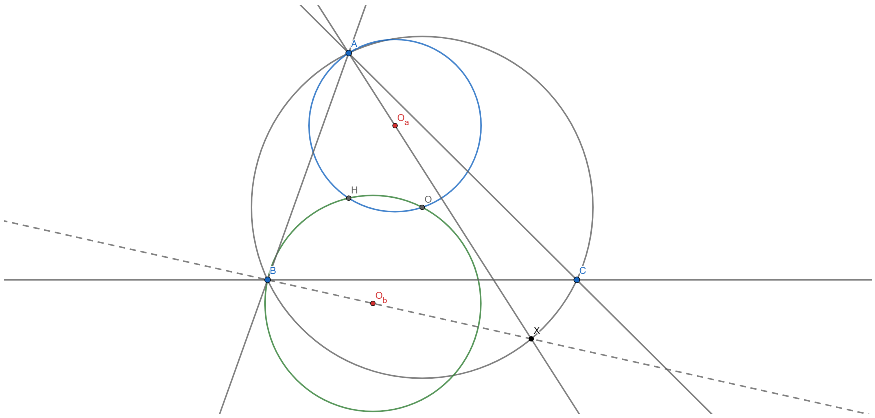
Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - СМО

Први дан



1. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Нека је $X = AO_a \cap BO_b$. Докажимо да и права CO_c садржи тачку X. Стога, довољно је доказати да тачка X припада кружници описаној око троугла ABC. Имамо да важи:

$$\sphericalangle BXA = \sphericalangle 180 - \sphericalangle O_bBA - \sphericalangle O_aAB =$$

$$180 - \sphericalangle HBA - \sphericalangle O_bBH - \sphericalangle HAB - \sphericalangle HAO_a =$$

$$= \sphericalangle BHA - 180 + \sphericalangle \frac{BO_bH}{2} + \sphericalangle \frac{AO_aH}{2} =$$

$$= \sphericalangle BHA - 180 + \sphericalangle BOH + \sphericalangle AOH = \sphericalangle BHA - 180 + \sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB,$$

те је тиме је тврђење доказано.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Нека су ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c нормале из A, B и C, редом, на OH. Приметимо да су праве ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c паралелне, односно да су конкурентне у тачки у бесконачности. Такође, знамо да су ℓ_a и AO_a симетричне у односу на симетралу угла $\measuredangle OAH$, што је уједно и симетрала угла $\measuredangle BAC$, односно ℓ_a и AO_a су изогоналне у односу на $\measuredangle BAC$. Исто се може закључити за ℓ_b и BO_b, као и за ℓ_c и CO_c. Међутим, како су праве ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c конкуретнте (у бесконачној тачки), онда су конкуренте и AO_a, BO_b и CO_c у тачки изогонално спрегнутој бесконачној тачки пресека (изогоналне тачке тачака у бесконачности свкако леже на описаној кружници).

(ТРЕЋЕ РЕШЕЊЕ) Доказ ћемо спровести комплексним бројевима. Комплексну координате произвољне тачке $W \in \mathbb{C}$ ћемо означити одговарајућим малим словом, односно w. Без умањења општости нека је описана кружница ABC јединична. Нека је X тачка дијаметрално супротно A на описаној кружници око AOH. Јасно је да је $XH||BC$ и да је $OX \perp AO$. Записивањем ово на језику комплексних бројева, знамо да је $\frac{x}{\overline{x}} = -\frac{a}{\overline{a}} = -a^2$ и $\frac{x-h}{\overline{x}-\overline{h}} = \frac{b-c}{\overline{b}-\overline{c}} = -bc$. Одатле изводимо $\overline{x} = -\frac{x}{a^2}$. Затим, користећи $h = a+b+c$, изводимо $x - a - b - c = \frac{xbc}{a^2} + \frac{ab+bc+ca}{a}$, а сређивањем налазимо $x = \frac{2a^2b+2a^2c+a^3+abc}{a^2-bc}$.

Најзад, ако AX сече кружницу ABC у T, онда је $-at = \frac{a-t}{\overline{a-t}} = \frac{x-a}{\overline{x-a}}$. Приступамо рачуну $x-a = 2a\frac{ab+bc+ca}{a^2-bc}$, па је онда

$$t = -\frac{1}{a}\frac{x-a}{\overline{x-a}} = -\frac{1}{a}\frac{2a\frac{ab+bc+ca}{a^2-bc}}{\frac{2}{a}\frac{\frac{a+b+c}{abc}}{\frac{bc-a^2}{a^2bc}}} = \frac{ab+bc+ca}{a+b+c}.$$

Како је ово симетрично по a, b, c, јасно видимо да се праве AO_a, BO_b и CO_c секу у тачки T.

Аутор задатка: Урош Цоловић

2. Нека је за неко k и неку додату коцкицу могуће попуњавање. У сваку јединичну коцкицу са координатама (x, y, z), $0 \leqslant x, y, z \leqslant 2020$, упишимо број ε^{x+y+z}, где је $\varepsilon = e^{i\frac{2\pi}{k}}$. На идентичан начин, у додату јединичну коцкицу (a, b, c), упишимо број ε^{a+b+c}. Како год поставимо квадар $1 \times 1 \times k$, збир бројева у пољима која он прекрива једнак је нули. Нека је $2021 = qk + r$, $0 < r < k$. Збир свих придружених бројева једнак је

$$0 = (1 + \varepsilon + ... + \varepsilon^{2020})^3 + \varepsilon^{a+b+c} = (1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + ... + \varepsilon^{r-1})^3 + \varepsilon^{a+b+c}. \tag{1}$$

Одавде је $|1+\varepsilon+\varepsilon^2+...+\varepsilon^{r-1})|^3 = |-\varepsilon^{a+b+c}|$, те је $|\frac{1-\varepsilon^r}{1-\varepsilon}| = 1$, односно бројеви ε и ε^r су на једнаком растојању од броја 1. Зато је $r = k-1$ или је $r = 1$. Ако је $r = 1$, онда је $k = 2$, па је и тада обавезно $r = k-1$. Дакле, ако су за неко k испуњени услови, онда $k \mid 2022$ и због (1) важи $a+b+c \equiv_k 3(k-1)$. Без умањења општости можемо узети да је додата коцкица $(a, b, -1)$. Сада имамо $k \mid a+b+2$. Због симетрије проблема додата коцкица може бити и коцкица $(2020-a, b, -1)$, те $k \mid (2020-a+b+2)$. Ако за неко сложено k постоји решење, онда постоји и за било који његов делилац. Зато можемо претпоставити да је k прост број. Зато из $k \mid a+b+2$ и $k \mid 2020-a+2020-b+2$, за $k > 2$, $k \mid 2022$, добијамо $a \equiv_k b \equiv_k -1$. За $k = 2$ је $a \equiv_2 b$. Докажимо да за овакве (које задовољавају претходне услове) јединичнице коцкице, заиста, постоји одговарајуће попуњавање. Нека је $k \in \{2, 3, 337\}$ и $a \equiv_k b \equiv_k -1$. Уочимо да је квадрат, чија поља имају координате (x, y), $0 \leqslant x, y \leqslant 2020$, из ког је избачен квадратић (a, b), за $a \equiv_k b \equiv_k -1$ могуће поплочати правоугаоницима $k \times 1$. То је засита могуће урадити пошто се квадрат са таквим избаченим пољем може поплочати правоугаоницима димензије $(a+1) \times b$, $(2020-a) \times (b+1)$, $(2021-a) \times (2020-b)$ и $a \times (2021-b)$, а сваки такав правоугаоник правоугаоницима $k \times 1$ (пошто $k \mid a+1, b+1, 2021-a, 2021-b$). Најнижих $k-1$ "слојева" велике коцке димензије 2021 попуњавамо на описани начин, а остатак је квадар $2021 \times 2021 \times (2022-k)$ које се, због $k \mid 2022-k$, лако попуњава са $1 \times 1 \times k$. Слично радимо за $k = 2$ и $a \equiv_2 b \equiv_2 0$, тако што квадрат без поља (a, b) можемо поплочати правоугаоницима $a \times (b+1)$, $(2021-a) \times b$, $(2020-a) \times (2021-b)$ и $(a+1) \times (2020-b)$.

Треба још избројати колико има уређених парова (a, b), $0 \leqslant a, b \leqslant 2020$, за које важи $a \equiv_2 b$ или $a \equiv_3 b \equiv_3 -1$ или $a \equiv_{337} b \equiv_{337} -1$. Лако моыхемо установити да је таквих парова $\frac{2021^2+1}{2} + 2 \cdot \frac{674}{2} \cdot \frac{672}{2} + 2 \cdot 3 \cdot 2 = 2268697$. Отуда, због симетрије, коначан број тражених коцкица је $6 \times 2268697 = 13612182$.

Аутор задатка: Милош Милосављевић

3. Нека је b_i за $i \geq 0$ дефинисано као остатак суме првих i бројева из низа a при дељењу са m. Такође, ради лакше нотације означимо b_n са S. Јасно је да је $b_{n+i} \equiv b_i + S \pmod{m}$. За свако i је l_i заправо дистанца до следећег појављивања b_i у низу. Нека се $r \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$ појављује у низу $b_1, b_2, ..., b_n$ на индексима $x_1, x_2, ..., x_t$ за $t \in \mathbb{N}_0$. Тада је $l_{x_j} = x_{j+1} - x_j$ за $j \in \{1, 2, .., t-1\}$, док је $l_{x_t} = p - x_t$, где је p индекс првог појављивања броја r у b после првих n. Тако сабирајући претходно по свим $j \in \{1, 2, 3, ..., t\}$,

налазимо да је сума l-ова на позицијама где се налази r баш разлика између првог појављивања r у b после n и првог уопште.

Нека је $d = \text{НЗД}(S, m)$ и $0 \leq r < d$. Нека су $r_1, r_2, \cdots, r_k$ све вредности које се јављају међу $b_1, b_2, \cdots b_n$, такве да дају остатак r при дељењу са d (претпоставимо да $k \neq 0$). Доказаћемо да је сума l_i који одговарају овим вредностима највише $\frac{m}{d} \cdot n$. Пошто имамо највише d непразних класа по модулу d, ако докажемо ово, одмах имамо тврђење задатка. Нека је j_i прво појављивање r_i у $b_1, b_2, ..., b_n$. Потребно је за свако r_i наћи прво појављивање тог броја у b после првих n. Поређајмо вредности r, $r+S$, $r+2S$, $\cdots$, $r + \left(\frac{m}{d} - 1\right) S$ на кружницу, и претпоставимо без умањења општости да се на овој кружници појављују бројеви $r_1, r_2, \cdots, r_k$ баш тим редом, на позицијама $c_1, c_2, \cdots, c_k$. Лако се проверава да важи $b_{(c_2-c_1)n+j_1} \equiv r_2 (mod\, m)$, па важи да је прво појављивање r_2 у низу b после n неки индекс $i \leq (c_2-c_1)n+j_1$, тако да сума l која одговара r_2 јесте највише $(c_2-c_1)n+j_1-j_2$. За оне који одговарају r_i је аналогно $(c_i-c_{i-1})n+j_{i-1}-j_i$, док је за r_1 та сума $\left(c_1 + \frac{m}{d} - c_k\right) n + j_k - j_1$. Сумирајући ово налазимо да је тражена сума максимално $n \cdot \left(\frac{m}{d} + c_1 - c_k + c_2 - c_1 + c_3 - c_2 + \cdots + c_k - c_{k-1}\right) + j_2 - j_1 + j_3 - j_2 + \cdots + j_1 - j_k = \frac{m}{d} n$.

Напоменимо да се, додатно, лако показује да је споменута сума у другом пасусу увек тачно $\frac{m}{d} n$.

Аутор задатка: Павле Мартиновић

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА - СМО

Други дан

4. Претпоставимо супротно. Прво, видимо да је n непаран број, јер $\frac{n-1}{2}$ мора бити био цео. Нека је $n = 2a+1$, за неко ненегативно цело a. Стога, $n^q + (\frac{n-1}{2})^2$ постаје $a^2 + (2a+1)^q$ и мора бити степен броја q, тј. облика q^k, за неко $k \in \mathbb{N}$. Анализирајући поменути израз по модулу q, те користећи Малу Фермаову теорему, добијамо $0 \equiv a^2 + (2a+1)^q \equiv a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 \pmod{q}$, тј. $q \mid a+1$. Ако је $q = 2$, тада је по претходном a непарно, па је $a^2 + (2a+1)^2 \equiv 2 \pmod{4}$, те је, стога, испуњено $a^2 + (2a+1)^2 = 2$, што је немогуће. Нека је, сада, $q \geqslant 3$, а самим тим и непаран прост број. Приметимо да је $a^2 + (2a+1)^q = (a^2-1) + ((2a+1)^q + 1)$. Сада је $v_q(a^2-1) = v_q(a-1) + v_q(a+1) = v_q(a+1)$, с обзиром да q не може да дели $a-1$, јер дели $a+1$ и $q > 2$. Са друге стране, како $q \mid (2a+1)+1$, то по леми од дизању екпонената (ЛТЕ) важи $v_q((2a+1)^q + 1) = v_q((2a+1)+1) + v_q(q) = v_q(2a+2) + 1 = v_q(a+1) + 1$, опет, јер је $q > 2$. Одавде је $v_q(a^2 + (2a+1)^q) = \min\{v_q(a^2-1), v_q((2a+1)^q+1)\} = v_q(a+1)$, што значи да је $a^2 + (2a+1)^q = q^{v_q(a+1)} \leqslant a+1$, што је очито немогуће. Контрадикција!

Аутор задатка: Павле Мартиновић

5. (а) Претпоставимо да постоји још једна функција са наведеним особинама у формулацији. Да бисмо доказали да су оне једнаке на скупу рационалних бројева, користићемо строгу индукцију по имениоцу (за разломке у упрошћеној форми). За $n = 1$, први услов је довољан. За $n > 1$ претпоставимо једнакост за све разломке са имениоцима мањим од n. Нека је НЗД$(m,n) = 1$. Постоје цели бројеви m' и n' такви да је $mn' - nm' = 1$, а да притом важи и $0 < n' < n$. По строгој индукцији, функције су једнаке на $\frac{m'}{n'}$ и $\frac{m-m'}{n-n'}$, па су по другом услову једнаке и на $\frac{m}{n}$.

Нека је, даље, x произвољан реалан број. Дефинишимо низове $(a_n), (b_n), (c_n)$ и (d_n), $n \in \mathbb{N}_0$, захтевом: $a_0 = [x], b_0 = a_0 + 1, c_0 = d_0 = 1$; за $\frac{a_n+b_n}{c_n+d_n} < x$, је $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1}) = (a_n + b_n, b_n, c_n + d_n, d_n)$, иначе је $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1}) = (a_n + b_n, b_n, c_n, c_n + d_n)$, $n \geqslant 1$. Уз помоћ принципа математичке индукције тривијално се доказује да важи $|a_n d_n - b_n c_n| = 1$ и $f(\frac{b_n}{d_n}) - f(\frac{a_n}{c_n}) = 2^{-n}$, за свако $n \in \mathbb{N}_0$ (за $n = 0$ је тривијално, док је индуктивни корак подела на случајеве и позивање на други услов). Такође, индуктивно се доказује и да је $\frac{a_n}{c_n} < x < \frac{b_n}{d_n}$, за све $n \in \mathbb{N}_0$, иако је очигледно. Стога, у случају да поменуте две функције имају различите вредности у тачки x, можемо наћи њихову разлику ϵ (већа минус мања) и одабрати $n \in \mathbb{N}$ тако да $2^{-n} < \epsilon$. Без губитка општости, нека је $f(x)$ минимум скупа вредности у тачки x обе функције. Из претходног, мора бити $f(\frac{a_n}{c_n}) + f(x) + \epsilon \leqslant f(x) + f(\frac{b_n}{d_n})$, јер је f растућа функција. Међутим, из претходног важи да је $2^{-n} \geqslant \epsilon$, што је контрадикција. Дакле, обе функције у тачки x имају исту вредност, тј. постоји само једна реална функција дефинисана на $\mathbb{R}$ са наведеним особинама.
(б) Ако је $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ и $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ за $n \geqslant 0$, онда је $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\phi^n - \psi^n)$ за $n \in \mathbb{N}$, где је $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} > 1$ и $\psi = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} \in (-1, 0)$. Такође је $f_{n+1}f_{n+2} - f_n f_{n+3} = (-1)^n$, за $n \in \mathbb{N}_0$, а како је $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\phi}$, треба одредити $f(\frac{1}{\phi})$.

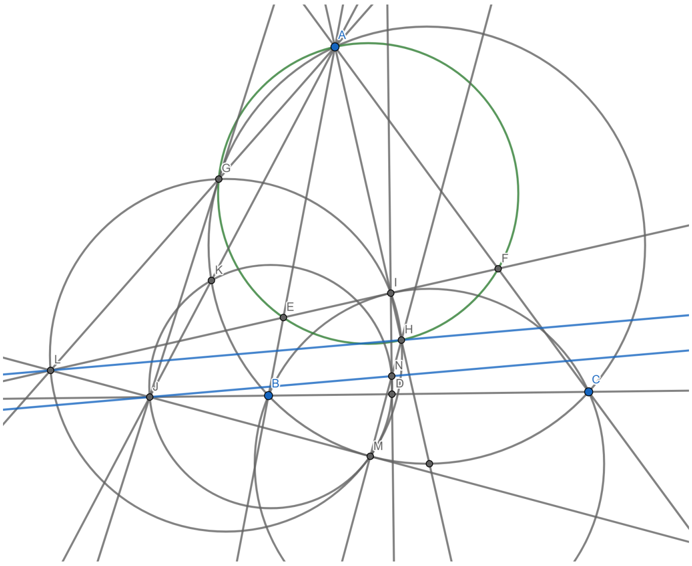
Нека је $a_n = \frac{f_{2n}}{f_{2n+1}}$ и $b_n = \frac{f_{2n+1}}{f_{2n+2}}$, за $n \in \mathbb{N}_0$. Како је $\frac{f_{n+2}}{f_{n+3}} - \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{f_{n+1}f_{n+2} - f_n f_{n+3}}{f_{n+3}f_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{f_{n+3}f_{n+1}}$, следи да је (a_n) растући, а (b_n) опадајући низ, а како је $\phi > 1 > |\psi|$, важи $a_n \to \frac{1}{\phi}$ и $b_n \to \frac{1}{\phi}$, кад $n \to \infty$. На основу услова задатка, примењеног на четворку $(a,b,c,d) = (f_n, f_{n+1}, f_{n+1}, f_{n+2})$, и наведеног идентитета добијамо да је $f\left(\frac{f_{n+2}}{f_{n+3}}\right) = \frac{f\left(\frac{f_n}{f_{n+1}}\right) + f\left(\frac{f_{n+1}}{f_{n+2}}\right)}{2}$. Такође, важи да је $f(a_0) = f(0) = 0$ и $f(b_0) = f(1) = 1$, а ако за неко $n \in \mathbb{N}_0$ важи и

$f(a_n) = \frac{2\cdot 4^n-2}{3\cdot 4^n}$ и $f(b_n) = \frac{2\cdot 4^n+1}{3\cdot 4^n}$, онда ће важити

$$\begin{aligned} f(a_{n+1}) &= \tfrac{f(a_n)+f(b_n)}{2} = \tfrac{\frac{2\cdot 4^n-2}{3\cdot 4^n}+\frac{2\cdot 4^n+1}{3\cdot 4^n}}{2} = \tfrac{4\cdot 4^n-1}{6\cdot 4^n} = \tfrac{2\cdot 4^{n+1}-2}{3\cdot 4^{n+1}}, \text{ па је} \\ f(b_{n+1}) &= \tfrac{f(b_n)+f(a_{n+1})}{2} = \tfrac{\frac{2\cdot 4^n+1}{3\cdot 4^n}+\frac{2\cdot 4^{n+1}-2}{3\cdot 4^{n+1}}}{2} = \tfrac{4\cdot 4^{n+1}+2}{6\cdot 4^{n+1}} = \tfrac{2\cdot 4^{n+1}+1}{3\cdot 4^{n+1}}. \end{aligned}$$

Дакле, на основу принципа математичке индукције, важи да је $f(a_n) = \frac{2\cdot 4^n-2}{3\cdot 4^n}$ и $f(b_n) = \frac{2\cdot 4^n+1}{3\cdot 4^n}$, за свако $n \in \mathbb{N}_0$, па како је f растућа, тј. неопадајућа, следи $\frac{2}{3} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f(a_n) \leqslant f(\frac{1}{\phi}) \leqslant \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f(b_n) = \frac{2}{3}$, одакле је $f(\frac{1}{\phi}) = \frac{2}{3}$.

Аутор задатка: Огњен Ковачевић



6. Без умањења општости, нека је конфигурација као на слици. Остали случајеви се слично раде. Такође у току решења ће (XYZ), за тачке X, Y, Z, означавати описану кружницу троугла X, Y, Z.

Нека је тачка M додир уписаног A-микстилиенарног круга и ω . Тврдимо да је тачка M тражени додир кружница. Нека је S други пресек MD са ω и $L = AG \cap EF$.

Лема 1. Важи $(G, B; M, C) = -1$ и права JM је тангента на ω.

Доказ 1. Прво тврђење имплицира друго, због особина хармонијских четвороуглова, те је, стога, довољно показати да важи први део тврђења.

Након инверзије са центром у тачки A полупречника $\sqrt{AB \times AC}$, компоноване са осном рефлексијом у односу на симетралу $\sphericalangle BAC$, лема се своди на следеће познато тврђење:

Лема 2. Нека је дат троугао ABC и тачке P, Q, R на страницама BC, CA, AB, тим редом, тако да су праве AP, BQ, CR конкурентне. Означимо са T пресек правих BC и QR. Тада је $(T, P; B, C) = -1$.

Дакле, тврђење Леме 1 је показано.

Познато је да је $AS || BC$. Користећи претходно, приметимо да важи

$$\sphericalangle MKJ = \sphericalangle ASM = \sphericalangle JDM,$$

па је, због тога, $M \in (DJK)$. Даље, приметимо да је L радикални центар A-мисктилинеарног круга, (AEF) и ω, па су тачке L, J и M колинеарне. Како је

$$90^\circ = \sphericalangle HIL = \sphericalangle HGL = \sphericalangle HML,$$

следи да тачке $M, L \in (GIH)$. Коначно, покажимо да се кружнице (DJK) и (GIH) додирују у тачки M. У том циљу, нека је $N = MH \cap ID$. Тачка $N \in (DMJK)$, где је $(DMJK)$ кружница која садржи тачке D, M, J и K, јер важи

$$\sphericalangle NDJ = 90^\circ = \sphericalangle HMJ = \sphericalangle NMJ.$$

Стога, довољно је показати да је $NJ||HL$, одакле, због хомотетије, ће следити да се кружнице (DJK) и (GIH), заиста, додирују у тачки M. Како је

$$\sphericalangle MNJ = \sphericalangle MDJ = \sphericalangle ASM,$$

где смо једнакости углова добили из паралелности правих AS и BC, те како је

$$\sphericalangle MHL = \sphericalangle MGL = \sphericalangle MGA,$$

добијамо да је $NJ||HL$, па је тиме тврђење доказано.
Аутор задатка: Урош Цоловић