

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИМО

20. мај 2023. године

Први дан

1. Пред битку у Термопилима се нашло 300 Спартанаца. Испоставило се да међу њима свака двојица која се познају имају различит број познаника међу преосталим Спартанцима. Одредити максималан број парова Спартанаца који се познају под овим условима. Претпоставља се да су познанства симетрична.

2. Дат је троугао ABC . Нека су тачке D , E и F на дужима BC , AC и AB , те да су тачке X и Y , $X \neq Y$, на описаној кружници троугла ABC , тако да се праве AD , BE и CF секу у једној тачки и да важи $AX = AF = AE = AY$. Нека се праве XE и YF секу у тачки P , а праве XF и YE у тачки Q . Означимо са H подножје нормале из тачке D на праву EF . Доказати да су тачке P , Q и H колинеарне.

3. Скуп природних бројева \mathbb{N} је партиционисан на два подниза $a_1 < a_2 < \dots$ и $b_1 < b_2 < \dots$ тако да важи $b_n - a_n = n$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је $a_n + b_n = a_{b_n}$, за свако $n \in \mathbb{N}$.

Предвиђено време за израду задатака је 270 минута.

Сваки задатак вреди 7 бодова.

Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИМО

21. мај 2023. године

Други дан

4. Дат је прост број p . Нека је $P \in \mathbb{R}[x]$ полином степена мањег од $p - 1$ тако да је $|P(1)| = |P(2)| = |P(3)| = \dots = |P(p)|$. Доказати да је P константан полином.

5. За природне бројеве a и b број $a!_b$ дефинишемо на следећи начин:

$$a!_b = \prod_{\substack{1 \leq i \leq a \\ i \equiv_b a}} i.$$

Нека је p прост број и $n > 3$ природан број. Доказати да постоје барем две различите вредности природног броја t , $1 < t < p^n$, такве да $p^n \mid t!_p - 1$.

6. У равни је дато n^2 по паровима непаралелних и дисјунктних дужи. Доказати да је у истој равни могуће наћи n тачака таквих да се никоје две међусобно не виде (унутрашњост дужи која спаја било које две од тих n тачака сече барем једну од датих дужи).

Предвиђено време за израду задатака је 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 бодова.
Решења задатака детаљно образложити.