Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

22. април 2023.

Први разред - Б категорија

1. На табли су записани бројеви

$$1 \cdot \sqrt{2022}\,,\ 2 \cdot \sqrt{2021}\,,\ 3 \cdot \sqrt{2020}\,,\ \dots\,,\ 2020 \cdot \sqrt{3}\,,\ 2021 \cdot \sqrt{2}\,,\ 2022 \cdot \sqrt{1}\,.$$

Који од записаних бројева је највећи?

2. Да ли постоји цифра a таква да је број $\overline{20\underbrace{aa...aa}_{2020}21}$ квадрат природног броја?

3. На страници EF правилног шестоугла $ABCDEF$ уочена је произвољна тачка X. Нека је AXY једнакостраничан троугао, при чему су тачке Y и F са различитих страна праве AX и BYZ једнакостраничан троугао, при чему су тачке Z и C са различитих страна праве BY. Доказати да се тачка Z налази на дужи AO, где је O центар описане кружнице шестоугла $ABCDEF$.

4. Милица зна да шифра на коферу њеног брата представља троцифрени број коме су све цифре у строго опадајућем редоследу. Ако је познато да ће Милица, приликом покушаја отварања братовљевог кофера, тестирати само различите цифре, јер је паметна, колико највише проба Милица мора учинити да би са сигурношћу отворила братовљев кофер?

5. Одредити све $x \in \mathbb{R}$ такве да је

$$|x - x^2| = 2|x^2 - x^3| = 3|x^3 - x^6| = 6|x^6 - x|.$$

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

22. април 2023.

Други разред - Б категорија

1. Нека је $p > 2$ прост број и нека су x_1 и x_2 решења једначине $x^2 - px + \dfrac{1}{3} = 0$. Доказати да је ${x_1}^3 + {x_2}^3$ природан број дељив са 24.

2. Да ли постоји цифра a таква да је број $\overline{20\underbrace{aa...aa}_{2022}21}$ куб природног броја?

3. Дат је троугао ABC и нека су на његовим страницама BC, CA и AB дате, редом, тачке D, E и F такве да се праве AD, BE и CF секу у једној тачки. Означимо ту пресечну тачку са X.
(а) Доказати да се кружнице описане око троуглова AFE, BDF и CED секу у једној тачки, коју ћемо означити са Y;
(б) Доказати да је $X = Y$ ако и само ако су праве AD, BE и CF висине троугла ABC.

4. Познато је да квадратна једначина $x^2+ax+b = 0$ има два реална и различита решења. Колико различитих реалних решења има једначина

$$x^4 + ax^3 + (b-2)x^2 - ax + 1 = 0\,?$$

5. Након што је оставио отворен прозор, током неког времена, $\frac{n(n+1)}{2}+1$ мува је улетела у Милорадову собу и одомаћила се на његовом ноћном сточићу, чија је површина облика једнакостраничног троугла странице $n \in \mathbb{N}$. Ипак, Милорад поседује мухарицу, чији врх има облик квадрата странице 1, и помоћу ње жели да се реши неочекиваних уљеза. Претпоставимо ли да је Милорад довољно брз и прецизан, те да може да зада ударац мухарицом на било ком делу сточића и у тренутку у коме то жели, као и да су муве занемарљиво малих димензија, доказати да је Милорад у стању да, без обзира на њихов распоред на сточићу, уклони барем две муве једним ударцем.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

22. април 2023.

Трећи разред - Б категорија

1. Нека су x и y оштри углови за које важи $\sin x = \frac{3}{5}$ и $\operatorname{tg} y = 5\sqrt{2} - 7$. Доказати да је $\frac{\pi - 4x}{4y}$ природан број.

2. На ивицама SA, SB и SC пирамиде $SABC$ уочене су, редом, тачке A', B' и C' такве да је
$$\frac{SA'}{SA} + \frac{SB'}{SB} + \frac{SC'}{SC} = 1.$$
Доказати да је запремина пирамиде $SA'B'C'$ барем 27 пута мања од запремине пирамиде $SABC$.

3. Одредити све вредности реалног параметра a за које једначина
$$\log_{ax}\left(3^x + 4^x\right) = \log_{(ax)^2}\left(7^2\left(4^x - 3^x\right)\right) + \log_{(ax)^3} 8^{x-1}$$
има барем једно решење у скупу реалних бројева.

4. Дато је 12 тачака на кружници.
(а) На колико начина се могу изабрати две тетиве, са крајевима у датим тачкама, које имају тачно једну заједничку тачку?
(б) На колико начина се може изабрати троугао од тих тачака тако да се са обе стране сваке праве на којој лежи нека његова страница налази барем једна од преосталих тачака?

5. Милисав је замислио неки природан број n, те је на табли заaписао све делиоце тог броја који нису већи од $\sqrt{n}$. Алекса је уочио записане бројеве на табли и рекао да може да каже Милисаву коначан скуп неких бројева, такав да је број n, који је Милисав на почетку замислио, сигурно међу њима. Доказати да Алекса може да испуни свој циљ ако и само ако бројеви које је Милисав записао на табли не представљају скуп свих делилаца неког одређеног природног броја.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

22. април 2023.

Четврти разред - Б категорија

1. Дат је низ $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ са: $a_1 = 0$ и $a_{n+1} = a_n + 4n + 3$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Изразити a_n у функцији од n, а затим, одредити и граничну вредност

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{4n}} + \sqrt{a_{4^2n}} + \cdots + \sqrt{a_{4^{2022}n}}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{2n}} + \sqrt{a_{2^2n}} + \cdots + \sqrt{a_{2^{2022}n}}}.$$

2. У унутрашњости сфере уочена је тачка O. Кроз тачку O конструсане су три праве p, q и r. Права p продире сферу у тачкама A и B, права q у тачкама C и D, а права r продире сферу у тачкама E и F. Испоставило се да важи:

$$\{OA, OB, OC, OD, OE, OF\} \supset \{1, 5, 15, 17, 51\}.$$

Колико најмање може бити полупречник сфере?

3. Решити систем једначина у скупу природних бројева

$$\begin{aligned} ab + 2a - b &= 58 \\ bc + 4b + 2c &= 300 \\ cd - 6c + 4d &= 101. \end{aligned}$$

4. Путнички део авиона се састоји из n редова од по 6 седишта и пролаза који иде по средини сваког реда. Притом се у сваком тренутку највише један путник може налазити на неком седишту, највише један путник се може налазити у пролазу у линији с неким редом седишта и не може се налазити ни на једном другом месту. Сваки од $6n$ путника има карту с јединственим бројем седишта. Путници улазе највише један сваке секунде у авион тако да је прва позиција на коју закораче увек она у пролазу у линији првог реда, и притом им је за прелазак с једне на другу позицију потребна тачно 1 секунда (где су могући прелази између суседних позиција у реду и суседних позиција у пролазу међу седиштима). Које је при овим условима минимално време потребно да свих $6n$ путника седну на своје место?

5. Наћи све уређене тројке (n, m, p), где су n и m цели, а p је прост број, за које важи

$$7^n - 3^n = p^2 \cdot 2^{mp}.$$

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.