

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

17. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

1. април 2023. године

Први дан

1. Нека је O средиште описане кружнице разностраног троугла ABC и H његов орто-центар, $H \notin \{A, B, C\}$. Означимо са O_a , O_b и O_c , редом, средишта описаних кружница троуглова AON , BOH и COH . Доказати да се праве AO_a , BO_b и CO_c секу у једној тачки.

2. Дата је коцка ивице 2021. На колико различитих начина је могуће на ободу ове коцке додати једну јединичну коцкицу тако да се новодобијено тело може попунити телима димензије $1 \times 1 \times k$, за неки природан број k , $k \geq 2$?

3. Претпоставимо да су дати природни бројеви m и n , као и низ целих бројева a_1, a_2, \dots , за који важи $a_i = a_{i-n}$, за свако i , $i \in \mathbb{N}$, $i > n$. За сваки природан број j , $1 \leq j \leq n$, дефинишемо l_j као најмањи природан број такав да је број $a_j + a_{j+1} + \dots + a_{j+l_j-1}$ дељив са m . Доказати да је

$$l_1 + l_2 + \dots + l_n \leq mn.$$

Предвиђено време за израду задатака је 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 бодова.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

17. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

2. април 2023. године

Други дан

4. Нека је q прост број, а n природан број. Доказати да $n^q + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ није потпун степен броја q .

5. Тата Зоран је усхићено рекао своме сину Перици да је пронашао занимљиву функцију $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ која испуњава следеће особине:

- $f(m) = m$, за све целобројне m ;
- $f\left(\frac{a+b}{c+d}\right) = \frac{f\left(\frac{a}{c}\right) + f\left(\frac{b}{d}\right)}{2}$, за свака четири цела броја a, b, c, d таква да је $|ad - bc| = 1$, $c > 0$ и $d > 0$;
- f је монотono растућа.

(а) Доказати да је Зоран пронашао јединствену функцију са наведеним особинама.

(б) Ако је Перица израчунао вредност $f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, који број је добио?

6. Дат је троугао ABC , $AB \neq AC$, са описаном кружницом ω . Означимо са I средиште уписане кружнице тог троугла. Нормала конструисана из тачке I на праву AI сече странице AB и AC у тачкама E и F , редом. Описана кружница троугла AEF сече ω и праву AI у тачкама G и H , редом. Тачка D је подножје нормале из тачке I на праву BC . Тангента на ω у тачки G сече праву BC у тачки J , а права AJ сече описану кружницу троугла ABC по други пут у тачки K . Доказати да се кружнице описане око троуглова DJK и GIN додирују.

Предвиђено време за израду задатака је 270 минута.

Сваки задатак вреди 7 бодова.

Решења задатака детаљно образложити.