Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред - Б категорија

1. Означимо бројеве са $x_n = n\sqrt{2023-n}$, за $n \in \{1, 2, ..., 2022\}$ и упоредимо суседне бројеве са табле. Одредимо за које бројеве $n \in \{1, 2, ..., 2021\}$ важи $x_{n+1} > x_n$. Имамо:

$$x_{n+1} > x_n \Leftrightarrow (n+1)\sqrt{2023-(n+1)} > n\sqrt{2023-n} \Leftrightarrow$$

$$(n+1)^2(2022-n) > n^2(2023-n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -n^3 + 2020n^2 + 4043n + 2022 > -n^3 + 2023n^2 \Leftrightarrow 2022 - n > 3n(n-1348). \tag{1}$$

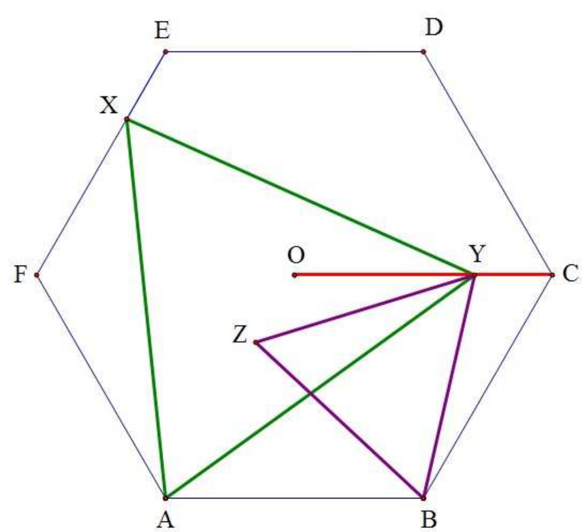
Уколико је $n \leqslant 1348$ неједнакост (1) је задовољена, пошто је десна страна непозитивна, а лева је позитивна. За $n \geqslant 1349$ важи $3n(n-1348) \geqslant 3 \cdot 1349 \cdot 1 > 2022 > 2022 - n$, те неједнакост (1) није задовољена. Овим смо утврдили да $x_1 < x_2 < ... < x_{1348} < x_{1349}$ и $x_{1349} > x_{1350} > ... > x_{2021} > x_{2022}$, те је највећи број $x_{1349} = 1349\sqrt{674}$.

2. Коришћењем критеријума дељивости са 11 имамо:

$$\overline{20\underbrace{aa...aa}_{2020}21} \equiv_{11} (1 + \underbrace{a + ... + a}_{1010} + 0) - (2 + \underbrace{a + ... + a}_{1010} + 2) \equiv_{11} 8.$$

Са друге стране, ако је x природан број, онда је $x \equiv_{11} 0$ или $x \equiv_{11} \pm 1$ или $x \equiv_{11} \pm 2$ или $x \equiv_{11} \pm 3$ или $x \equiv_{11} \pm 4$ или $x \equiv_{11} \pm 5$, па је $x^2 \equiv_{11} 0$ или $x^2 \equiv_{11} 1$ или $x^2 \equiv_{11} 4$ или $x^2 \equiv_{11} 9$ или $x^2 \equiv_{11} 5$ или $x^2 \equiv_{11} 3$. Дакле, бројеви $\overline{20\underbrace{aa...aa}_{2020}21}$ и x^2 при дељењу са 11 дају различите остатке, те не могу бити међусобно једнаки. Дакле, цифра са траженом особином не постоји.

3. Уочимо на дужи OC тачку Y' такву да је $OY' = FX$. Како је $AF = AO$, $FX = OY'$ и $\sphericalangle AFX = 120° = \sphericalangle AOY'$, то су троуглови AFX и AOY' подударни. Отуда је $AX = AY$ и $\sphericalangle FAX = \sphericalangle OAY'$, те је $\sphericalangle XAY' = \sphericalangle XAO + \sphericalangle OAY' = \sphericalangle XAO + \sphericalangle FAX = \sphericalangle FAO = 60°$. Зато је троугао XAY' једнакокрак са углом при вргу од $60°$, те је једнакостраничан. Отуда се тачке Y' и Y поклапају.



Уочимо тачку Z' на дужи OA такву да је $OZ' = YC$. Како је $Z'O = YC$, $OB = BC$ и $\sphericalangle Z'OB = 60^\circ = \sphericalangle YCB$, троуглови $Z'OB$ и YCB су подударни. Из ове подударности имамо да је $BZ' = BY$ и $\sphericalangle OBZ' = \sphericalangle CBY$, те је $\sphericalangle YBZ' = \sphericalangle YBO + \sphericalangle OBZ' = \sphericalangle YBO + \sphericalangle CBY = 60^\circ$. Одавде је троугао YBZ' једнакокраки троугао са углом при врху $\sphericalangle YBZ' = 60^\circ$, те је једнакостраничан. Отуда се тачке Z' и Z поклапају, па је тачка Z заиста на дужи OA.

4. Ако поређамо цифре у опадајући редослед 9876543210 избором 3 од ових 10 цифара добијамо неку шифру. Стога, шифри има $\binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120$. Дакле, у 120 покушаја Милица сигурно отвара кофер.

5. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Из $|x|\cdot|1-x| = |x-x^2| = 2|x^2-x^3| = 2|x|^2\cdot|1-x|$ следи да је или $x=0$ или $x=1$ или $|x| = \frac{1}{2}$, тј. $x \in \{0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$. Међутим, за $x \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ није задовољено $|x-x^2| = 3|x^3-x^6|$, па ово нису решења система, док се провером успоставља да решење јесте $x \in \{0, 1\}$.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Ако је $m = |x-x^2|$, тада је $|x^2-x^3| = \frac{m}{2}$, $|x^3-x^6| = \frac{m}{3}$ и $|x^6-x| = \frac{m}{6}$, па је

$$m = |x-x^2| \leqslant |x^2-x^3| + |x^3-x^6| + |x^6-x| = \frac{m}{2} + \frac{m}{3} + \frac{m}{6} = m,$$

те се у наведеној примени неједнакости троугла достиже једнакост, одакле закључујемо да међу бројевима $x-x^3, x^3-x^6$ и x^6-x не постоје два који су различитог знака. Међутим, ако је $x<0$, тада је $x^3-x^6<0$ и $x^6-x>0$, док, ако је $x \in (0,1)$, тада је $x-x^3>0$ и $x^6-x<0$. Са друге стране, ако је $x \in (1,\infty)$, добијамо да је $x-x^3<0$ и $x^6-x>0$, те у овим случајевима нема решења. Следи да је решење наведеног система $x \in \{0, 1\}$.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Други разред - Б категорија

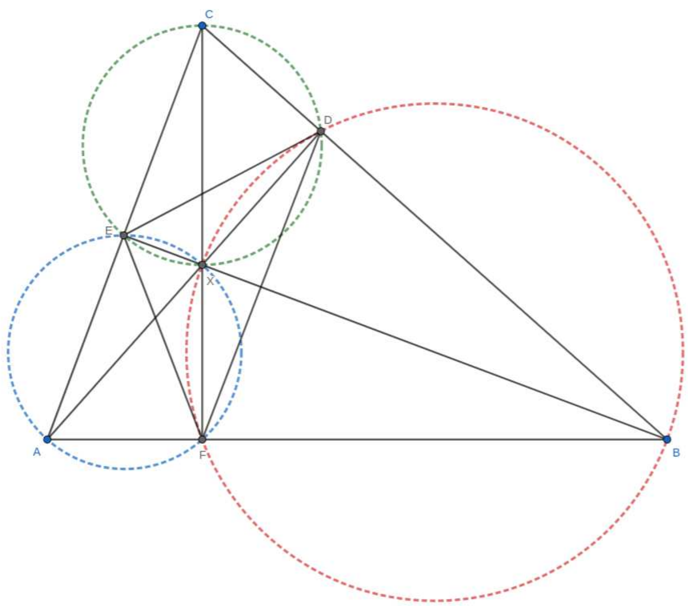
1. Из Виетових формула имамо да је $x_1 + x_2 = p$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{3}$. Даље је ${x_1}^3 + {x_2}^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = p^3 - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot p = p^3 - p = (p-1)p(p+1) \in \mathbb{N}$. Ако је $p = 3$, онда је $(p-1)p(p+1) = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Ако је $p > 3$ прост број, тада је $p = 6k \pm 1$, па су $p - 1$ и $p + 1$ узастопни парни природни бројеви, па је један од њих дељив са 4, а други паран, те је њихов производ дељив са $4 \cdot 2 = 8$. Међутим, производ три узастопна природна броја $(p-1)p(p+1)$ је дељив и са 3. Тиме је показано да је ${x_1}^3 + {x_2}^3 = (p-1)p(p+1)$ дељиво са $8 \cdot 3 = 24$.

2. Коришћењем критеријума дељивости са 7 имамо:

$$\overline{20\underbrace{aa...aa}_{2022}21} \equiv_7 \overline{a21} - \overline{aaa} + \overline{aaa} - \overline{aaa} + ... - \overline{aaa} + \overline{0aa} - 2 \equiv_7 19 \equiv_7 -2.$$

Са друге стране, ако је x природан број, онда је $x \equiv_7 0$ или $x \equiv_7 \pm 1$ или $x \equiv_7 \pm 2$ или $x \equiv_7 \pm 3$, па је $x^3 \equiv_7 0$ или $x^3 \equiv_7 \pm 1$ или $x^3 \equiv_7 \pm 1$ или $x^3 \equiv_7 \mp 1$. Дакле, бројеви $\overline{20\underbrace{aa...aa}_{2022}21}$ и x^3 при дељењу са 7 дају различите остатке, те не могу бити међусобно једнаки. Цифра са траженом особином не постоји.

3. Обележимо дате кружнице редом са k_A, k_B и k_C.



(а) Нека се k_A и k_B секу у $Y \neq F$. Из тетивности четвороуглова $AFYE$ и $BDYF$ важи $\sphericalangle FYE = \pi - \alpha$ и $\sphericalangle DYF = \pi - \beta$. Сада је $\sphericalangle DYE = 2\pi - \sphericalangle DYF - \sphericalangle FYE = \alpha + \beta = \pi - \gamma$. Међутим, из $\sphericalangle DCE + \sphericalangle DYE = \pi$, следи да је $CEYD$ тетиван, одакле следи тврђење.

(б) Нека је $X \equiv Y$. Приметимо следеће сличности:

- $\triangle ABX \sim \triangle ADF$
  $\sphericalangle ABX = \sphericalangle ADF$ (периферијски углови над истим луком)
  $\sphericalangle BAX = \sphericalangle DAF$
- $\triangle AFC \sim \triangle XEC$ (аналогно важе сличности $\triangle BFC \sim \triangle XDC$ и $\triangle AEB \sim \triangle XFB$)
  $\sphericalangle AFC = \sphericalangle XEC$ (следи из $\sphericalangle AFC + \sphericalangle AEX = \pi$, $\sphericalangle CEX + \sphericalangle AEX = \pi$)
  $\sphericalangle ACF = \sphericalangle XCE$
- $\triangle ABC \sim \triangle DBF$
  $\sphericalangle CAB = \sphericalangle FDB$ (из $\triangle AEB \sim \triangle XFB$, следи $\sphericalangle CAB = \sphericalangle EAB = \sphericalangle FXB$, док је $\sphericalangle FXB = \sphericalangle FDB$, јер су у питању углови над истом тетивом)
  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DBF$.

Показаћемо да је $\triangle AXB \sim \triangle EXD$. Како је $\sphericalangle AXB = \sphericalangle EXD$, довољно је показати $\frac{AX}{BX} = \frac{EX}{DX}$. Из $\triangle ABX \sim \triangle ADF$ је испуњено $\frac{AX}{BX} = \frac{AF}{DF}$. Из $\triangle AFC \sim \triangle XEC$ важи $\frac{AF}{EX} = \frac{AC}{CX}$, па је $AF = EX \cdot \frac{AC}{CX}$, те је тада $\frac{AX}{BX} = EX \cdot \frac{AC}{DF \cdot CX}$. Из $\triangle ABC \sim \triangle DBF$ је испуњено $\frac{AC}{DF} = \frac{CB}{FB}$, па је $\frac{AX}{BX} = EX \cdot \frac{CB}{FB \cdot CX}$. Коначно, из $\triangle FBC \sim \triangle DXC$ важи $\frac{FB}{DX} = \frac{CB}{CX}$, па је $\frac{AX}{BX} = \frac{EX}{DX}$, те је $\triangle AXB \sim \triangle EXD$. Сада имамо низ једнакости: $\sphericalangle DCX = \sphericalangle DEX = \sphericalangle XAB = \sphericalangle XAF$, одакле, користећи сличност троуглова $\triangle AXF$ и $\triangle CXD$, следи $\sphericalangle XFA = \sphericalangle XDC$. Међутим, $\sphericalangle XDC = \pi - \sphericalangle XDB = \sphericalangle XFB = \pi - \sphericalangle XFA$, па је $\sphericalangle XFA = \frac{\pi}{2}$, одакле је $CF \perp AB$ и аналогно $AD \perp BC$ и $BE \perp CA$, што је и требало показати.

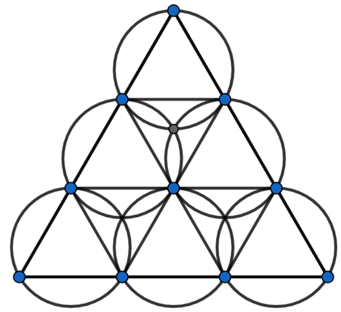
Са друге стране, ако су AD, BE и CF висине, тада је X ортоцентар троугла $\triangle ABC$. Како су троуглови AEX и AFX правоугли са хипотенузом AX, важи да тачке A, F, X и E припадају једној кружници, те то мора бити описана кружница око $\triangle AFE$. Слично, кружнице описане око $\triangle BDF$ и $\triangle CED$ садрже тачку X, па се та три круга секу у X. Дакле $X \equiv Y$.

4. Очигледно $x = 0$ није решење једначине $x^4 + ax^3 + (b-2)x^2 - ax + 1 = 0$. Зато је она еквивалентна са једначином која се добија дељењем полазне са x^2, односно са једначином

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + a(x - \frac{1}{x}) + b - 2 = 0.$$

Увођењем смене $y = x - \frac{1}{x}$, последња једначина постаје $y^2 + 2 + ay + b - 2 = 0$, односно $y^2 + ay + b = 0$. Из услова задатка познато је да ова једначина има два реална и различита решења. Обележимо их са y_1 и y_2. Једначина $x - \frac{1}{x} = y_1$ еквивалентна је са $x^2 - y_1 x - 1 = 0,\ x \neq 0$. Како је дискриминантна последње једначине једнака $y_1^2 + 4 > 0$ и како $x = 0$ није њено решење, она има два реална и различита решења. Аналогно и једначина $x - \frac{1}{x} = y_2$ има два реална и различита решења. Уколико би један те исти број x био решење и једначине $x - \frac{1}{x} = y_1$ и једначине $x - \frac{1}{x} = y_2$, важило би $y_1 = y_2$, што није случај. Из свега наведеног закључујемо да посматрана једначина има четири реална и међусобно различита решења.

5. Поделимо ли дати троугао на n^2 јединичних троуглова, добијамо мрежу у којој је тачно $\frac{n(n+1)}{2}$ троуглова са врховима окренутим на горе. Назовимо такве троуглове усправним. Остале ћемо назвати обореним. Пречник описаног круга сваког од усправних троуглова је $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, што је мање од $\sqrt{2}$, тј. од дијагонале квадрата која представља врх муварице. Према томе, уколико би се две муве налазиле у истом описаном кругу неког од ових усправних троуглова, њих би Милорад могао уклонити једним ударцем, јер може да их удари по дијагонали квадрата врха муварице (која је довољно дугачка). Стога је довољно да докажемо да ови описани кругови прекривају цео дати троугао, јер ће тада по Дирихлеовом принципу постојати барем један у коме се налазе барем две муве.



Јасно је да сваки од кругова прекрива припадајући усправни троугао. Што се оборених троуглова тиче, сваки од њих је окружен са тачно три усправна и, притом, описани кругови та три суседна троугла садрже центар посматраног обореног, одакле је јасно и да унија ова три круга прекрива тај оборени троугао. Цео велики троугао је, дакле, прекривен овим круговима, што смо и хтели да докажемо.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Трећи разред - Б категорија

1. Лако налазимо да је $\cos x = \frac{4}{5}$, те је $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$. Одавде је $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}} = \frac{1}{7}$. Са друге стране имамо да је и $\operatorname{tg} 2y = \frac{2\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg}^2 y} = \frac{2(5\sqrt{2}-7)}{1-(5\sqrt{2}-7)^2} = \frac{1}{7}$. Како је $2y \in (0,\pi)$, а $\operatorname{tg} 2y > 0$, то је и $2y$ оштар угао. Дакле, тангенси оштрих углова $\frac{\pi}{4} - x$ и $2y$ су једнаки, одакле су и сами углови једнаки. Зато је $\frac{\pi - 4x}{4y} = \frac{\frac{\pi}{4} - x}{y} = 2$.

2. Посматрајмо пирамиде $SABC$ и $SA'B'C'$ као да су им основе, редом, троуглови SAB и $SA'B'$, а врхови, редом, C и C'. Нека је H висина пирамиде $SABC$ из C, а h висина пирамиде $SA'B'C'$ из C'. Из сличности правоуглих троуглова којима су хипотенузе SC' и SC, а катете h и H, имамо да је $\frac{h}{H} = \frac{SC'}{SC}$. Нека је $\varphi = \sphericalangle ASB$. Сада је

$$\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{\frac{P_{SA'B'}\cdot h}{3}}{\frac{P_{SAB}\cdot H}{3}} = \frac{h}{H} \cdot \frac{SA' \cdot SB' \cdot \sin\varphi}{SA \cdot SB \cdot \sin\varphi} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC},$$

те на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине, уз коришћење полазног услова, имамо $1 = \frac{SA'}{SA} + \frac{SB'}{SB} + \frac{SC'}{SC} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}}$. Одавде је $\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} \leqslant \frac{1}{27}$, што је и требало доказати.

3. Пошто је $ax > 0$ и $4^x - 3^x > 0$, следи да је $a > 0$ и $x > 0$. За $a > 0$, $x > 0$ и $ax \neq 1$ једначина је еквивалентна са једначином

$$\log_{ax}(3^x + 4^x) = \frac{1}{2}\left(\log_{ax} 7^2 + \log_{ax}(4^x - 3^x)\right) + \frac{1}{3}\log_{ax} 2^{3(x-1)},$$

односно

$$\log_{ax}(3^x + 4^x) = \log_{ax} 7 + \log_{ax}\sqrt{4^x - 3^x} + \log_{ax} 2^{x-1}.$$

Из ове једначине добијамо једначину

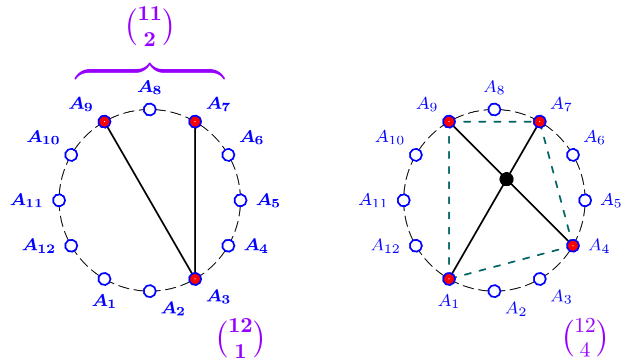
$$3^x + 4^x = 7 \cdot 2^{x-1}\sqrt{4^x - 3^x}.$$

Квадрирањем и дељењем последње једначине са 3^{2x} добија се једначина

$$45\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 57\left(\frac{4}{3}\right)^{x} - 4 = 0.$$

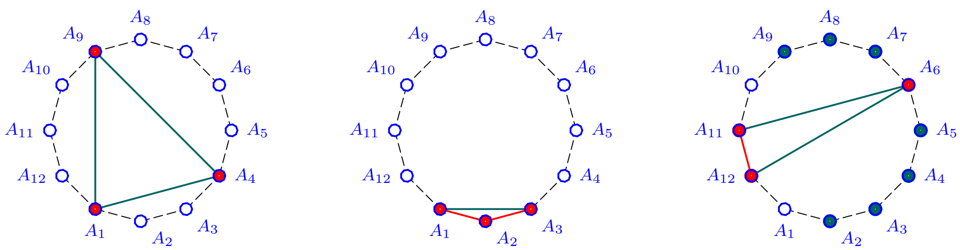
Увођењем смене $t = \left(\frac{4}{3}\right)^x > 0$ и решавањем квадратне једначине $45t^2 - 57t - 4 = 0$, добијамо да је $t = \frac{4}{3}$ (решење $t = -\frac{1}{15}$ није позитивно). Дакле, једино решење је $x = 1$ и добија се под условом $ax \neq 1$, што значи да је $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$.

4. (a) За две тетиве са крајевима у датим тачкама које имају тачно једну заједничку тачку имамо два различита случаја: 1° да се секу у некој од датих тачака или 2° да се секу у унутрашњости круга.



1° Тачку у којој се секу можемо одабрати на $\binom{12}{1} = 12$ начина, а друга два краја ових тетива на $\binom{11}{2} = 55$ (од преосталих 11 тачака бирамо две), па укупно има $\binom{12}{1} \cdot \binom{11}{2} = 12 \cdot 55 = 660$ таквих тетива.
2° Када одаберемо 4 тачке од свих $\binom{4}{2} = 6$ правих које оне одређују, само се дијагонале секу у унутрашњости круга, па стога тражених тетива у овом случају има колико и избора 4 тачке од 12, што можемо урадити на $\binom{12}{4} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 495$ начина.

Укупно парова тетива које се секу у једној тачки има $660 + 495 = 1155$.



(б) Спојимо сваку од 12 тачака са следећом на кружници. На тај начин добијамо 12-тоугао. Услов да се са обе стране сваке праве, на којој лежи нека страница изабраног троугла, налази барем једна од преосталих тачака је еквивалентан са тим да је свака страница изабраног троугла, заправо, дијагонала новоуведеног 12-тоугла. Стога, задатак ћемо решити тако што ћемо од укупног броја свих троуглова одузети број оних који имају две странице које су уједно и странице 12-тоугла, као и број оних који имају тачно једну страницу која је, такође, и страница поменутог 12-тоугла. Укупан број свих троуглова је $\binom{12}{3} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1} = 220$. Троуглова који имају две странице које су и странице 12-тоугла има онолико колико и темена 12-тоугла, јер су те две странице суседне у 12-тоуглу и у потпуности су одређене избором једног од темена 12-тоугла. Дакле, укупан број поменутих троуглова је 12. Коначно, троуглова који имају тачно једну страницу која је уједно и страница 12-тоугла има $\binom{12}{1} \cdot \binom{8}{1} = 12 \cdot 8 = 96$, јер на $\binom{12}{1}$ начина можемо изабрати једну страницу 12-тоугла, док на $\binom{8}{1}$ начина можемо изабрати преостало теме тог троугла. Дакле, укупан број тражених троуглова је $220 - 12 - 96 = 112$.

5. Ако је скуп на табли скуп свих делилаца неког броја x, онда за свако просто $p > x$, ако је Милисав замислио број xp, се не би нити један број дељив са p могао појавити на табли због своје величине, тј. вредности, те би, заиста, Милисав написао само све делиоце од x.
Са друге стране, нека је x најмањи заједнички садржалац свих бројева записаних на табли. С обзиром да записани бројеви на табли нису сви могући делиоци неког одређеног природног броја, тада x мора да дели n. Међутим, број x, свакако, није написан на

табли (да је на табли, онда би на табли били баш сви делиоци броја x). Стога, знамо да је $n < x^2$, тако да ако Алекса да скуп $\{1, 2, \cdots, x^2\}$, Милисављев број се сигурно налази унутар њега.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Четврти разред - Б категорија

1. Користећи рекурентну релацију добијамо да је за свако $k \in \mathbb{N}$ испуњено $a_k = a_{k-1} + 4(k-1) + 3 = a_{k-2} + 4(k-2) + 4(k-1) + 2 \cdot 3 = \ldots = a_1 + 4(1 + 2 + \cdots + k - 1) + (k-1) \cdot 3 = 2k(k-1) + 3(k-1) = (2k+3)(k-1)$. Са друге стране, ако бројилац и именилац поделимо са n и приметимо да је

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{a_{kn}}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\left(2k + \frac{3}{n}\right)\left(k - \frac{1}{n}\right)} = k\sqrt{2},$$

добићемо да је тражена гранична вредност једнака

$$\frac{1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{2022}}{1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{2022}} = \frac{4^{2023} - 1}{3(2^{2023} - 1)} = \frac{2^{2023} + 1}{3}.$$

2. Нека је $a = OA,\ b = OB,\ c = OC,\ d = OD,\ e = OE$ и $f = OF$. Посматрајмо раван π која садржи праве p и q (таква раван постоји пошто се праве p и q секу). Пресек равни π и сфере је нека кружница k_1. Тачке A, B, C и D припадају k_1, па из потенције тачке O на k_1 имамо да је $a \cdot b = c \cdot d$. Аналогно претходном закључујемо да је $a \cdot b = e \cdot f$, при чему A, B, E и F припадају кружници k_2. Одавде закључејемо да се елементи скупа $\{1, 5, 15, 17, 51, x\}$, за неко $x > 0$ (не обавезно различито од 1,5,15,17 и 51), могу поделити у три пара тако да су производи бројева у паровима међусобно једнаки. Једноставном анализом закључујемо да је то једино могуће у случају $5 \cdot 51 = 15 \cdot 17 = 1 \cdot x$. Одавде је $x = 255$, те је једна тетива кружнице k_1 или k_2 дужине $1 + 255 = 256$, те је пречник неке од њих бар 256. Како је пречник те кружнице не већи од пречника великог круга, добијамо да је полупречик сфере не мањи од 128. Докажимо да је могуће постићи да полупречник буде баш једнак 128. Нека је AB пречник кружнице k, тако да је $AB = 256$. На дужи AB уочимо тачку O такву да је $AO = 1$. Конструишимо, у равни кружнице k, кружницу w са центром у тачки O, пулупречника 5. Како је $1 < 5 < 255$, то се кружнице k и w секу. Нека је једна њихова пресечна тачка C. Права CO сече k у D, $D \neq C$. Из потенције тачке O у односу на k добијамо да је $OD = 51$. Аналогно птетходном конструишемо и тачке E и F.

3. Из прве једначине груписањем добијамо да је $a(b+2) - b = 58$, тј. $(a-1)(b+2) = 56$. Аналогном применом сличних трансформација у осталим јендачинама добијамо систем

$$\begin{aligned}(a-1)(b+2) &= 55\\ (b+2)(c+4) &= 308\\ (c+4)(d-6) &= 77.\end{aligned}$$

Из последње једначине имамо да је вредност $c + 4$ једнака $1, 7, 11$ или 77. Први случај, када је $c + 4 = 1$, није решење због услова да је c природан број. Друга могућност је да је $c + 4 = 7$, одакле је $c = 3$, те, стога, из друге једначине, добијамо да је $b = 2$, тј. $a - 1 = \dfrac{14}{11}$, што није могуће. Слично, заменом у преостале једначине из преостала два случаја добијамо решења

$$(a, b, c, d) \in \{(3, 26, 7, 13), (15, 2, 73, 7)\}.$$

4. Нумеришимо седишта у сваком реду од 1 до 6 и редове од 1 до n. Тада је минимално време потребно путнику са j-тим седиштем у i-том реду (писаћемо (i, j)) да дође на своје место (од секунде непосредно пре него што закорачи у авион) једнако $i+1+\lfloor|3.5-j|\rfloor$ ($i+1$ за седишта до пролаза, $i+2$ за она у средини и $i+3$ за она до прозора). Претпоставимо да тај путник закорачи у авион у $(t{+}1)$-ој секунди од почетка укрцавања. Тада се укрцавање свакако не може завршити за мање од $t+(i+1+\lfloor|3.5-j|\rfloor)$ секунди. Притом, последњи путник може закорачити у авион најраније у $6n$-тој секунди (ако су пре њега путници улазили сваке секунде), док је $i\geqslant 1$ и $\lfloor|3.5-j|\rfloor\geqslant 0$, па се укрцавање не може обавити за мање од $(6n-1)+1+1+0=6n+1$ секунди.

Докажимо да је могуће обавити га за $6n+1$ секунду. Ако је редослед укрцавања путника следећи: $(n,1),(n-1,1),...,(2,1),(1,1)$, $(n,2),...,(1,2)$, $(n,3),...,(1,3)$, $(n,6),...,(1,6)$, $(n,5),...,(1,5)$, $(n,4),...,(1,4)$, видимо да је време укрцавања управо $6n+1$ јер ће прво n путника са првим седиштем у сваком реду доћи до одговарајућег реда и одмах потом закорачити у део за седење у сваком реду, па ће бити слободан пролаз да у том тренутку крене друга група од n људи. На крају ће у шестој групи свако доћи до свог реда у $6n$-тој секунди и у $(6n+1)$-ој ће сви они сести на своје место, приводећи тиме укрцавање крају.

5. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Ако је $n\leqslant 0$, тада је $7^n-3^n\leqslant 0$, па једначина нема решења. Дакле, n мора бити природан број. Ако је $m<0$, једначина је еквивалентна са $2^{-mp}(7^n-3^n)=p^2$, па мора бити $p=2$ и $7^n-3^n=1$, што нема решење у скупу природних бројева. Закључујемо да мора бити $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Јасно је да за $p=3$ и $p=7$ једначина нема решења. У наставку ћемо разматрати парност броја n. Ако је n непаран број, тада, из $7^n-3^n=4(7^{n-1}+7^{n-2}\cdot 3+\cdots+7\cdot 3^{n-2}+3^{n-1})$, закључујемо да тачно 2^2 дели 7^n-3^n ($4\mid 7^n-3^n$, али $8\nmid 7^n-3^n$, јер је $7^{n-1}+7^{n-2}\cdot 3+\cdots+7\cdot 3^{n-2}+3^{n-1}$ непарно), те 2^2 тачно дели и $p^2\cdot 2^{mp}$. Уколико је $p=2$, онда је $mp=0$, односно $m=0$. Тада је $7^n-3^n=4$, па је одатле $n=1$ (за $n\geqslant 2$ се лако показује да је $7^n>3^n+4$). Уколико је $p\neq 2$, тада је $mp=2$, односно $m=\dfrac{2}{p}$, што није цео број. Ако је n паран број, тада је $n=2n_0$, $n_0\in\mathbb{N}$. Покажимо да је и mp паран број. Пошто је $p^2\equiv 1 \pmod 3$ и $7^n-3^n\equiv 1 \pmod 3$, то мора бити $2^{mp}\equiv 1 \pmod 3$, одакле следи да mp мора бити парно. Ако је $a=p\cdot 2^{mp/2}$, тада је једначина еквивалентна са $7^{2n_0}-3^{2n_0}=a^2$, односно $(7^{n_0}-a)(7^{n_0}+a)=3^{n_0}$. Пошто су $7^{n_0}-a$ и $7^{n_0}+a$ узајамно прости, то мора бити $7^{n_0}-a=1$ и $7^{n_0}+a=3^{n_0}$. Сабирањем претходних једначина добијамо $2\cdot 7^{n_0}=1+3^{n_0}$, те анализом исте по модулу 3 видимо да последња једначина нема решења у скупу природних бројева. Дакле, једино решење дате једначине је $(n,m,p)=(1,0,2)$.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Ако је $n\leqslant 0$, тада је $7^n-3^n\leqslant 0$, па једначина нема решења. Дакле, n мора бити природан број. Ако је $m<0$, једначина је еквивалентна са $2^{-mp}(7^n-3^n)=p^2$, па мора бити $p=2$ и $7^n-3^n=1$, што нема решење у скупу природних бројева. Закључујемо да мора бити $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Јасно је да за $p=3$ и $p=7$ једначина нема решења.

Ако је $p=2$, тада је $4\cdot 2^{2m}=7^n-3^n=4(7^{n-1}+7^{n-2}\cdot 3+\cdots+7\cdot 3^{n-2}+3^{n-1})$. Ако је $m=0$, тада је $n=1$, па $(n,m,p)=(1,0,2)$ испуњава услове дате једначине. Ако је $m>0$, онда, из $2^{2m}=7^{n-1}+7^{n-2}\cdot 3+\cdots+7\cdot 3^{n-2}+3^{n-1}$, следи да n мора бити паран број (2^{2m} је једнако суми n непарних бројева). Нека је $n=2n_0$, $n_0\in\mathbb{N}$. Тада је $2^{2+2m}=(7^{n_0}-3^{n_0})(7^{n_0}+3^{n_0})$. Ако је $7^{n_0}-3^{n_0}=2^{k_1}$ и $7^{n_0}+3^{n_0}=2^{k_2}$ (где је $k_1+k_2=2+2m$), онда, сабирањем ових једначина, добијамо $2\cdot 7^{n_0}=2^{k_1}+2^{k_2}=2^{k_1}(2^{k_2-k_1}+1)$, одакле је $k_1=1$, те је $7^{n_0}-3^{n_0}=2$, што је немогуће.

За $p\neq 2$, због парности, мора бити $m>0$. Надаље ћемо разматрати парност броја n. За непарно n је $7^{n-1}+7^{n-2}\cdot 3+\cdots+7\cdot 3^{n-2}+3^{n-1}$ непарно, па број mp мора бити једнак 2, што је немогуће. Ако је n парно, тада је $n=2n_0$, $n_0\in\mathbb{N}$ и важи $(7^{n_0}-3^{n_0})(7^{n_0}+3^{n_0})=p^2\cdot 2^{mp}$. Како је p прост број, разликоваћемо следеће случајеве:
1° $p\mid 7^{n_0}-3^{n_0}$ и $p\mid 7^{n_0}+3^{n_0}$: Тада $p\mid 2\cdot 3^{n_0}$, па је $p\in\{2,3\}$, што смо већ размотрили.
2° $p^2\mid 7^{n_0}-3^{n_0}$: Тада постоји $k\in\mathbb{N}_0$ такав да је $7^{n_0}-3^{n_0}=p^2\cdot 2^k$ и $7^{n_0}+3^{n_0}=2^{mp-k}$. Сабирањем ове две једначине добијамо $2\cdot 7^{n_0}=p^2\cdot 2^k+2^{mp-k}$, одакле је $k=1$ или

$mp-k=1$. За $mp-k=1$ је $7^{n_0}+3^{n_0}=2$, што је немогуће, а за $k=1$ имамо да 4 дели $7^{n_0}-3^{n_0}$, али не дели $p^2\cdot 2^k$, што је, такође, немогуће.
3° $p^2 \mid 7^{n_0}+3^{n_0}$: Тада постоји $k\in\mathbb{N}_0$ такав да је $7^{n_0}+3^{n_0}=p^2\cdot 2^k$ и $7^{n_0}-3^{n_0}=2^{mp-k}$. Сабирањем ове две једначине добијамо $2\cdot 7^{n_0}=p^2\cdot 2^k+2^{mp-k}$, одакле је $k=1$ или $mp-k=1$. За $mp-k=1$ је $7^{n_0}+3^{n_0}=2$, што је немогуће. Ако је $k=1$, онда је $7^{n_0}-3^{n_0}=2^{mp-1}$ и како важи $mp-1\geqslant 2$, слично као и у случају за $p=2$, закључујемо да је то једино могуће за $n_0=1$. Међутим, тада би морало да важи и да је $7+3=2\cdot p^2$, што није могуће.