћемо описати неке поступке које може да користи човек који решава судоку проблем помоћу оловке. Приказаћемо и програм који решава судоку проблем коришћењем тих поступака. Тај програм попуњава поља судоку табеле колико је то могуће описаним поступцима. Може се десити да се на тај начин табела не може потпуно попунити, нити се може утврдити да је то немогуће, тј. да проблем нема решења. У тој ситуацији програм прелази на примену грубе силе, и завршава посао претрагом варијанти (енг. backtracking). У излазном фајлу биће записано колико се тога може урадити резонима које користи човек приликом решавања судоку проблема, а такође ће бити излистана сва постојећа решења проблема.

Прва верзија програма, о коме ће овде бити реч, настала је 2005. године. На Архимедесовом Специјализованом зимском семинару за наставнике математике у основним и средњим школама одржаном 13. јануара 2006. године у оквиру предавања чији је наслов био „Како решити судоку“ изложен је поступак којим се решавају судоку проблеми и приказана верзија поменутог програма, који се базира на том поступку. Овде ћемо изложити проширење тог поступка и дати опис програма написаног на основу тог проширења.

## Правила игре судоку

Дата је квадратна табела која се састоји од $9 \times 9$ поља. У нека поља уписани су неки природни бројеви од 1 до 9. У свако празно поље треба уписати један природан број од 1 до 9, тако да у сваком хоризонталном и сваком вертикалном реду, као и у блоковима $3 \times 3$ (оивиченим подебљаним линијама) буду уписани сви бројеви од 1 до 9.

# ПРЕДЛОЗИ ЗА ДРУГИ ПИСМЕНИ ЗАДАТАК

***Мирјана Катић***

## ГИМНАЗИЈЕ, СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

### I РАЗРЕД

*Увод у геометрију; подударност троугла*

**1.** Дужина дужи која спаја средишта основица трапеза једнака је полуразлици дужина основица трапеза. Колики је збир углова на већој основици трапеза?

**2.** На дужи $AB$ дата је тачка $M$ таква да је $|MB| = 2022\,|AM|$. Ако је $P$ произвољна тачка ван дужи $AB$, доказати да је $2023\,\overrightarrow{PM} = 2022\,\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$.

**3.** Основица $AB$ једнакокраког троугла $ABC$ је дужине $12\,cm$, а тежишне дужи $AA_1$ и $BB_1$ секу се у тачки $T$ тако да је $\measuredangle ATB = 90°$. Колика је дужина дужи $CT$?

**4.** У троуглу $ABC$, $P$ је средиште странице $BC$, $Q$ средиште странице $AB$, $D$ подножје висине из темена $A$, $\measuredangle ABC = 70°$ и $\measuredangle BCA = 60°$. Колики је угао $\measuredangle DQP$?

**5.** Доказати да постоје права и раван које се секу.

### II РАЗРЕД

*Квадратна једначина; квадратна функција; квадратна неједначина*

**1.** Колико има различитих бројева $p$ за које једначина $\frac{p^2}{x+1} - \frac{x(p+2)}{x^2-1} = \frac{2p}{1-x^2}$ нема решења?

**2.** Наћи скуп решења неједначине $\frac{|2x-1|+x+1}{x^2-x} < 1$.

**3.** Одредити све вредности реалног броја $m$ за које је кваратни трином $mx^2 - 4mx + m^2 + 2m - 3$ позитиван за свако $x$.

**4.** Нацртати график функције и испитати својства функције

$f(x) = |x^2 - 2x - 3| - (3x - 3)$.

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА

# 64. Међународна математичка олимпијада 2023.

***Владимир Балтић, Миљан Кнежевић***

Ове године је Међународна математичка олимпијада (IMO 2023) одржана уживо у Макухарију (Чиба Префектура, Јапан) од 2. до 13. јула. Јапан је поново био домаћин после тачно 20 година. Учествовало је 618 ученика из 112 држава.

## Екипа и припреме

Састав екипе Србије за IMO 2023 утврђен је на основу резултата Српске математичке олимпијаде (1–2. април, 2023, Београд) и Изборног такмичења (20–21. мај, 2023, Београд). Чланови екипе били су:

СРБ 1 Матеја Вукелић, 4. разред Математичке гимназије у Београду;

СРБ 2 Гвозден Лапчевић, 3. разред Математичке гимназије у Београду;

СРБ 3 Александар Вишњић, 4. разред Математичке гимназије у Београду.

СРБ 4 Вукашин Пантелић, 4. разред Математичке гимназије у Београду;

СРБ 5 Андрија Живадиновић, 4. разред Гимназије „Светозар Марковић“ у Нишу;

СРБ 6 Стефан Шебез, 1. разред Математичке гимназије у Београду.

Имали смо прилично искусну екипу, јер су сви, сем Стефана Шебеза ученика 1. разреда, учествовали и на претходној Олимпијади у Ослу.

Руководство екипе су чинили: др Миљан Кнежевић (Математички факултет у Београду) и Теодор фон Бург (Математичка гимназија, Београд). Подсетимо се да је Теодор наш убедљиво најуспешнији такмичар на математичким олимпијадама, а исто тако је међу прва два најбоља на светском нивоу. Са освојене 4 златне, 1 сребрном и 1 бронзаном медаљом, заузима друго место у Кући славних (Hall of Fame) где се учесници свих досадашњих математичких олимпијада рангирају по броју освојених медаља. Додајмо да је до скоро био на првом месту.

Након Олимпијаде половина наше екипе (Гвозден, Вукашин и Андрија), заједно са Теодором фон Бургом, остала је још неколико дана у Јапану у жељи да боље упозна ову лепу и занимљиву земљу.

НАШ ГОСТ

# ENCYCLOPEDIA MATHEMATICA

Потребно вам је нешто везано за математику, а није вам при руци библиотека, нити сте при интернету. Ништа за то, обратите се Владимиру Јанковићу пензионисаном универзитетском професору из Београда. И добићете или поуздану и комплетну информацију или упутство где то што вас интересује можете наћи. Ово није само лично, већ је и искуство многих колега.

У свом родном Београду завршио основну школу, а потом Математичку гимназију. Још као средњошколац показао изразите склоности ка математици, које су потврђене освајањем других награда на две Међународне математичке олимпијаде (ММО).

После гимназије уписује студије математике на Природно-математичком факултету у Београду, на групи за математику. По дипломирању, остаје као асистент на свом факултету и, истовремено, ради као приправник у својој бившој гимназији.

Следе постдипломске студије, магистратура и докторат. Уз све то, дугогодишњи и предани рад с младим и талентованим математичарима. Годинама вођа наше екипе на математичким такмичањима највишег ранга, а у више наврата и организатор истих.

И још много шта. Али да не препричавам, обраћам му се директно.

**После основне школе, чувена Математичка гимназија. Да ли је склоност ка математици била присутна још раној младости? Шта те је тада посебно привукло и заинтересовало?**

Склоност ка математици се врло рано испољила. У петој години сам разумео декадни позициони систем и рачунање. У основној школи математика ми је била омиљени предмет.

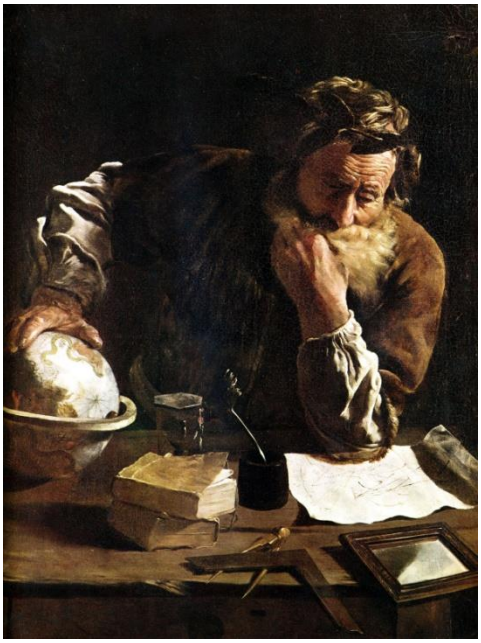
У другом разреду сам учествовао на такмичењу у слагању КО-ПРЕ (наставно средство за вежбање рачунања) у организацији београдског Дома пионира. Био сам трећи. Прочитао сам књигу *Између игре и математике* Живка Костића. Та је књига оставила веома јак утисак на мене, па је се и данас радо сећам. Обрадовало ме када сам, помоћу Гугла, сазнао да се она и даље може наћи у књижарама, као и две друге књиге истог аутора, *Између игре и физике* и *Између игре и хемије*, које сам такође читао у основ

# АРХИМЕД

***Павле Младеновић***

Архимед (око 287–212 п.н.е) је био древно-грчки математичар, механичар и физичар. Рођен је и већи део живота провео у Сиракузи, граду на југо-истоку Сицилије. Претпостаља се да је његов отац био астроном Фидије. Вероватно се школовао у Александрији. За време другог Пунског рата, кад је Сиракуза била против Рима и на страни Картагине, Архимед је, као изумитељ ратних машина, знатно отежао Римљанима заузимање Сиракузе. Када су Римљани после дуге опсаде освојили Сиракузу, Архимеда је убио један римски војник.

Засновао је метод за израчунавања површина фигура и запремина тела и био на прагу открића интегралног рачуна. Геометријски је решио кубну једначину. Проучавао је различите криве и открио криву коју описује тачка која се креће по полуправој која ротира око центра, при чему њено растојање од центра расте пропорционално углу ротације (Архимедова спирала).



Доменико Фети: Архимед

У раду *О мерењу круīа* доказао је да се број π налази између $3\frac{1}{7}$ и $3\frac{10}{71}$. Тај резултат је добио упоређујући обиме око круга описаног и у круг уписаног правилног 96-угла. Вредност $3\frac{1}{7} \approx 3{,}14$ и данас се користи у пракси. Осим тога, овде је први пут у науци одређена оцена грешке апроксимације и начин њеног одређивања.

У раду *О сфери и цилиндру* разматрао је сферу полупречника $r$ и прави цилиндар са кружном основом полупречника $r$ и висином $2r$ (цилиндар описан око сфере). Доказао је да је површина сфере једнака две трећине површине описаног цилиндра, а запремина сфере једнака две трећине запремине цилиндра. Овај резултат је сматрао својим најзначајнијим открићем. У истом раду одредио је и запремину сегмента сфере, а такође формулисао следећи принцип (који данас носи његово име): Ако су $a$ и $b$

# ДОКАЗ БЕЗ РЕЧИ

***Ненад Стојановић***

Доказ без речи, назив је за методу визуелног „доказивања“ математичких тврђења. Појавио се у прошлом веку и брзо стекао широку популарност. Представља спој уметности и математике. Бројне речи и ознаке замењује слика која својим садржајем све објашњава.

**Питагорина теорема**




$$a^2 + b^2 = c^2$$

## НАГРАДНИ ШАХОВСКИ ЗАДАТАК

Тангента 113 - решење

**Бели вуче и матира у 2 потеза**

**1. Tb2** изнудица **Ta2 2. Tb1 мат.**

Редакцији није стигло ниједно решење, тако да нема награђених.

# ШАХОВСКА СТРАНА

## ЈЕДАН ОД МУСКЕТАРА

Златно доба југословенског шаха било је 50-тих и 60-их година прошлог века. Тада смо били светска сила број два, одмах иза неприкосновеног Совјетског Савеза. Наше ведете харале су широм тадашњег шаховског света, не презајући ни од свемоћних совјетских велемајстора. Чак и обични људи, који једва да су познавали шах, знали су за наше корифеје Глигорића, Матановића и Ивкова. Нажалост, релативно недавно су нас напустила су сва тројица. Овај чланак посвећен је Бориславу Бори Ивкову.

Свој пут у светски врх Бора је најавио још 1951. Убедљиво је победио на омладинском првенству света са поен и по више другопласираног. Уследили су тријумфи у Мар дел Плати и Буенос Ајресу 1955, где је иза себе оставио величине попут Глигорића, Сабоа, Најдорфа, Пахмана и других. Исте године стекао је титулу велемајстора.

Као сви велики играчи, владао је свим фазама шаховске партије. У отварањима је волео да експериментише, својим замислима у средишњици био је био страх и трепет за цео шаховски свет, а завршнице је играо на највишем нивоу.

Ово је позиција из партије с Портишем (црни) из 1961, једним од најјачих играча тог времена. На потезу је црни.

Да је Портиш знао шта ће га снаћи, наставио би 1. ... Sf5 2. Te8+ Sd8 3. Tf8 и борио се у слабијој завршници. Али он улази у „клинч“ **1. ... Kd8 2. Sb7+ Kc7 3. Lf4+**. Сад види да је „ђаво однео шалу“ јер после 3. ... Kb7 следи 4. Tb1+ Ka6 5. Ld3+ Ka5 6. Lc7+ Ka4 7. Ta1 мат. Зато покушава да се „вади“ са **3. ... Se5**. Међутим, чека га изненађење. **4. Te5 Sf5 5. Td7++ Kc6 6. Tc7+ Kb6 7. Tb1+ Ka6 8. Tc6+!! Lc6 9. Sc5+ Ka5 10. Lc7 мат!**

Ретко виђен мат у практичној партији.

У партији с румунским шампионом Георгијуом, из 1979, након серије узајамних тактичких удара, настала је позиција

Последњим потезом Tf3 Георгију је узео белог скакача рачунајући на 1. gf3 Lh3 и, због претње Dg5+, враћа квалитет уз надмоћну позицију.

Био је то рачун без крчмара. **1. Tfe1!!**. Одједном, црни је у огромним тешкоћама због неразвијеног даминог крила и претње мата по осмом реду.

**1. ... Ld7 2. gf3 Dg5+ 4. Kh1 Sa6 4. Sd6 Lh3**. Бора је наставио **5. Tg1** и лако добио, али је пропустио да крунише своју блиставу замисао ефектним 5. Dh8+!! Kh8 6. Sf7+ и Sg5.

А, ево како Бора (црни) кажњава противника који је запоставио развој фигура.. Партија је с једног турнира из 1948.

**1. ... e5 2. Lg3**. Наравно, не 2. Le5 (Se5) Se5 и бели остаје без фигуре. **2. … Sb4 3. Db3**. Друга могућност је 3. Dh4, али после 3. ... Sc2+ 4. Kd2 Tc3! црни брзо добија. **3. ... Db6** с претњом Sd3+ и освајањем даме. **4. Kd2 Le6 5. Da3 Tc3!** и готово.

## НАГРАДНИ ЗАДАТАК

**Бели вуче и матира**
**у 3 потеза**

Решења слати на адресу:
vojpet@gmail.com

Најуспешнији решавачи биће награђивани шаховском литературом издавачке куће „Шаховски информатор“.

*Војислав Петровић*

1 *Радоје Шћепановић*, О линеарним пресликавањима
9 *Александар Миленковић*, *Ненад Стојановић*, Наградни задаци
27 *Владимир Јанковић*, *Миодраг Живковић*, Hello World! – Судоку за почетнике
38 *Мирјана Катић*, Предлози за други писмени задатак
45 *Владимир Балтић*, *Миљан Кнежевић*, Математичка такмичења
51 *Војислав Петровић*, Наш гост – Encyclopedia mathematica
61 *Павле Младеновић*, Архимед
72 *Ненад Стојановић*, Доказ без речи
73 Наградни шаховски задатак
74 *Војислав Петровић*, Шаховска страна, Један од мускетара


$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = 1.618$$

YU ISSN 0354-656X