

# Matematičko natjecanje „Klokan bez granica” 2023.

## 11. – 12. razred

### Zadatci koji vrijede 3 boda

1. Vrijednost izraza  $\frac{7777^2}{5555 \cdot 2222}$  jednaka je

- A) 1    B)  $\frac{7}{10}$     C)  $\frac{49}{10}$     D)  $\frac{77}{110}$     E) 49.

2. Milica je nakon bacanja pet kockica vidjela 19 točkica na gornjim stranama tih kockica. Koliko je najviše šestica mogla dobiti pri tom bacanju?

- A) 0    B) 1    C) 2    D) 3    E) 4

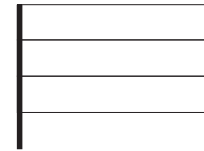
3. Mrav se kreće po limenci oblika valjka od točke  $A$  do točke  $B$ . Visina je valjka 15 cm, a opseg je osnovke 30 cm. On se kreće ili okomito naviše ili vodoravno duž kružnih lukova po limenci. Njegov put prikazan je podebljanom crtom (crnom za put s prednje strane i sivom sa zadnje strane). Kolika je duljina puta koji je mrav prešao?

- A) 45 cm    B) 55 cm    C) 60 cm    D) 65 cm    E) 75 cm



4. Ema ima četiri olovke različite boje kojima želi obojati trodijelnu zastavu pravokutnog oblika, prikazanu na slici desno, tako da je svaki dio obojan jednom bojom, a nikoja dva susjedna dijela nisu obojana istom bojom. Na koliko načina Ema može obojati zastavu?

- A) 24    B) 27    C) 32    D) 36    E) 64



5. Za prirodan broj  $n$  kažemo da je dvostruko prost ako ima točno tri različita djelitelja i to 1, 2 i  $n$ . Koliko različitih dvostruko prostih brojeva postoji?

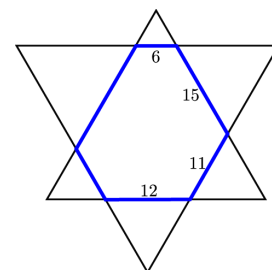
- A) 0    B) 1    C) 2    D) 3    E) 4

6. Koliko ima parova prirodnih brojeva  $x$  i  $y$  koji predstavljaju rješenja jednadbe  $x + 2y = 2^{10}$ ?

- A)  $2^9 - 1$     B)  $2^9$     C)  $2^9 + 1$     D)  $2^9 + 2$     E) 0

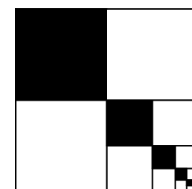
7. Dva jednakostranična trokuta spojena su tako da njihov presjek predstavlja šesterokut, paralelnim suprotnim stranicama. Ako su poznate duljine četiriju stranica šesterokuta sa slike, koliki je njihov opseg?

- A) 64    B) 66    C) 68    D) 70    E) 72



8. Kvadrat površine 84 podijeljen je na četiri kvadrata. Gornji lijevi kvadrat obojan je crnom bojom. Potom se donji desni kvadrat dijeli na četiri kvadrata, gdje se gornji lijevi kvadrat boji crnom bojom. Zadani postupak ponavlja se beskonačno mnogo puta. Kolika je ukupna površina koja je obojana crnom bojom?

- A) 24    B) 28    C) 31    D) 35    E) 42



9. Brojevi od 1 do 9 upisuju se u po jedno od 9 polja na slici prikazanoj desno, tako da zbroj bilo koja tri broja iz susjednih polja bude djeljiv s 3. Ako su brojevi 7 i 9 već upisani, na koliko je načina moguće popuniti preostala polja?



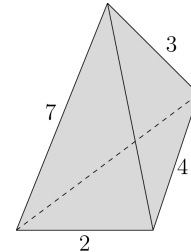
- A) 9    B) 12    C) 15    D) 18    E) 24

10. Znamenka jedinica u dekadskom zapisu broja  $(5^5 + 1)(5^{10} + 1)(5^{15} + 1)$  je

- A) 1    B) 2    C) 4    D) 5    E) 6.

**Zadatci koji vrijede 4 boda**

11. Trostrana piramida ima bridove čije su duljine prirodni brojevi. Četiri mjere tih duljina zadane su na slici desno. Koliki je zbroj duljina preostalih bridova piramide?



- A) 9    B) 10    C) 11    D) 12    E) 13

12. Za pozitivan cijeli broj  $n$ ,  $n!$  definiran je kao umnožak prirodnih brojeva od 1 do  $n$ . Na primjer,  $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ . Ako se broj  $6! \cdot 7!$  može predstaviti u obliku  $N!$  gdje je  $N$  prirodan broj, koliki je zbroj znamenki broja  $N$ ?

- A) 1    B) 2    C) 4    D) 8    E) 9

13. Grafovi funkcija  $y = x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$  sadrže jednu istu točku u koordinatnoj ravnini, za svaki realan broj  $a$ . Tada je zbroj koordinata zajedničke točke jednak:

- A) 2    B) 4    C) 7    D) 8    E) ništa od navedenoga.

14. Zadano je pet brojeva  $a_1, a_2, a_3, a_4$  i  $a_5$  čiji je zbroj  $S$ . Za svako  $k, 1 \leq k \leq 5$ , vrijedi da je  $a_k = k + S$ . Kolika je vrijednost zbroja  $S$ ?

- A)  $\frac{15}{4}$     B)  $-\frac{15}{4}$     C) -15    D) 15    E) ništa od navedenoga

15. Koliko parova cijelih brojeva  $(m, n)$  zadovoljava nejednakost  $|2m - 2023| + |2n - m| \leq 1$ ?

- A) 0    B) 1    C) 2    D) 3    E) 4

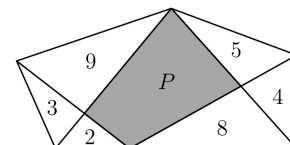
16. U jednom redu u kinu sjede 23 dabra i klokana. Poznato je da pored svake životinje sjedi bar jedan klokan. Koji je najveći mogući broj dabrova u tom redu?

- A) 7    B) 8    C) 10    D) 11    E) 12

17. Odredi prirodan broj  $n$  takav da je  $n^n = 5^{5^6}$ .

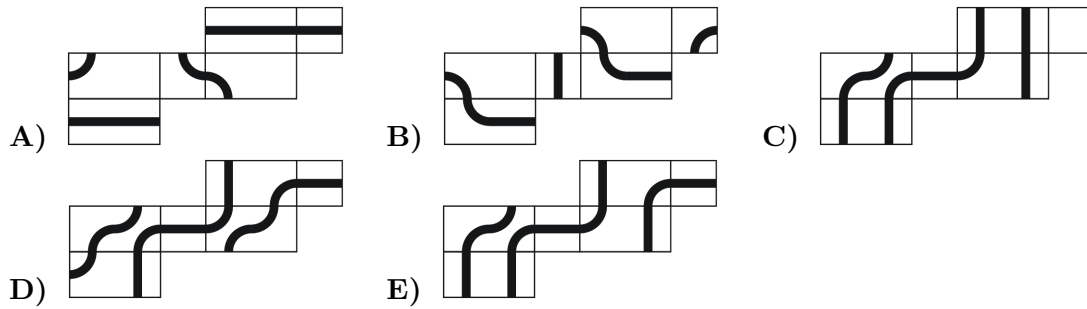
- A)  $5^{30}$     B)  $5^6$     C)  $5^5$     D) 30    E) 11

18. Peterokut je podijeljen na dijelove, kao na slici desno. Brojevi unutar trokuta predstavljaju površine tih dijelova peterokuta. Površina osjenčanog četverokuta označenog sa  $P$  jednaka je:



- A) 15    B)  $\frac{31}{2}$     C) 16    D) 17    E) 18.

19. Neven je nacrtao zatvoreni put na kvadru, nakon čega je kvadar raspakirao u odgovarajuću mrežu. Koja od ponuđenih mreža može biti mreža kvadra po kojoj je Neven crtao?



20. Koliko ima prirodnih brojeva koji su djelitelji broja  $2^{20}3^{23}$ , ali nisu djelitelji broja  $2^{10}3^{20}$ ?

- A) 13    B) 30    C) 273    D) 460    E) ništa od navedenoga

**Zadatci koji vrijede 5 bodova**

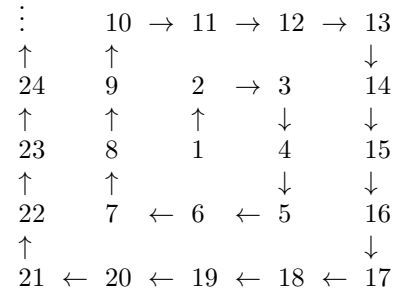
21. Funkcije  $f$  i  $g$  definirane na skupu  $\mathbb{R}$  zadovoljavaju sustav jednačba  $f(x) + 2g(1 - x) = x^2$  i  $f(1 - x) - g(x) = x^2$ . Kako glasi realna funkcija  $f(x)$  u eksplicitnom obliku?

- A)  $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$     B)  $x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$     C)  $-x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$   
 D)  $x^2 - 4x + 5$     E) ne postoji takva funkcija

22. Na natjecanju u planinarenju natječe se 13 alpinista u trima disciplinama. Ukupan rezultat svakog natjecatelja umnožak je rezultata u svakoj od disciplina. Na primjer, ako je natjecatelj osvojio četvrto, treće i šesto mjesto u trima disciplinama, njegov je ukupan rezultat  $4 \cdot 5 \cdot 6 = 72$ . Što je ukupan rezultat veći, to je ukupan plasman natjecatelja na tablici niži. Milica je zauzela prvo mjesto u dvjema disciplinama. Koji je njezin najniži mogući ukupan plasman na tablici?

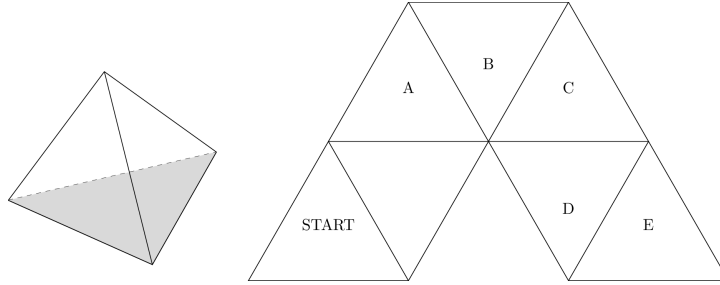
- A) 2. mjesto    B) 3. mjesto    C) 4. mjesto    D) 5. mjesto    E) 6. mjesto

23. Na slici je prikazano spiralno redanje uzastopnih brojeva počevši od 1. U kojem će se od ponuđenih rasporeda naći brojevi 625, 626 i 627?



- A)  $\begin{matrix} 627 \\ \uparrow \\ 626 \\ \uparrow \\ 625 \end{matrix}$     B)  $\begin{matrix} 626 \rightarrow 627 \\ \uparrow \\ 625 \end{matrix}$     C)  $625 \rightarrow 626 \rightarrow 627$     D)  $\begin{matrix} 625 \rightarrow 626 \\ \downarrow \\ 625 \end{matrix}$     E)  $\begin{matrix} 625 \\ \downarrow \\ 626 \\ \downarrow \\ 627 \end{matrix}$

24. Blok u obliku tetraedra ima jednu obojenu stranu. Stjepan postavlja obojenu stranu bloka na ploču na poziciju trokuta s oznakom START. Stjepan zatim premješta blok od jednoga do drugog trokuta, okrećući ga oko bridova. Na kojoj će se poziciji na ploči ponovno naći obojana strana bloka?



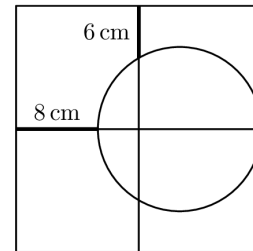
- A) A    B) B    C) C    D) D    E) E

25. Dio polinoma petog stupnja ne može se vidjeti zbog mrlje od mastila. Poznato je da su svih pet korijena zadanog polinoma cijeli brojevi. Koji je najveći stupanj binoma  $x - 1$  koji dijeli zadani polinom?

$$x^5 - 11x^4 + \text{mrlje} - 7$$

- A)  $(x - 1)^1$     B)  $(x - 1)^2$     C)  $(x - 1)^3$     D)  $(x - 1)^4$     E)  $(x - 1)^5$

26. Kvadrat je podijeljen na četiri manja kvadrata na slici desno. Krug dodiruje desnu stranicu kvadrata u njezinu središtu. Kolika je duljina stranice velikog kvadrata (uzimajući u obzir da slika nije nacrtana u pravom omjeru)?

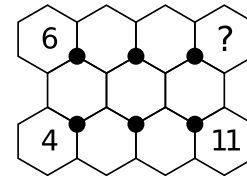


- A) 18 cm    B) 20 cm    C) 24 cm  
D) 28 cm    E) 30 cm

27. Koji je najveći zajednički djelitelj svih prirodnih brojeva oblika  $n^3(n+1)^3(n+2)^3(n+3)^3(n+4)^3$ , gdje je  $n$  prirodan broj?

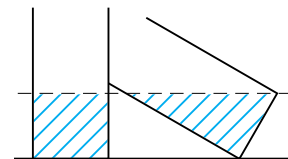
- A)  $2^9 3^3$     B)  $2^3 3^3 5^3$     C)  $2^6 3^3 5^3$     D)  $2^8 3^2 5^3$     E)  $2^9 3^3 5^3$

28. Brojevi od 1 do 11 poredani su u šesterokutna polja, prikazana na slici desno, tako da je zbroj svaka tri broja upisana u polja koja imaju zajednički vrh označen jednom od šest točaka, isti. Tri broja već su postavljena. Koji će se broj naći u polju koje je označeno upitnikom?



- A) 1    B) 3    C) 5    D) 7    E) 9

29. Dva identična rezervoara za vodu oblika valjka sadrže istu količinu vode. Jedan rezervoar stoji uspravno, a drugi se naslanja na njega tako da je razina vode u obama rezervoarima ista, kao na slici. Osnovke su valjka krugovi površine  $3\pi \text{ m}^2$ . Koliku količinu vode sadrži svaki od rezervoara?



- A)  $3\sqrt{3}\pi \text{ m}^3$     B)  $6\pi \text{ m}^3$   
C)  $9\pi \text{ m}^3$     D)  $\frac{3\pi}{4} \text{ m}^3$     E) nije moguće odrediti

30. Umnožak šest uzastopnih prirodnih brojeva je dvanaesteroznamenasti broj oblika  $\overline{abbcdcdcdabb}$ , gdje su  $a, b, c$  i  $d$  također četiri uzastopna prirodna broja, u nekom redoslijedu. Tada je vrijednost broja  $d$

- A) 1    B) 2    C) 3    D) 4    E) 5.