број: 113/1 година: 2023/24.

Тангента

ЧАСОПИС ЗА МАТЕМАТИКУ И РАЧУНАРСТВО ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Београд, 2023.

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
„ТАНГЕНТА”- часопис за математику и рачунарство
за ученике средњих школа.
Излази у четири броја током школске године.
Адреса: „Тангента”, Друштво математичара Србије,
Поштански фах 355, 11000 Београд
Телефон: (011)3036-818

Уплате на жиро рачун:
Друштво математичара Србије – број 340-13536-62.
На уплатници као сврху уплате назначити „За Тангенту”.

Главни и одговорни уредник: Војислав Петровић, Нови Сад
e-mail: vojpet@gmail.com
Технички уредник: Ненад Вуловић, Крагујевац
e-mail: vlnenad@gmail.com

Чланови редакције:

Александар Миленковић, Крагујевац
Ненад Стојановић, Крагујевац
Миодраг Живковић, Београд
Мирјана Катић, Београд

Сва права умножавања, прештампавања и превођења задржава Друштво математичара Србије

Штампа: **Донат Граф** д.о.о, Београд
На основу члана 23. став 2, тачка 9. Закона о порезу на додатну вредност („Регистар прописа”, број 11 – новембар 2004.) часопис се сматра серијском публикацијом од посебног интереса за науку и опорезије се по стопи од 8%. Корице freepik.

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51
ТАНГЕНТА : часопис за математику и рачунарство за ученике средњих школа : часопис за математику и рачунарство Друштва математичара Србије / главни и одговорни уредник Војислав Петровић. - 1995/1996, бр. 1- . - Београд : Друштво математичара Србије, 1995- (Београд : Донат граф). - 24 cm

Тромесечно.
ISSN 0354-656X = Тангента
COBISS.SR-ID 103642375

Четири доказа Штајнер-Лемусове теореме

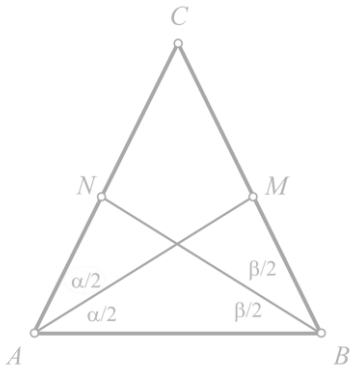
Марко Кошчица, Београд

Као што познато, једнакокрак троугао је онај који има две једнаке странице. Како наспрам једнаких страница у троуглу леже једнаки углови, једнакокрак троугао има и два једнака угла.

С обзиром да једнакокраки троуглови чине важну класу свих троуглова, свака друга њихова карактеризација, поврх оне из дефиниције, и те како је добродошла. Једна од њих је тврђење познато као Штајнер[1]-Лемусова[2] теорема. Тврђење је формулисао Лемус 1840. године, а убрзо га доказао Штајнер.

Познато је више доказа Штајнер - Лемусове теореме. У овом чланку ћемо приказати четири. Такође видети [1].

Теорема (Steiner-Lehmus, 1840). *Симетрале унутрашњих углова троугла ABC , код темена A и B, секу наспрамне странице BC и AC у тачкама M и N, редом* (*сл.* 1).*Тада је троугао ABC једнакокраки, $BC = AC$, ако и само ако је $AM = BN$.*



Сл. 1.

Доказ. ($\Rightarrow$) Услов је потребан, тј. троугао ABC једнакокраки, $BC = AC$, а треба да докажемо да је $AM = BN$.

Овај део доказа је сасвим једноставан. Наиме, из $BC = AC$ следи $\measuredangle A = \measuredangle B$. Како су AM и BN редом симетрале тих углова, следи $\measuredangle BAM = \measuredangle ABN$. Тада за троуглове ABM и BAN имамо да је $AB = BA$, $\measuredangle ABM = \measuredangle BAN$ и $\measuredangle BAM = \measuredangle ABN$, па су по ставу (УСУ) подударни. То повлачи $AM = BN$, што је и требало да докаже.

---

[1] Јакоб Штајнер (J. Steiner, 1796-1863) - швајцарски математичар

[2] Даниел Кристиан Лудолф Лемус (D. C. L. Lehmus, 1780-1863) - немачки математичар

НАГРАДНИ ЗАДАЦИ

Александар Миленковић, Ненад Стојановић

У рубрици „Наградни задаци” у сваком броју дајемо 20 задатака који су подељени у две групе. Задаци из прве групе су подељени по разредима и намењени су пре свега ученицима који се такмиче у Б категорији, док су задаци из друге групе намењени ученицима А категорије и нису подељени по разредима.

Позивамо све читаоце да шаљу предлоге задатака које сматрају посебно интересантним, као и сугестије које ће нам помоћи при састављању рубрике. Такође, позивамо све ученике да на адресу редакције шаљу откуцана или читко исписана решења постављених задатака; сваки задатак на засебном листу. Исто важи и за предлоге задатака. У наредним бројевима часописа публикују се комплетна решења раније постављених задатака, а на крају циклуса најуспешнији решавачи се награђују.

Предлоге и решења задатака слати на адресу:

„Тангента” – за рубрику „Наградни задаци”
Природно-математички факултет
Радоја Домановића 12
34000 Крагујевац

или **електронском поштом** (искључиво **pdf** формат) на адресу

tg_nagradnizadaci@yahoo.com

најкасније до 20.11.2023.

Прва група

Први разред

М1974. Колико петоцифрених бројева има паран број непарних цифара у свом запису, где таквих цифара има бар две?

М1975. Дати су скупови $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и $B = \{1, 3, 5\}$. Колико има различитих функција $f: A \to B$, таквих да је за свако $x \in A$, $f(x) \neq x$?

М1976. Одредити све тачке D које припадају унутрашњости произвољног троугла ABC, такве да су површине троуглова ABD, BCD и CDA међусобно једнаке.

Hello, World!

Мој број

Владимир Јанковић, Миодраг Живковић
Математички факултет, Београд

1. Увод

Један од најпопуларнијих телевизијских квизова је РТС-ова ТВ слагалица. Једна од игара у овом квизу је Мој број. Она спада у математичке игре и атрактивна је за такмичаре који учествују у квизу и гледаоце који овај квиз прате преко малих екрана, који имају способност егзактног размишљања. Игра изгледа овако:

Прво се на случајан начин бира $1 + 6$ природних бројева. Играчи се такмиче ко ће наћи израз чија је вредност ближа првом изабраном броју. Израз треба да буде написан помоћу шест изабраних бројева, операција сабирања, одузимања, множења и дељења и заграда. При том се не морају употребити свих шест бројева. Резултат сваког дељења мора бити цео број (нпр. дељење $10/3$ није дозвољено).

Кад будемо говорили о неком изразу, подразумеваћемо да је он написан помоћу бројева, операција сабирања, одузимања, множења и дељења и заграда. Израз у чијем се запису користе само неки од шест датих бројева зваћемо *допустиви* израз; наравно, дозвољена су само дељења са целобројним резултатом.

Играчи који играју ову игру обично користе неки хеуристички приступ, развијен кроз праксу. Такав приступ у случају искусних играча често даје задовољавајуће резултате. Јасно је да је број израза састављених од шест датих бројева коначан и да самим тим постоји најбољи међу њима, онај чија је вредност најближа задатом броју. Да бисмо нашли такав израз морамо одредити све бројеве који су вредности допуштених израза. Таквих бројева има веома много, и налажење свих њих је изван способности људског ума. Ако вредност израза који је понудио неки од играча није једнака задатом броју, углавном је тешко тврдити да је тај израз најбоље решење, тј. да не постоји бољи израз, чија је вредност ближа задатом броју од вредности понуђеног израза. У неким ситуацијама компјутер може да уради нешто што људски ум не може. Комплетна анализа игре Мој број је за компјутер посао који траје неколико секунди. У овом чланку ћемо показати како ради програм MojBroj који обавља тај посао.

ПРЕДЛОЗИ ЗА ПРВИ ПИСМЕНИ ЗАДАТАК

Мирјана Катић

ГИМНАЗИЈЕ, СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

I РАЗРЕД

Логика и скупови; цели бројеви; реални бројеви

1. Доказати да је следећа формула татуологија:

$$\Big(p \Rightarrow \big(p \Rightarrow (q \Rightarrow p)\big)\Big) \Leftrightarrow (p \wedge q \Rightarrow p).$$

2. На скупу $\mathbb{Z}$ дефинисана је релација ρ са $x \,\rho\, y \Leftrightarrow 2023 \mid (x - y)$. Доказати да је ρ релација еквиваленције.

3. Испитати да ли су следеће скуповне једнакости тачне:

(а) $A \cap B = B \Rightarrow A \subset B$;

(б) $A \cup B = A \Leftrightarrow A \subset B$

4. Којом цифром се завршава број $2^{2023} + 3^{2023} + 7^{2023}$?

5. Одредити све осмоцифрене бројеве $\overline{aaaabbbb}$ дељиве са 15.

II РАЗРЕД

Степеновање и кореновање; комплексни бројеви

1. Израчунати вредност израза:

$$\left((0{,}2)^{-2} + \sqrt[3]{64} \cdot (13^2 - 12^2)\right)^{\frac{1}{3}} : \sqrt[3]{(-2)^3}.$$

2. Шта треба да важи за целе бројеве a и b да би број $\frac{6^{a+b} \cdot 12^{a-b}}{8^a \cdot 9^{a+2b}}$ био цео?

3. Израчунај вредност израза $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{6} - \sqrt{24} - \sqrt{48} + \sqrt{108}}$.

4. Ако су a и b позитивни реални бројеви и $ab \neq |a - b|$ упростити израз

$$\frac{\sqrt{(ab-a)^2}}{\sqrt[3]{(ab-a)^3}} : \frac{ab + a - b}{-a^2 - b^2 + a^2b^2 + 2ab}.$$

Српска математичка олимпијада и Изборна такмичења 2023.

Владимир Балшић, Миљан Кнежевић

Овогодишња, 17. по реду, Српска математичка олимпијада (СМО) одржана је 1. и 2. априла у Математичкој гимназији у Београду. На такмичењу је учествовало 32 ученика изабраних на основу резултата Државног такмичења.

Прва два ученика су освојила прву награду (Матеја Вукелић и Александар Вишњић), следећих пет другу награду (Стефан Шебез, Андрија Живадиновић, Гвозден Лапчевић, Вукашин Ђиновић и Вукашин Пантелић) и наредних шест трећу награду (Александар Ћузовић, Нина Шушић, Стеван Радивојевић, Иван Митровић, Михаило Јанчевић и Новак Деспотовић). Ти ученици су се уједно пласирали на Изборно такмичење (ИТ) за Међународну математичку олимпијаду (ММО).

Још 14 ученика (Марко Трајковић, Ана Илић, Владимир Лукић, Вук Ристић, Вукашин Бабић, Никола Петровић, Страхиња Сврзић, Урош Стевановић, Јанко Вукобратовић, Никола Нешовић, Михаило Лекић, Владимир Бранковић, Стефан Схрестха и Василије Хаџи-Пурић), они који су комплетно урадили бар један задатак, похваљени су.

Додајмо да је разлика између 11. и 21. пласираног била је само 1 поен, тако да су о учешћу на Изборном такмичењу за ММО одлучивали детаљи у исписивању решења.

На основу резултата СМО одређена је екипа Србије за Балканску математичку олимпијаду (БМО). Екипу Србије су чинили:

СРБ 1 Матеја Вукелић, 4. разред Математичке гимназије у Београду;

СРБ 2 Александар Вишњић, 4. разред Математичке гимназије у Београду;

СРБ 3 Стефан Шебез, 1. разред Математичке гимназије у Београду;

СРБ 4 Андрија Живадиновић, 4. разред Гимназије „Светозар Марковић” у Нишу;

СРБ 5 Гвозден Лапчевић, 3. разред Математичке гимназије у Београду;

СРБ 6 Вукашин Ђиновић, 4. разред Гимназије „Јован Јовановић Змај” у Новом Саду.

НАШ ЛАУРЕАТ

Наши ученици, укључујући и оне из бивше државе Југославије, наступају на Међународним математичким олимпијадама (IMO) још од 1963. године. Успеси су варирали, од похвала, па до медаља, бронзаних, сребрних и златних.

Најчешће су лауреати били ученици чувене Математичке гимназије (МГ) из Београда коју су обично похађали од 2. разреда. Али било је и оних који се прикључили у неком од каснијих разреда или су своје комплетно средње образовање добили у некој другој школи.

Међу „придошлицама“, посебна места припадају талентованим ђацима из „малих средина“, из школа из места у унутрашњости. А кад један такав „мали генијалац“ стигне до врха врхова и освоји златну медаљу на некој IMO, тада нема других речи осим похвала и дивљења.

Један од њих, свакако је Јожеф Б. Варга из Новог Итебеја. Средњошколско образовање започео је у зрењанинској гимназији, а наставио у 3. разреду у београдској МГ. Тада се пласирао на IMO и постао један од прва два освајача златних медаља с простора Србије (други је његов вршњак Миодраг Живковић).

Јожефе, када је интересовање за математику превладало? Шта је имало пресудан утицај?

Математика ме је интересовала још пре основне школе. Од родитеља, а и од других из окружења, добијао сам разне задатке да решавам, чак и оне врло тешке тзв. главоломке. И сви су били изненађени и чудили се колико сам у томе био успешан.

Прво озбиљније признање добио сам после завршене основне школе. Наиме, од своје наставнице, као награду за постигнуте успехе из математике, добио сам једну књигу која је обухватала готово сво градиво математике средње школе.

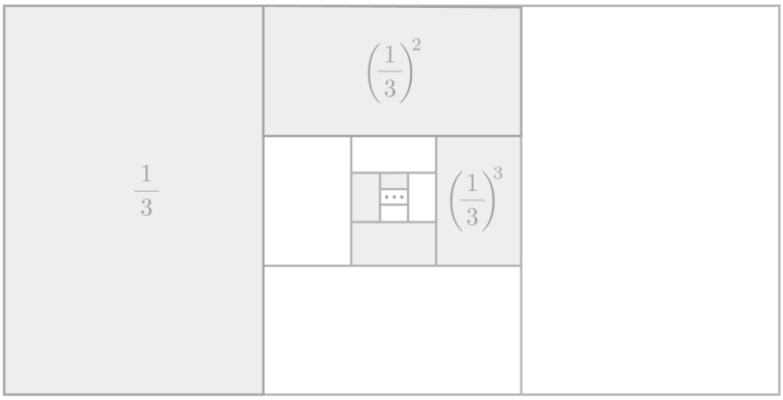
У првом разреду гимназије први пут сам се срео с Математичко-физичким листом. Веома ми се допао и одмах сам постао претплатник. Од самог почетка трудио сам се да решим све задатке, без обзира ком разреду су били намењени. У томе сам у највећој мери и успевао. И данас сам по

ДОКАЗ БЕЗ РЕЧИ

Ненад Стојановић

Доказ без речи, назив је за методу визуелног „доказивања“ математичких тврђења. Појавио се у прошлом веку и брзо стекао широку популарност. Представља спој уметности и математике. Бројне речи и ознаке замењује слика која својим садржајем све објашњава.

Један геометријски ред



$$\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots=\frac{1}{2}$$

НАГРАДНИ ШАХОВСКИ ЗАДАТАК
Тангента 112 - решење

Црни вуче и матира у 4 потеза

1. Dd3+

1. ... Lc2 2. Db5+ Lb3 3. Db3+ Tb2 4. Db2 мат

1. … Tcc2 2. Dd1+ Tc1 3. Db3+ Tb2 4. Db2 мат

1. … Tac2 2. Db3+ Tb2 3. Db2 мат.

Редакцији није стигло ниједно решење тако да нема награђених.

ШАХОВСКА СТРАНА

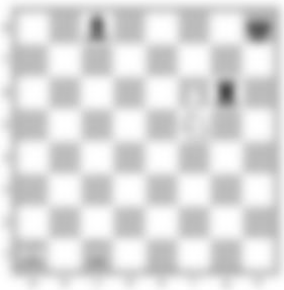
БУРА У ЗАВРШНИЦИ

Насупрот средишњици, игра у завршници је обично мирна и у њој једну од кључних улога играју краљеви. Сем тога, завршнице су детаљно и систематски изучаване, готово као отварања.

Међутим, има завршница у којима „све кључа“, као у најоштријим средишњицама. О таквим ћемо овај пут.

Бели је на потезу у, рекло би се, обичној завршници. Главна слабост црног је основни ред и око тога се води борба. **1. Df6! Da7+**. Наравно, на 1. ... Lf6 2. Te8 мат. Интересантно је да 1. Te5 Te5 2. Df6 води само ремију. Наиме, после 2. ... Te1+ 3. Kh2 Th1+ 4. Kg3 Th3+ 5. gh3 Dh2+ 6. Kh4 Dg3+ 7. Kg5 Dg4+ 8. Kg4 настаје пат. Слично је на друге одговоре белог. **2. Kh1 De3!**. Одлична парада, јер је и основни ред белог слаб. На 3. Te3 Td1+ с матом, а на 3. Le3 Lf6 с једнаком позицијом. Додајмо да не вреди 2. ... Db8 због 3. Dg5+ Kh8 4. Lg7+ Lg7 5. Dd5 и бели добија. **3. Dh4 Lg3!**. Црни се и брани и напада. **4. Dg5+!**. Још једна бравура белог. **4. ... Tg5**. Изнуђено због 4. ... Dg5 5. Td8 мат. Но, после **5.Te3** црном прети Te8 мат и истовремено „висе“ топ и ловац. Једина одбрана је **5. ... Te5** али после **6. Tg3** бели остаје с ловцем више и лако добија. Прави ватромет жртава.

У следећој завршници, студији Корољкова, ништа не слути на будући невиђени окршај.



Бели је на потезу и покушава да искористи опасног f6 пешака. **1. f7 Ta6+**. Једина одбрана, јер не иде 1. ... Tf6 због 2. Lb2. Сад је бели на муци. Губи 3. Kb1 Lf5+ и 4. ... Kg7. А на 2. Kb2 краљ је заузео место ловцу и после 2. … Tf6 пада пешак f7 и исход је реми. Излаз је скроз неочекиван. **2. La3!! Ta3+ 3. Kb2**. Као и раније, губи 3. Kb1 Lf5+ 4. Kb2 Ta8. Црни је поново у тешкоћама, али налази духовиту одбрану **3. ... Ta2+!**. Не ваља 3. ... Tb3+ због 4. Ka2! и f пешак излази у даму. **4. Kc1!** (4. Kb1 Lf5+ и Kf7) **Ta1+** (4. ... Tc2+ 5. Kb1(d1)) **5. Kd2 Ta2+ 6. Ke3 Ta3+ 7. Kf4 Ta4+ 8. Kg5** (8. Kg3 Tg4+ и 9. ... Tg8 с ремијем) **Tg4+! 9. Kh6!**. На 9. Kg4? Lf5+ 10. Kf5 Kg7 11. Ke6 Kf8 12. Kf6 пат. На 9. Kf6 Tg8 10. Se7 Td8, а на 9. Kh5 Tg8 и реми у свим случајевима. **9. ... Tg8 10. Se7 Le6 11. fg8D+ Lg8 12. Sg6 мат**. Ретко виђен мат.

Следећа позиција је из партије Јовчић-Рајковић (1977).

Бели је управо одиграо b8D убеђен да му не прети никаква опасност. Међутим, уследило је непријатно изненађење. **1. ... f2+ 2. Kh1** (2. Kf1 g2 мат) **g2+ 3. Kh2 g1D+ 4. Tg1 Sf3+!**. Ово је црни „држао у рукаву“. **5. Tf3 gf1D+** и црни матира у два или три потеза. Додајмо да не спасава 5. Kg3 због 5. … fg1D+ 6. Kf3 Dg4+ 7. Ke3 Te2+ 8. Kc3 De4+ 9. Kc3 Tc2 мат, као ни 5. Kh3 g4+! 6. Tg4 f1D+ 7. Kg3 Dg2+ 8. Kf4 Dg4+ 9. Ke3 Dd4+ 10. Kf3 Tf2+ 11. Kg3 Dh4 мат.

НАГРАДНИ ЗАДАТАК

Бели вуче и матира у 2 потеза

Решења слати на адресу:
vojpet@gmail.com

Најуспешнији решавачи биће награђивани шаховском литературом издавачке куће „Шаховски информатор“.

Војислав Петровић

1 *Марко Кошчица*, Четири доказа Штајнер-Лемусове теореме
11 *Александар Миленковић*, *Ненад Стојановић*, Наградни задаци
30 Владимир Јанковић, Миодраг Живковић, Hello World! – Мој број
38 *Мирјана Катић*, Предлози за први писмени задатак
46 *Владимир Балтић*, *Миљан Кнежевић*, Математичка такмичења
54 *Војислав Петровић*, Наш гост – Наш лауреат
60 *Ненад Стојановић*, Доказ без речи
61 Наградни шаховски задатак
62 *Војислав Петровић*, Шаховска страна, Бура у завршници

YU ISSN 0354-656X