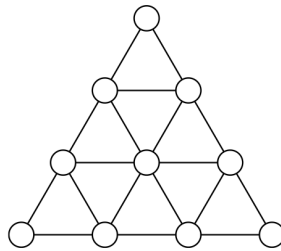


**17. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА  
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА**

**Београд, 28.5.2023.**

1. У једнакокраком троуглу  $ABC$  ( $AC = BC$ ) конструисана је симетрала  $BD$  ( $D \in AC$ ) унутрашњег угла код темена  $B$ . Права нормална на  $BD$ , која садржи центар  $O$  описане кружнице троугла  $ABC$ , сече страницу  $BC$  у тачки  $E$ . Права која садржи тачку  $E$ , паралелна са  $BD$ , сече страницу  $AC$  у тачки  $F$ . Доказати да важи  $CE = DF$ .
2. У десет кружића са слике уписани су природни бројеви од 1 до 10. Затим је у сваком од девет малих троуглова чија су темена ти кружићи уписан збир бројева у њиховим теменима. Одредити највећи могући природан број  $n$  тако да, при произвољном распореду бројева, увек постоје три троугла таква да збир три броја који су уписани унутар њих износи бар  $n$ .



3. Нека су  $a, b, c$  реални бројеви који припадају сегменту  $[0, 1]$  и задовољавају услов  $ab + bc + ca = 1$ . Одредити најмању и највећу могућу вредност израза  $a^3 + b^3 + c^3$ .
4. Одредити све уређене тројке  $(k, m, n)$  природних бројева, при чему је  $m$  прост, за које важе следећи услови:
  - (1)  $kn$  је квадрат природног броја;
  - (2)  $\frac{k(k-1)}{2} + n$  је четврти степен простог броја;
  - (3)  $k - m^2 = p$ , где је  $p$  прост број;
  - (4)  $\frac{n+2}{m^2} = p^4$ .

Време за рад 240 минута.  
Сваки задатак вреди 10 поена.