17. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

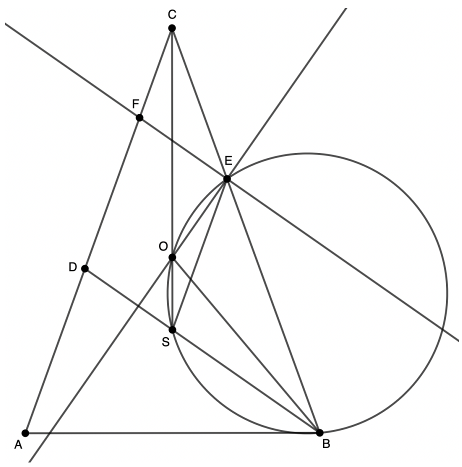
Београд, 28.5.2023.

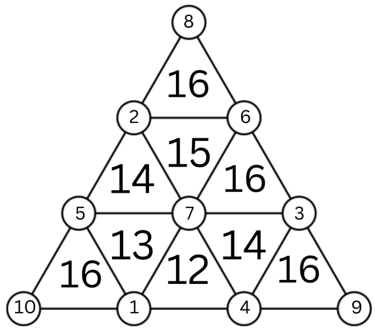
Решења задатака

1. Означимо центар уписане кружнице датог једнакокраког троугла са S (пресек симетрала BD и CO унутрашњих углова код темена B и C) и нека је $\measuredangle ABD = \measuredangle CBD = \varphi$. Из услова $OE \perp BD$ лако добијамо да важи $\measuredangle COE = \varphi$, па је четвороугао $BEOS$ тетиван. Из једнакости периферијских углова над тетивом BE овог круга добијамо $\measuredangle BSE = \measuredangle BOE$. Међутим, како је $\measuredangle BOC = 4\varphi$, као централни угао над тетивом BC описаног круга троугла ABC, следи да је $\measuredangle BOE = 3\varphi$, па је и $\measuredangle BSE = 3\varphi$. Из једнакости $\measuredangle BDC = 3\varphi$ (спољашњи угао троугла ABD) сада лако следи $SE \parallel DF$, па због услова задатка $EF \parallel BD$, закључујемо да је четвороугао $EFDS$ паралелограм, тј. $DF = SE$. Међутим, из доказане тетивности следи и да је

$$\measuredangle ESO = \measuredangle EBO = \measuredangle OCE = 90^\circ - 2\varphi,$$

па је троугао CSE једнакокрак и важи $SE = CE$. Дакле, важи $DF = SE = CE$, чиме је доказ завршен.





2. Пример на слици показује да важи $n \leqslant 48$ (највећи збир у једном троуглу је 16). Доказаћемо да је тражено $n = 48$, тј. да при произвољном распореду постоје три троугла таква да је збир бројева уписаних у њих бар 48. Нека је у централно поље уписан број c. Уколико је $c \leqslant 7$, посматрајмо три угаона троугла. У њима је збир једнак

$$1 + 2 + \cdots + 10 - c = 55 - c \geqslant 48$$

(у тих 9 поља се само централно не појављује). Ако је $c \geqslant 9$, одаберимо три троугла која садрже централно поље као теме и немају заједничких страница. Збир у њима је бар

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 3 \cdot c \geqslant 21 + 27 = 48.$$

Остало је још да испитамо случај $c = 8$. Збир бројева у три угаона троугла је онда $55 - 8 = 47$. У бар једном од угаоних поља је број мањи од 8. Посматрајмо уместо угаоног троугла чије је једно од темена баш то које је мање од 8, троугао чије је једно теме централно а преостала два остају непромењена у односу на тај угаони. Он, заједно са преостала два угаона, даје избор у коме је збир строго већи од 47, дакле већи или једнак од тражених 48. Тиме смо доказали да је тражени број $n = 48$.

Напомена. Постоје и друга решења. Нумеришимо троуглове редом бројевима $1, \ldots, 9$, тако да су угаони троуглови означени бројевима $1, 5, 9$. Претпоставимо супротно, да за свака три троугла важи да је збир три броја уписана унутар њих највише 47. Ако применимо ово на троуглове $(1, 5, 9)$, добијамо да за број x уписан у централни кружић важи $55 - x \leqslant 4$, тј. $x \geqslant 8$. Слично, посматрајући троуглове $(1, 5, 8)$, $(1, 6, 9)$, $(3, 5, 9)$, добијамо да за бројеве y, z, t уписане у кружиће у теменима великог троугла такође важи $y, z, t \geqslant 8$. Међутим, бројеви x, y, z, t су различити, па не могу сви припадати скупу $\{8, 9, 10\}$. Контрадикција!

3. На основу неједнакости између кубне и квадратне средине, добијамо

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}} \geqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Такође, добро је позната неједнакост

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca,$$

па комбинацијом ове две неједнакости и услова датог у задатку, добијамо

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Како се у свим коришћеним неједнакостима једнакост постиже за $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, то је најмања могућа вредност израза $a^3+b^3+c^3$, при датим условима, заиста $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

С друге стране, како је због услова задатка очигледно задовољено $(a-1)(b-1) \geqslant 0$, добијамо

$$a+b \leqslant ab+1.$$

Слично важи и $b+c \leqslant bc+1$ и $a+c \leqslant ac+1$. Такође, тривијално важи и $a^3 \leqslant a$, $b^3 \leqslant b$, $c^3 \leqslant c$, па је

$$a^3+b^3+c^3 \leqslant a+b+c \leqslant \frac{1}{2}(ab+bc+ca+3) = 2.$$

Једнакост се постиже истовремено у свим коришћеним неједнакостима, при датим условима, ако и само ако су тачно два од бројева a, b, c једнака 1, а трећи од њих једнак 0, тј.

$$(a,b,c) \in \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}.$$

Према томе, тражена највећа могућа вредност израза $a^3+b^3+c^3$ износи 2.

4. Очигледно је да $m=p=2$ није решење. Уколико је $m=2$, $p>2$ или $m>2$, $p=2$, из трећег услова имамо да је k непаран, а из четвртог да је $n \equiv 2 \pmod 4$, па kn не може бити потпун квадрат. Према томе, важи да је $m>2$ и $p>2$, па је k паран, а n непаран.

Нека је највећи заједнички делилац бројева k и n једнак d и $k=dk_1$, $n=dn_1$, при чему су k_1 и n_1 узајамно прости. Из првог услова следи да је k_1n_1 такође потпун квадрат, што сада додатно повлачи да су оба броја k_1 и n_1 потпуни квадрати. Како d дели број $q^4 = \dfrac{k(k-1)}{2}+n$, то је $d \in \{1, q, q^2, q^3\}$. Случајеви $d=1$ и $d=q^2$ отпадају јер је тада n потпун квадрат, а због четвртог услова је и $n+2$ потпун квадрат, што је очигледно немогуће. Такође, за $d=q^3$ добијамо

$$q^4 > \frac{k(k-1)}{2} \geqslant \frac{q^3(q^3-1)}{2},$$

што је немогуће за $q \geqslant 2$. Према томе, остаје као једина могућност $d=q$ и $k=qk_2^2$, $n=qn_2^2$, за узајамно просте бројеве k_2 и n_2.

Ако су m и p оба различита од 3, тада из четвртог услова добијамо да је $n \equiv 2 \pmod 3$. Како је увек задовољено

$$\frac{k(k-1)}{2} \equiv \begin{cases} 0, & k \equiv 0,1 \pmod 3, \\ 1, & k \equiv 2 \pmod 3, \end{cases}$$

из другог услова сада добијамо да је $q^4 \equiv 0,2 \pmod 3$, па је једина опција $q=3$. Међутим, ово је немогуће јер $q \mid n$, а $n \equiv 2 \pmod 3$. Самим тим је бар један од бројева m, p једнак 3.

Лако се проверава да случај $m=p=3$ није могућ. Ако је $m=3$, добијамо да је $n=9p^4-2$ и $k=p+9$. Међутим, важи

$$(3p^2)^2 = 9p^4 < 9p^4 + \frac{(p+9)(p+8)}{2} - 2 < 9p^4+6p^2+1 = (3p^2+1)^2,$$

при чему се друга неједнакост своди на $11p^2 - 17p - 66 > 0$ и лако се проверава да важи за све $p \geqslant 5$. Дакле, број q^4 налази се између два узастопна квадрата, па не може бити потпун квадрат.

Ако је $p = 3$, имамо $k = m^2 + 3$, $n = 81m^2 - 2$. Како $q \mid k$ и $q \mid n$, то важи

$$q \mid 81(m^2 + 3) - (81m^2 - 2) = 245 = 5 \cdot 7^2,$$

па је $q = 5$ или $q = 7$. Случај $q = 5$ је немогућ јер број $m^2 + 3$ никада није дељив са 5. Према томе, важи $q = 7$, па је k облика $28t^2$ и задовољава неједнакост $\frac{k(k-1)}{2} < 7^4$, одакле је $k < 70$. Једина могућност је $t = 1$ и $k = 28$, па је $m = 5$, $n = 2023$. Ови бројеви заиста задовољавају сва четири дата услова, па представљају једино решење задатка:

$$(k, m, n) = (28, 5, 2023).$$

Напомена. Неки од корака у приказаном решењу могу се заменити следећим разматрањем. Наиме, како је $q^4 \equiv 0, 1 \pmod 5$, последња цифра броја q^4 је 5 (уколико је $q = 5$) или 1 (у свим осталим случајевима). Докажимо да је бар један од простих бројева m, p једнак 5.

Ако је $q \neq 5$, последња цифра производа $k(k-1)$ је $0, 2$ или 6, па из једнакости $q^4 = \frac{k(k-1)}{2} + n$ и чињенице да је n непаран, добијамо да се n завршава цифрама $1, 3$ или 5. То значи да се $n + 2$ завршава цифрама $3, 5$ или 7. Међутим, из четвртог услова је $n + 2$ потпун квадрат, па је једина могућност да се $n + 2$ завршава цифром 5, што значи да је тада $m = 5$ или $p = 5$.

Ако је $q = 5$, тада из $k = 20l^2$ и $\frac{k(k-1)}{2} < 5^4$ (тј. $k < 36$) добијамо да мора бити $l = 1$, $k = 20$. Провером се добија да ово не даје решење.