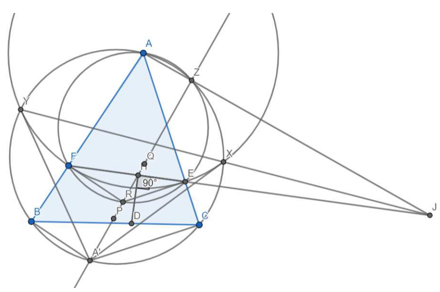
Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - ИЗБОРНО ЗА ИМО

Први дан

1. Одоговор: 42550.
Прво, приметимо да је $1+2+\ldots+24=300$. Иначе, решење ћемо спровести користећи језик теорије графова. Посматрајмо граф са 300 чворова (Спартанци), где су гране познанства међу њима (Спартанцима). Приметимо да не можемо да имамо више од k чворова са степеном $300-k$. Заиста, ако имамо преко k чворова са степеном $300-k$, онда ако посматрамо произвољан чвор степена $300-k$, он може бити повезан само са онима који нису степена $300-k$, а у овом случају је таквих највише $300-k-1$, што је контрадикција. Стога, највише један чвор има степен 299, највише 2 чвора су степена 298, највише 3 чвора су степена $297\ldots$. Лако се показује да је у том случају сума степена свих чворова највише $(300-1)+(300-2)+(300-2)+(300-3)+(300-3)+(300-3)+\ldots=\sum_{i=1}^{24} i\cdot(300-i)=85100$, па је број грана највише пола од тога, тј. $\frac{85100}{2}=42550$.

Коначно, опишимо конструкцију у "максималном" случају. Поделимо чворове графа у дисјунктне групе $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_{24}$, где је $|A_i|=i$. Граном ће нам бити повезана два чвора графа акко нису у истом скупу. Тада сви чворови из скупа A_i имају степен $300-i$, а они су повезани само са елементима из A_j, за $i\neq j$, па је $300-i\neq 300-j$. У овом случају је број грана $\frac{300\cdot 299}{2}-\sum_{i=1}^{24}\frac{i\cdot(i-1)}{2}=42550$.



2. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Нека је J пресек правих EF и XY, а Z пресек кружница описаних око троуглова ABC и AFE. Ако посматрамо инверзију Ψ са центром у A са полупречником $AX=AF=AE=AY$, знамо да је $\Psi(E)=E$, $\Psi(F)=F$, $\Psi(X)=X$, $\Psi(Y)=Y$, те је $\Psi(XY)$ описана кружница око троугла AXY (без тачке A), а $\Psi(FE)$ описана кружница око троугла AEF (без тачке A). Како се XY и EF секу у J, а $\Psi(XY)$ и $\Psi(EF)$ се секу у Z, видимо да је $\Psi(J)=Z$. Како је PQ (на основу Брокарове теореме) полара тачке J у односу на кружницу инверзије, знамо да права PQ садржи Z и да је $PQ\perp AJ$.

Спроведимо, сада, кратак рачун углова. Имамо да је $\sphericalangle AZF=\sphericalangle AEF=\sphericalangle AFE=180^\circ-\sphericalangle AZE=\sphericalangle EZJ$, па је AJ спољна симетрала угла $\sphericalangle FZE$, па је PQ унутрашња симетрала угла $\sphericalangle EZF$. Сада, како је Z Микелова тачка четвороугла $BCEF$, закључујемо да је $\triangle ZEC\sim\triangle ZFB$, па је $\frac{ZF}{ZE}=\frac{BF}{CE}$. По теореми о симетрали угла, довољно је доказати да је $\frac{HF}{HE}=\frac{BF}{CE}$, што ће нам са претходним завршити задатак. По Чевиној теореми видимо да је $\frac{AE}{EC}\frac{DC}{DB}\frac{BF}{FA}=1$, тј. $\frac{BF}{CE}=\frac{DB}{DC}$. Нека је H' тачка на EF таква да је $\frac{H'F}{H'E}=\frac{BF}{CE}$. У векторском облику је $\vec{DH'}=\frac{DC}{BC}\vec{BF}+\frac{DB}{BC}\vec{CE}$. Међутим, видимо да су интензитети $||\frac{DC}{BC}\vec{BF}||=||\frac{DB}{BC}\vec{CE}||$ једнаки, па њихов збир има правац симетрале угла између ова два вектора. Ово је управо правац симетрале угла $\sphericalangle EAF$, а како је

$EA = FA$, знамо да је та симетрала нормална на EF, па је $DH' \perp EF$, те је $H' \equiv H$. Из овога нам следи тврђење. Такође, уколико су праве EF и XY паралелне, доказ се анологно спроводи.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Нека је пресек нормала из E на AC и из F на AB тачка R и A' тачка дијаметрално супротна тачки A у односу на кружницу описану око ABC. Сада, ако је $\omega(A, AE)$ кружница, видимо да је $A'X \perp AX$ и $A'Y \perp AY$, онда су $A'X$ и $A'Y$ тангенте на ω, па по Паскаловој теореми, коју примењујемо на шестоугао $FEXXYY$, следи да A' лежи на PQ. Слично, $RE \perp AE$ и $RF \perp AF$, RE и RF су тангенте на ω, па по Паскаловој теореми, коју примењујемо на $EEFFXY$, видимо да и тачка R припада правој PQ. Сада треба да докажемо да H лежи на RA'. Нека су K и L подножја висина из H на AB и AC, редом. Познато је да су три тачке колинеарне акко за неке две непаралелне праве важи да њихове пројекције формирају исте односе на тим правима. Када пројектујемо тачке A', R и H на AB, добијамо тачке B, F и K. Са друге стране, када их пројектујемо на AC, добијамо C, E и L. Стога, да бисмо завршили доказ, потребно нам је да важи $\frac{BF}{FK} = \frac{CE}{EL} \iff \frac{BF}{CE} = \frac{FK}{EL}$. Међутим, видимо да је $\sphericalangle HEL = \sphericalangle HFK$ и $\sphericalangle HLE = \sphericalangle HKF = 90^\circ$, па је $\triangle HEL \sim \triangle HFK \implies \frac{FK}{EL} = \frac{HF}{HE}$. Стога смо задатак свели на доказивање $\frac{BF}{CE} = \frac{HF}{HE}$, што можемо учинити на потпуно исти начин као и у првом решењу.

3. Докажимо да су низови a_n и b_n јединствено одређени. Знамо да је $a_n < b_n$, тако да је a_1 најмањи члан у оба низа, тј. $a_1 = 1$, те је $b_1 = 2$. Даље, пошто је a_2 мањи од свих осим од a_1 и можда b_1, добијамо да је $a_2 = 3$. Даље, нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ јединствено одређени (самим тим су и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ такви). Тада је a_{n+1} најмањи од свих бројева $b_{n+1}, a_{n+2}, b_{n+2}, \ldots$, па, због услова задатка, a_{n+1} мора бити најмањи број у $\mathbb{N}$ који није међу $a_1, a_2, \cdots, a_n$ или $b_1, b_2, \cdots, b_n$. На основу тога одређујемо и b_{n+1} као $b_{n+1} = a_{n+1} + n + 1$.

Сада ћемо конструисати низове a_n и b_n који испуњавају услове задатка и како знамо да је јединствена подела, то ће нам дати комплетан опис ових низова. У том циљу ћемо дефинисати функцију $sh : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ на следећи начин. Ставимо да је $sh(0) = 0$. По Зекендорфовој теореми, сваки природан број се може јединствено представити као збир једног или више различитих Фибоначијевих бројева, тако да збир не укључује ниједна два узастопна Фибоначијева броја, тј. за $a \in \mathbb{N}$ важи $a = \sum_{k=1}^{l} f_{i_k}$ $(i_k + 1 < i_{k+1})$. Ставимо да је $sh(a) = \sum_{k=1}^{l} f_{i_k+1}$, $a \in \mathbb{N}$. Овакав запис броја $a \in \mathbb{N}$ ћемо третирати као запис у "основи Фибоначија" и можемо га замислити, наравно, и као низ јединица и нула, где на i-тој позицији стоји 1, ако је f_i у запису (овде подразумевамо да је (f_i) познати Фибоначијев низ за који важи $f_{i+2} = f_{i+1} + f_i$, $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $i \in \mathbb{N}$), као и да у том запису сваки број има јединствен запис тако да не постоје два суседна кеца, а функција sh помера, односно, шифтује запис за једну позицију улево. Кључна ствар за sh функцију је да важи $a + sh(a) = sh(sh(a))$, $a \in \mathbb{N}_0$. Ово свакако важи, јер $a + sh(a) = \sum_{k=1}^{l} f_{i_k} + \sum_{k=1}^{l} f_{i_k+1} = \sum_{k=1}^{l} (f_{i_k} + f_{i_k+1}) = \sum_{k=1}^{l} f_{i_k+2} = sh(sh(a))$.

Сада ћемо узети $a_n = sh(n-1) + 1$ и $b_n = sh(sh(n-1)) + 2$, $n \in \mathbb{N}$, и доказати да они испуњавају услове. Прво је $n + a_n = (n-1) + 1 + sh(n-1) + 1 = sh(sh(n-1)) + 2 = b_n$. Докажимо да се за сваки број $m \in \mathbb{N}_0$ број $m+1$ налази у тачно једном од низова a_n или b_n. Ако ће $m+1$ бити у a_n, онда треба да важи да је $m = sh(n-1)$ за неко n, а ако ће бити у b_n, онда треба да је $m = sh(sh(n-1)) + 1$. Приметимо да се $sh(sh(n-1))$ завршава са барем две нуле у "основи Фибоначија", па се $sh(sh(n-1)) + 1$ завршава са 01. Са друге стране, $sh(n-1)$ се увек завршава са 0 у овом запису. Стога, ако се m завршава са 0 у "основи Фибоначија", онда $m+1$ мора бити у низу (a_n), те је n јединствено одређено шифтовањем уназад за једну позицију (и додавањем 1), а ако се m завршава са 01 (са 11 не може), онда се $m+1$ мора налазити у низу (b_n) и јединствено је одређено шифтовањем броја две позиције удесно (и додавањем 1). Овиме смо доказали да ови низови испуњавају услове задатка.

Најзад, докажимо тврдњу, тј. да је $a_{b_n} = sh(b_n - 1) + 1 = sh(sh(sh(n-1)) + 1) + 1 = sh(sh(sh(n-1))) + 2 + 1 = sh(sh(n-1)) + sh(n-1) + 3 = a_n + b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Јасно је да све једнакости у претходном низу тривијално важе, осим треће. Да је и трећа испуњена видисе из чињенице да се $sh(sh(n-1))$ завршава са две нуле, па кад додамо 1 и опет шифтујемо, све цифре ће се шифтовати још за 1, а та нова цифра ће се шифтовати у двојку. Овиме смо доказали тврђење задатка.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - ИЗБОРНО ЗА ИМО

Други дан

4. Ако је $p=2$, нема шта да се показује, те нека је $p\geqslant 3$. Присетимо се коначних разлика полинома. Познато је да је $\binom{k}{0}P(x)-\binom{k}{1}P(x-1)+\binom{k}{2}P(x-2)-\cdots+(-1)^k\binom{k}{k}P(x-k)$ полином степена тачно $\deg P-k$, односно нула полином када је $k>\deg P$ (ово се лако доказује индукцијом, наравно). Приметимо да из тога следи да је $\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\cdot\binom{p-1}{k}P(p-k)=0$. Ако су све наведене апсолутне вредности 0, онда је цео полином 0, што је крај доказа. Претпоставимо да није нула, него неко $c\neq 0$, те да је $P(p-k)=|P(p-k)|\cdot a_k=ca_k$, где је $a_k\in\{-1,+1\}$, $k\in\{0,1,\dots p-1\}$.

Стога, $c\cdot(\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\cdot a_k\cdot\binom{p-1}{k})=0$ и с обзиром да је $c\neq 0$ закључујемо да израз у загради мора бити 0. Посматраћмо ово по модулу p. Знамо да је $\binom{p-1}{k}\equiv(-1)^k \pmod p$. Следи да израз у загради по модулу p постаје $\sum_{k=0}^{p-1}a_k\cdot(-1)^{2k}\equiv\sum_{k=0}^{p-1}a_k \pmod p$. Међутим, како је $p\geqslant 3$, ова сума мора бити непарна и дељива са p. Одавде добијамо да је $\sum_{k=0}^{p-1}a_k$ број који је $\equiv p \pmod{2p}$, али је такође између бројева $-p$ и p, па је $a_0=a_1=\cdots=a_{p-1}\in\{1,-1\}$. У сваком случају следи да је $P(1)=P(2)=\cdots=P(p)$, те је полином P константан.

Напомена. Приметимо да тврђење није тачно када је у питању полином степена мањег од $n-1$, где је $n>3$ природан број дељив са 2 или 3, на пример.

5. Решимо најпре проблем за $p>2$. Докажимо да је $(p^n-p+1)!_p\equiv_{p^n}1$. Ако је a неки цео број који није дељив са p означимо са a^{-1} његов изверз по модулу p^n, при чему је $1\leqslant a^{-1}<p^n$. За сваки број облика $kp+1$, $k\in\mathbb{Z}$, важи да је $(kp+1)^{-1}=lp+1$, за неко l, $0\leqslant l<p^n$ (ако је $(kp+1)^{-1}=lp+s$, за неко $0\leqslant s<p$, онда би важило $p\mid p^n\mid(kp+1)(lp+s)-1$, те би $p\mid s-1$, одакле је $s=1$). Како различитим бројевима из скупа $\{1,p+1,2p+1,...,p^n-p+1\}$ одговарају различити инверзи, то важи

$$\{1^{-1},(p+1)^{-1},(2p+1)^{-1},...,(p^n-p+1)^{-1}\}=\{1,p+1,2p+1,...,p^n-p+1\}.$$

Отуда бројеве из скупа $S=\{1,p+1,2p+1,...,p^n-p+1\}$ можемо упарити тако да производ у сваком пару, по модулу p^n, буде једнак 1. Остаје нам да видимо који су бројеви из S сами себи пар. Ако за неко $c\in S$ важи $c=c^{-1}$, онда $p^n\mid(c-1)(c+1)$, те $p^n\mid c-1$ (пошто је $c+1\equiv_p 1+1\not\equiv_p 0$, због $p\neq 2$), односно $c=1$. Одавде је, због упаривања бројева, заиста $(p^n-p+1)!_p\equiv_{p^n}1$, па можемо узети да је $t=p^n-p+1$. Приметимо још да је

$$(p^n-p-1)!_p\equiv_{p^n}(p-1)\cdot(2p-1)\cdot\ldots\cdot(p^n-p-1)\equiv_{p^n}(-(p^n-p+1))\cdot(-(p^n-2p+1))\cdot\ldots\cdot(-(p+1))\equiv_{p^n}$$

$$\equiv_{p^n}(-1)^{p^{n-1}-1}(p^n-p+1)!_p\equiv_{p^n}(p^n-p+1)!_p\equiv_{p^n}1,$$

те можемо узети и $t=p^n-p-1$. Овим је комплетиран доказ за $p>2$.

Сада решавамо проблем за $p=2$. Докажимо индукцијом да за $n\geqslant 3$ важи $(2^n-1)!_2\equiv_{2^n}1$. За $n=3$ непосредном провером доказујемо да је $7!_2\equiv_8 1$. Нека је тврђење тачно за неко n, $n\geqslant 3$. Тада је $(2^n-1)!_2\equiv_{2^{n+1}}1$ или $(2^n-1)!_2\equiv_{2^{n+1}}2^n+1$, те је $((2^n-1)!_2)^2\equiv_{2^{n+1}}1$. Зато је

$$(2^{n+1}-1)!_2\equiv_{2^{n+1}}(2^n-1)!_2\cdot(-1)^{2^{n-1}}\cdot(2^n-1)!_2\equiv_{2^{n+1}}1,$$

чиме је тврђење $(2^n-1)!_2\equiv_{2^n}1$, за $n\geqslant 3$, доказано индукцијом. Зато можемо узети $t=2^n-1$. Други повољан избор за t зависи од тога да ли је $(2^{n-1}-1)!_2\equiv_{2^n}1$ или

$(2^{n-1}-1)!_2 \equiv_{2^n} 2^{n-1}+1$. При првој могућности можемо узети $t = 2^{n-1}-1$, а при другој $t = 2^{n-1}+1$, пошто је тада $(2^{n-1}+1)!_2 \equiv_{2^n} (2^{n-1}+1)^2 \equiv_{2^n} 1$.

6. Означимо дате дужи са $D_1, \ldots, D_{n^2}$ и поставимо координатни систем у равни тако да међу датим дужима нема вертикалних, тј. да праве које их садрже нису ортогоналне на $x-$осу. Фиксирајмо на свакој дужи D_i тачку T_i, $1 \leqslant i \leqslant n^2$, тако да све тачке T_i, $1 \leqslant i \leqslant n^2$, имају различите $x-$координате. Без умањења општости, претпоставимо да су $T_1, \ldots, T_{n^2}$ поређане у растућем поретку у односу на $x-$координату.

За свако i, $1 \leqslant i \leqslant n^2$, дуж D_i "скратимо" тако да и даље садржи тачку T_i и да су, притом, све дужи по паровима дисјунктне када се пројектују на $x-$осу. Означимо скраћене дужи са D'_i, $1 \leqslant i \leqslant n^2$. Очигледно, довољно је доказати тврђење за скраћене дужи.

С обзиром да све дужи имају различит коефицијент правца, по Ердош-Секереш теореми, низ скраћних дужи има или растући или опадајући (по коефицијенту правца) подниз дужине n. Без умањења општости, нека је то растући подниз $D'_{a_1}, \ldots, D'_{a_n}$. За свако i, $1 \leqslant i \leqslant n$, поставимо тачку S_{a_i} на растојању $\varepsilon > 0$ испод тачке T_{a_i}. Тврдимо да за довољно мало ε дужи $D'_{a_1}, \ldots, D'_{a_n}$ блокирају видљивост сваке две тачке из скупа $\{S_{a_i} : 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Заиста, ако фиксирамо $1 \leqslant i < j \leqslant n$, не може истовремено тачка T_{a_i} бити испод праве на којој је дуж D'_{a_j} и тачка T_{a_j} бити испод праве на којој је дуж D'_{a_i}, јер је нагиб D'_{a_i} мањи од нагиба D'_{a_j}. Самим тим, јасно је да тачке S_{a_i} и S_{a_j}, које су довољно близу тачкама T_{a_i} и T_{a_j}, нису међусобно видљиве.