Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Државно такмичење из математике ученика основних школа

13.05.2023.

VI разред

1. Реши једначину:

$$2023\cdot\frac{27\frac{2}{2023}-17\frac{1}{2023}}{20:0{,}01-1\frac{1}{3}x}=\frac{2{,}023:0{,}0001+1}{148}.$$

2. Конструиши троугао ABC чији је обим 14 cm, а мере два унутрашња угла $52°\,30'$ и $67°\,30'$.

3. Одреди све троцифрене природне бројеве који имају особину да ако им се било које две цифре замене са било које две произвољне цифре (преостала цифра броја остаје на свом месту) тако добијени троцифрени број није дељив са 113.

4. У једнакокраком троуглу ABC ($AC = BC$) мера угла при врху је 108°. Нека је E тачка пресека симетрале угла BAC и странице BC. Ако је дуж CD висина која одговара основици овог троугла, докажи да је $AE = 2CD$.

5. Нека су $n - 1$ и $n + 1$ прости бројеви и $n > 18$ ($n \in N$). Докажи да постоји барем 8 различитих природних бројева који су делиоци броја n.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI разред

1. $$2023\cdot\frac{27\frac{2}{2023}-17\frac{1}{2023}}{20:0{,}01-1\frac{1}{3}x}=\frac{2{,}023:0{,}0001+1}{148}.$$

$$2023\cdot\frac{10\frac{1}{2023}}{2000-1\frac{1}{3}x}=\frac{20230+1}{148}$$ [**6 бодова**]

$$\frac{2023\cdot\frac{20231}{2023}}{2000-1\frac{1}{3}x}=\frac{20231}{148}$$

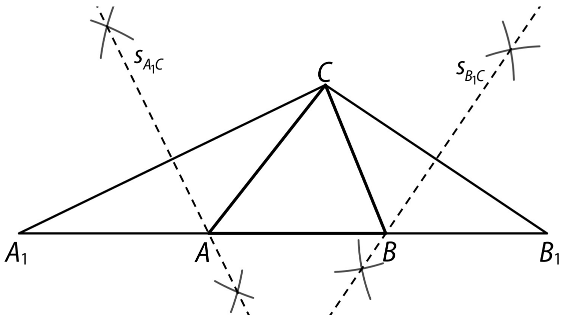
$$\frac{20231}{2000-1\frac{1}{3}x}=\frac{20231}{148}$$ [**6 бодова**]

$$2000-\frac{4}{3}x=148$$ [**4 бода**]

$$\frac{4}{3}x=2000-148$$

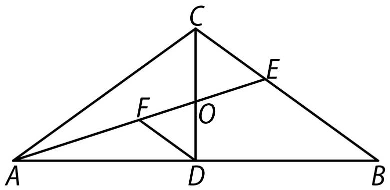
$$x=1389$$ [**4 бодова**]

2. Нека је дат троугао ABC у коме је $\measuredangle BAC = \alpha = 52°\,30'$ и $\measuredangle ABC = \beta = 67°\,30'$. Продужимо страницу AB преко тачке A до A_1 и преко тачке B до B_1 тако да је $AA_1 = AC$ и $BB_1 = BC$. Тада је дужина дужи A_1B_1 једнака обиму троугла ABC и једнака је 14 cm [**3 бода**]. Троуглови A_1AC и B_1BC су једнакокраки са основицама A_1C и B_1C и спољашњим угловима код темена при врху α и β, па је $\measuredangle AA_1C = \frac{1}{2}\alpha = 26°\,15'$ (четвртина угла од 105°) [**3 бода**]. Аналогно је и $\measuredangle BB_1C = \frac{1}{2}\beta = 33°\,45'$ (четвртина угла од 135°) [**3 бода**]. Темена A и B налазе се на симетралама страница A_1C и B_1C јер су троуглови A_1AC и B_1BC једнакокраки [**3 бода**]. Сада можемо конструисати троугао АВС:
- На произвољној правој p нанесемо растојање од 14 cm чиме смо одредили тачке A_1 и B_1;
- У тачки A_1 нанесемо угао од $26°\,15'$ [**2 бода**];
- У тачки B_1 нанесемо угао од $33°\,45'$ [**2 бода**];
- У пресеку кракова нанешених углова који су ван праве p налази се тачка C;
- У пресеку симетрале дужи A_1C и праве p добијамо теме A [**2 бода**];
- У пресеку симетрале дужи B_1C и праве p добијамо теме B [**2 бода**].



3. Сви троцифрени бројеви дељиви са 113 су: 113, 226, 339, 452, 565, 678, 791 и 904 [**2 бода**]. Код ових бројева на месној вредности стотина не појављује се само цифра 8 (цифру 0 не разматрамо пошто добијени број треба да буде троцифрен) [**2 бода**]. На месној вредности десетица се не појављују цифре 4 и 8 [**2 бода**], а на месној вредности јединица се не појављују цифре 0 и 7 [**2 бода**]. Тражени бројеви онда на свакој месној вредности морају имати баш цифре које се не појављују у бројевима дељивим са 113 јер заменом било које две цифре увек ће имати једну цифру која се не јавља код бројева дељивих са 113. Дакле, тражени бројеви су 840, 847, 880 и 887 [сваки тачно написан број **по 3 бода**. За сваки погрешно одређен број одузети по 2 бода. Укупан број бодова не може бити негативан].

4. Нека је $CD \cap AE = \{O\}$. Како је $\measuredangle ACB = 108°$, следи да је $\measuredangle ABC = \measuredangle CAB = 36°$, па је $\measuredangle CAE = 18°$. Одавде следи да је $\measuredangle AEC = 54°$. Како је висина CD и симетрала угла ACB, следи да је $\measuredangle OCE = 54°$, па је троугао OCE једнакокраки ($OC = OE$) [**5 бодова**]. Нека је дуж DF средња линија троугла ABE ($F \in AE$). Тада је $DF \parallel BE$, па је $\measuredangle ODF = \measuredangle OFD = 54°$. Следи да је и троугао OFD једнакокраки, па је $OF = OD$ [**5 бодова**]. Сада је $CD = OC + OD = OE + OF = EF$ [**5 бодова**]. Како је DF средња линија троугла ABE, тачка F је средиште странице AE, па је $AE = 2EF$. Дакле, $AE = 2CD$ [**5 бодова**].



5. Како је $n + 1$ прост већи од 19, то је он непаран, па је n паран број [**2 бода**]. Такође је један од три узастопна броја $n - 1$, n и $n + 1$ дељив са 3, па како су $n - 1$ и $n + 1$ прости већи од 3, то $3 \mid n$ [**3 бода**].

1) Ако n има још неки прост делилац p различит од 2 и 3, онда су неки од делиоца броја n и бројеви 1, 2, 3, 6, p, $2p$, $3p$ и $6p$, тј. n има бар 8 делилаца [**7 бодова**].

2) Ако n нема других делилаца осим 2 и 3, онда је $n = 2^a 3^b$, где су a и b природни бројеви [**1 бод**]. Број делилаца овог броја је $(a + 1)(b + 1)$ [**1 бод**]. Он је мањи од 8 само у случајевима $(a, b) \in \{(1, 1), (2, 1), (1, 2)\}$ [**4 бода**]. Но, у сва три случаја је $n \leq 18$ (у питању су бројеви 6, 12 и 18) [**2 бода**]. Дакле, и у овом случају n има бар 8 делилаца.

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Државно такмичење из математике ученика основних школа

13.05.2023.

VII разред

1. Израчунај вредност израза:

$$1-n+n^2-n^3+...+n^{98}-n^{99}+\frac{n^{100}}{1+n}$$

ако је $n = 1370$.

2. У скупу целих бројева реши једначину

$$x^2 - xy + 2x - 3y = 6.$$

3. Нека је дат скуп $M = \{1, 2, 3, ..., 2023\}$. Колико има трочланих подскупова скупа M код којих је један елемент једнак збиру друга два?

4. Најкраћа дијагонала правилног дванаестоугла $A_1A_2 \dots A_{12}$ је дужине $\sqrt{6-\sqrt{3}}$ cm. Израчунај површину петоугла $A_1A_4A_5A_6A_9$.

5. У четвороуглу $ABCD$ дијагонале AC и BD су међусобно нормалне и секу се у тачки S. Означимо са M, N, P и Q подножја нормала из тачке S на AB, BC, CD и DA, редом. Докажи да важи:

$$\frac{1}{SM^2}+\frac{1}{SP^2}=\frac{1}{SN^2}+\frac{1}{SQ^2}.$$

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VII разред

1. Сваки члан израза можемо записати као разломак чији је именилац $1 + n$. Како је

$$1=\frac{1+n}{1+n},\ n=\frac{n+n^2}{1+n},\ n^2=\frac{n^2+n^3}{1+n},\ ...,\ n^{99}=\frac{n^{99}+n^{100}}{1+n},$$

то је

$$1-n+n^2-n^3+...+n^{98}-n^{99}+\frac{n^{100}}{1+n}=$$

$$=\frac{1+n-n-n^2+n^2+n^3-n^3-n^4+...-n^{99}-n^{100}+n^{100}}{1+n}$$ [**10 бодова**].

Након скраћивања супротних монома закључујемо да је вредност израза $\frac{1}{1+n}$, тј. $\frac{1}{1371}$ [**10 бодова**].

2. Дата једначина је еквивалентна са $x^2 + 2x - 6 = xy + 3y$, тј.

$$x^2 + 2x - 6 = y(x + 3).$$

Како $x = -3$ није решење, добијамо да је

$$y=\frac{x^2+2x-6}{x+3}=x-1-\frac{3}{x+3}$$ [**6 бодова**].

Како $x, y \in \mathbb{Z}$, то $(x + 3) \mid 3$ [**2 бода**], па $x + 3 \in \{-3, -1, 1, 3\}$, тј. $x \in \{-6, -4, -2, 0\}$ [**по 2 бода** за свако тачно одређено x], па су решења $(x, y) \in \{(-6, -6), (-4, -2), (-2, -6), (0, -2)\}$ [**по 1 бод** за сваки тачно одређени пар].

3. Тражени трочлани подскупови датог скупа M су облика $\{a, b, a + b\}$. Без умањења општости можемо претпоставити да је

$$1 \le a < b < a + b \le 2023.$$

I начин. Следи да је $2a < a + b \le 2023$, односно $2a \le 2022$, дакле $a \in \{1, 2, 3, ..., 1010, 1011\}$ [**2 бода**]. За фиксирано a, b може да буде $a + 1, a + 2, ..., 2023 - a$, [**2 бода**] дакле за једно фиксирано a постоји $(2023 - a) - (a + 1) + 1 = 2023 - 2a$ различитих могућности за b [**5 бодова**].
Закључујемо да је укупан број тражених подскупова
$(2023 - 2 \cdot 1) + (2023 - 2 \cdot 2) + (2023 - 2 \cdot 3) + ... + (2023 - 2 \cdot 1011) =$ [**6 бодова**]
$= 1011 \cdot 2023 - 2 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 1011)$
$= 1011 \cdot 2023 - 1011 \cdot 1012 = 1011^2$ [**5 бодова**] $= 1022121$.

II начин. Како су најмање вредности за a и b једнаке 1 и 2, то важи да $a + b \in \{3, 4, 5, ..., 2022, 2023\}$, односно може да има 2021 различиту вредност [**2 бода**].

Ако је n непаран број, тада од бројева 1, 2, ..., $n - 1$ можемо направити $(n - 1) : 2$ парова различитих бројева чији је збир n [**1 бод**].

Слично, ако је n паран број, тада од бројева 1, 2, ..., $n - 1$ можемо направити $(n - 2) : 2$ парова различитих бројева чији је збир n [**1 бод**].

У оба случаја групишемо најмањи и највећи број низа, након тога најмањи и највећи од преосталих бројева, итд.

Посматрајући бројеве од 3 до 2023 закључујемо да:

- бројеве 3 и 4 можемо представити на 1 начин као збир два мања различита броја;
- бројеве 5 и 6 можемо представити на 2 начина као збир два мања различита броја;

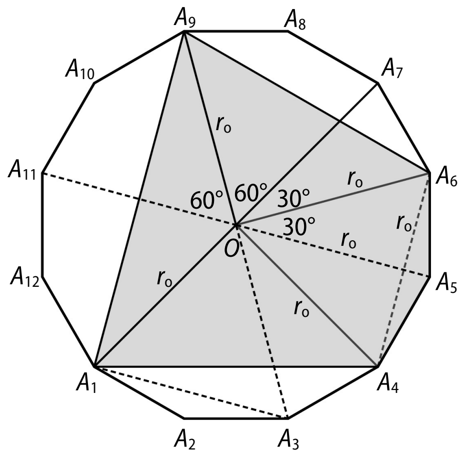
...

- бројеве 2021 и 2022 можемо представити на 1010 начина као збир два мања различита броја;
- број 2023 можемо представити на 1011 начина као збир два мања различита броја [**5 бодова** за све правилно изнете претходне закључке].

Дакле, укупан број тражених подскупова је:

$$2 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 1010) + 1011 \text{ [\textbf{6 бодова}]} = \\ = 1010 \cdot 1011 + 1011 \\ = 1011^2 \text{ [\textbf{5 бодова}]} = 1022121.$$

4. Нека је O центар описане кружнице дванаестоугла. Централни угао правилног дванаестоугла једнак је 30°. Троугао A_1OA_3 је једнакокрак, а како је његов угао при врху једнак 60°, то је дужина најкраће дијагонале (A_1A_3) једнака полупречнику описане кружнице r_o [**3 бода**].



Површина траженог петоугла једнака је збиру површина три троугла и једног делтоида тј.

$$P(A_1A_4A_5A_6A_9) = P(A_1A_4O) + P(A_4A_5A_6O) + P(A_6A_9O) + P(A_9A_1O) \text{ [\textbf{3 бода}]}.$$

Напомена. Због читљивости записа, са $P(ABC)$ означили смо површину многоугла чија су темена дата у загради.

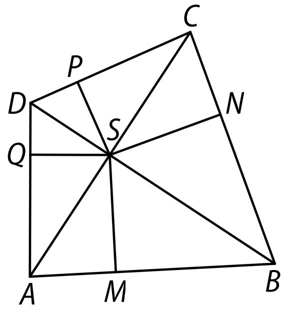
Троуглови A_1A_4O и A_6A_9O су подударни, једнакокраки правоугли троуглови чије су катете дужине r_o [**3 бода**]. Дијагонале делтоида $OA_4A_5A_6$ су такође дужина r_o [**3 бода**]. На крају, површина троугла A_9A_1O једнака је површини једнакостраничног троугла странице r_o [**3 бода**], па је тражена површина једнака:

$$2 \cdot \frac{r_o^2}{2} + \frac{r_o^2}{2} + \frac{r_o^2\sqrt{3}}{4} = r_o^2 \cdot \frac{6+\sqrt{3}}{4} = \left(\sqrt{6-\sqrt{3}} \text{ cm}\right)^2 \cdot \frac{6+\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{33}{4} \text{ cm}^2 = 8{,}25 \text{ cm}^2 \text{ [\textbf{5 бодова}]}.$$

5. Покажимо да у правоуглом троуглу чије су дужине катета a и b и дужина хипотенузине висине h, важи $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$. Ако са c означимо дужину хипотенузе, тада је $P = \frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$, тј. $ab = ch$. Сада је

$$\frac{1}{h^2} = \frac{c^2}{c^2h^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \text{ [\textbf{10 бодова}]}.$$



Примењујући ово тврђење на правоугле троуглове *SAB*, *SBC*, *SCD*, *SDA*, добијамо

$$\frac{1}{SM^2}+\frac{1}{SP^2}=\left(\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{SB^2}\right)+\left(\frac{1}{SC^2}+\frac{1}{SD^2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{SC^2}+\frac{1}{SB^2}\right)+\left(\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{SD^2}\right)=\frac{1}{SN^2}+\frac{1}{SQ^2}$$ [**10 бодова**].

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Државно такмичење из математике ученика основних школа

13.05.2023.

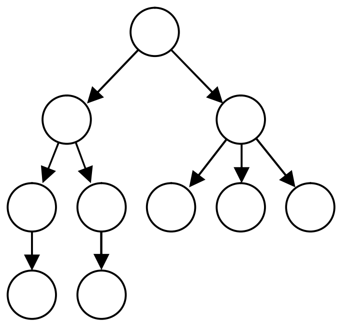
VIII разред

1. За које реалне бројеве x је вредност израза
$$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+2023$$
минимална? Одреди тај минимум.

2. Одреди остатак при дељењу броја $2^{223}+2022^{2023}$ са 7.

3. Нека је дата коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ чија је страница дужине 1cm. Нека је P тачка на просторној дијагонали AC_1 таква да је $BP \perp AC_1$. Израчунај површину и запремину пирамиде $ABCDP$.

4. На колико начина можеш распоредити бројеве из скупа $S = \{1, 2, ..., 10\}$ у кругове (сваки број распоређујеш у један круг), тако да стрелице показују од већег ка мањем броју?



5. На пречнику AB круга одабрана је произвољна тачка C. Тачке P и Q на датој кружници, са исте стране пречника AB, одабране су тако да је $\measuredangle ACP = \measuredangle PCQ = \measuredangle QCB = 60°$. Докажи да дужина тетиве PQ не зависи од одабира тачке C на пречнику.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

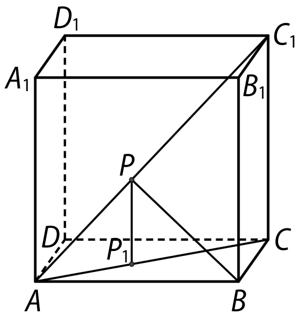
VIII разред

1. Дати израз средићемо тако што ћемо помножити прву и четврту, као и другу и трећу заграду:
$$\begin{aligned}&(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+2023 =\\ &= (x^2-7x+6)(x^2-7x+12)+2023 \text{ [\textbf{5 бодова}]}\\ &= (x^2-7x+6)(x^2-7x+6+6)+2023\\ &= (x^2-7x+6)(x^2-7x+6)+6\cdot(x^2-7x+6)+2023\\ &= (x^2-7x+6)(x^2-7x+6)+6\cdot(x^2-7x+6)+9+2014\\ &= ((x^2-7x+6)+3)^2+2014\\ &= (x^2-7x+9)^2+2014 \quad \text{[\textbf{5 бодова}]}\\ &\geq 2014 \text{ [\textbf{2 бода}]}\end{aligned}$$
јер је $(x^2-7x+9)^2 \geq 0$. Даље, приметимо да једначина $x^2-7x+9=0$ има два реална решења:
$$x^2-7x+9 = x^2-2\cdot\frac{7}{2}x+\frac{49}{4}-\frac{49}{4}+9 = \left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$$
$$=\left(x-\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)=0 \quad \text{[\textbf{5 бодова}]}$$
за $x_1=\frac{7+\sqrt{13}}{2}$ [**1 бод**] и $x_2=\frac{7-\sqrt{13}}{2}$ [**1 бод**], одакле следи да је минимум израза једнак 2014 [**1 бод**] и достиже се у тачкама x_1 и x_2.

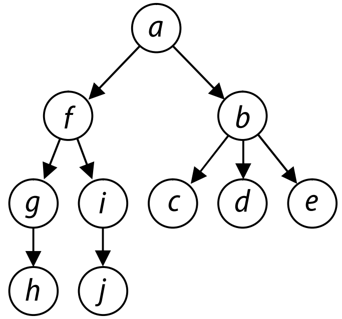
2. Приметимо да је $2^3 \equiv 1 \pmod 7$ [**4 бода**]. Тада је $2^{222} = (2^3)^{74} \equiv 1^{74} \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7$ [**3 бода**], па је $2^{223} = 2^{222}\cdot 2 \equiv 1\cdot 2 \pmod 7 \equiv 2 \pmod 7$ [**3 бода**]. Даље је $2022 \equiv -1 \pmod 7$ [**4 бода**], па како је 2023 непаран број, то је $2022^{2023} \equiv (-1)^{2023} \pmod 7$ $2022 \equiv -1 \pmod 7$ [**3 бода**]. Коначно је $2^{223}+2022^{2023} \equiv 2+(-1) \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7$, тј. тражени остатак је 1 [**3 бода**].

3. Приметимо да је троугао ABC_1 правоугли са страницама $AB = 1$ cm, $BC_1 = \sqrt{2}$ cm и $AC_1 = \sqrt{3}$ cm. BP је висина у том троуглу, па је $BP=\frac{\sqrt{6}}{3}$ cm [**1 бод**]. Из Питагорине теореме је $AP=\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm [**1 бод**]. Нека је P_1 пројекција тачке P на основу $ABCD$. Тада $P_1 \in AC$, јер се AC_1 пројектује на AC. Даље је $\Delta AP_1P \sim \Delta ACC_1$, па је $\frac{AP}{AC_1}=\frac{PP_1}{CC_1}=\frac{AP_1}{AC}$ [**1**

бод]. Одатле је $PP_1 = \frac{1}{3}$ cm [**2 бода**] и $AP_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$ cm [**1 бод**]. Самим тим, добили смо висину пирамиде (PP_1), па је $V_{ABCDP} = \frac{1}{9}$ cm^3 [**2 бода**]. Приметимо да је $\Delta AP_1B \cong \Delta AP_1D$ по ставу СУС ($AB = AD$, $AP_1 = AP_1$, $\measuredangle BAP_1 = \measuredangle DAP_1 = 45°$). Одатле је $BP_1 = DP_1$ [**2 бода**]. По ставу СУС је $\Delta BP_1P \cong \Delta DP_1P$ ($BP_1 = DP_1$, $PP_1 = PP_1$, $\measuredangle BP_1P = \measuredangle DP_1P = 90°$). Самим тим је $BP = DP$ [**2 бода**]. Одатле су подударни и правоугли троуглови ABP и ADP по ставу ССС, па је $P_{ABP} = P_{ADP} = \frac{\sqrt{2}}{6}$ cm^2 [**2 бода**]. Даље је $\Delta BCP \cong \Delta DCP$ по ставу ССС. Како је $CP_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ cm, то је $CP = \sqrt{CP_1^2 + PP_1^2} = 1$ cm [**2 бода**]. Дакле, троуглови BCP и DCP су једнакокраки са страницама $\frac{\sqrt{6}}{3}$ cm, 1 cm, 1 cm, па је њихова површина $\frac{\sqrt{5}}{6}$ cm^2 [**2 бода**]. Површина пирамиде $ABCDP$ је $P = \frac{1}{3}\cdot(3+\sqrt{2}+\sqrt{5})$ cm^2 [**2 бода**].



4. Означимо кругове у којима распоређујемо бројеве као на слици. У круг a мора бити распоређен највећи број (10) [**2 бода**]. Четири броја која ћемо распоредити у кругове b, c, d и e можемо одабрати на $\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 126$ начина [**6 бодова**]. Тиме добијамо и бројеве које распоређујемо у кругове f, g, h, i, j. У круг b мора бити распоређен највећи од 4 изабрана броја. Преостала 3 броја у круговима c, d и e можемо распоредити на 6 начина [**4 бода**]. Од 5 бројева које распоређујемо у кругове f, g, h, i, j, у круг f уписујемо највећи од њих. Од преостала 4 круга g, h, i, j, бројеве које ћемо распоредити у кругове g и h можемо одабрати на 6 начина [**4 бода**], чиме смо изабрали и бројеве које распоређујемо у круговима i и j. Распоред та четири броја је једнозначно одређен. Већи од бројева које распоређујемо у кругове g и h се уписује у круг g, а мањи у круг h. Слично, већи од бројева које распоређујемо у кругове i и j се распоређује у круг i, а мањи у круг j. Коначно, укупан број тражених начина је $126 \cdot 6 \cdot 6 = 4536$ [**4 бодова**].



5. Означимо са Q' тачку на кружници симетричну тачки Q у односу на пречник AB. Из особина симетрије важи да је $\measuredangle BCQ' = \measuredangle BCQ = 60°$. Из једнакости $\measuredangle BCQ' = \measuredangle ACP = 60°$, закључујемо да су тачке P, C, и Q' колинеарне [**8 бодова**]. Троугао CQQ' је једнакокраки, са углом при врху $\measuredangle QCQ' = 120°$, па је периферијски угао над тетивом PQ једнак $\measuredangle PQ'Q = \measuredangle CQ'Q = 30°$ [**4 бода**]. Тада је централни угао над тетивом PQ једнак $\measuredangle POQ = 60°$ (са O смо означили центар датог круга), па је троугао OPQ једнакостраничан, а самим тим и дужина тетиве PQ је једнака полупречнику круга [**8 бодова**], чиме смо показали да од одабира тачке C не зависи дужина тетиве PQ.