Matematičko takmičenje „Kengur bez granica” 2023.
11 – 12. razred

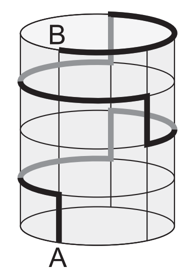
Zadaci koji vrede 3 poena

1. Vrednost izraza $\dfrac{7777^2}{5555 \cdot 2222}$ jednaka je

A) 1 **B)** $\dfrac{7}{10}$ **V)** $\dfrac{49}{10}$ **G)** $\dfrac{77}{110}$ **D)** 49

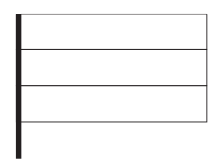
2. Milica je nakon bacanja pet kockica videla 19 tačkica na gornjim stranama tih kockica. Koliko je najviše šestica mogla da dobije prilikom tog bacanja?

A) 0 **B)** 1 **V)** 2 **G)** 3 **D)** 4



3. Mrav se kreće po konzervi oblika valjka od tačke A do tačke B. Visina valjka je 15 cm, a obim osnove je 30 cm. On se kreće ili vertikalno naviše ili horizontalno duž kružnih lukova po konzervi. Njegov put je prikazan podebljanom linijom (crnom za put sa prednje strane i sivom sa zadnje strane). Kolika je dužina puta koji je mrav prešao?

A) 45 cm **B)** 55 cm **V)** 60 cm **G)** 65 cm **D)** 75 cm



4. Ema ima četiri olovke različitih boja sa kojima želi da oboji trodelnu zastavu pravougaonog oblika, prikazanu na slici desno, tako da je svaki deo obojen jednom bojom, a nikoja dva susedna dela nisu obojena istom bojom. Na koliko načina Ema može obojiti zastavu?

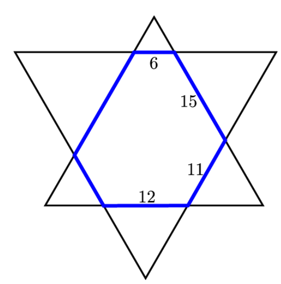
A) 24 **B)** 27 **V)** 32 **G)** 36 **D)** 64

5. Za prirodan broj n kažemo da je dvostruko-prost ako ima tačno tri različita delioca i to 1, 2 i n. Koliko različitih dvostruko-prostih brojeva postoji?

A) 0 **B)** 1 **V)** 2 **G)** 3 **D)** 4

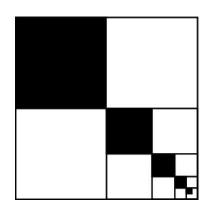
6. Koliko ima parova prirodnih brojeva x i y koji predstavljaju rešenja jednačine $x + 2y = 2^{10}$?

A) $2^9 - 1$ **B)** 2^9 **V)** $2^9 + 1$ **G)** $2^9 + 2$ **D)** 0



7. Dva jednakostranična trougla su spojena tako da njihov presek predstavlja šestougao, sa paralelnim suprotnim stranicama. Ako su poznate dužine četiri stranice šestougla sa slike, koliki je njegov obim?

A) 64 **B)** 66 **V)** 68 **G)** 70 **D)** 72



8. Kvadrat površine 84 je podeljen na četiri kvadrata. Gornji levi kvadrat je obojen crnom bojom. Potom se donji desni kvadrat deli na četiri kvadrata, gde se gornji levi kvadrat boji crnom bojom. Dati postupak se ponavlja beskonačno mnogo puta. Kolika je ukupna površina koja je obojena crnom bojom?

A) 24 **B)** 28 **V)** 31 **G)** 35 **D)** 42

9. Brojevi od 1 do 9 se upisuju u po jedno od 9 polja na slici prikazanoj desno, tako da zbir bilo koja tri broja iz susednih polja bude deljiv sa 3. Ako su brojevi 7 i 9 već upisani, na koliko načina je moguće popuniti preostala polja?

	7		9					

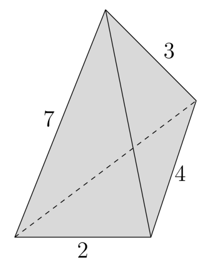
A) 9 **B)** 12 **V)** 15 **G)** 18 **D)** 24

10. Cifra jedinica u dekadnom zapisu broja $\left(5^5+1\right)\left(5^{10}+1\right)\left(5^{15}+1\right)$ je

A) 1 **B)** 2 **V)** 4 **G)** 5 **D)** 6

Zadaci koji vrede 4 poena

11. Trostrana piramida ima ivice čije su dužine prirodni brojevi. Četiri mere tih dužina su date na slici desno. Koliki je zbir dužina preostalih ivica piramide?



A) 9 **B)** 10 **V)** 11 **G)** 12 **D)** 13

12. Za pozitivan ceo broj n, $n!$ je definisan kao proizvod prirodnih brojeva od 1 do n. Na primer, $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$. Ako broj $6!\cdot 7!$ može da se predstavi u obliku $N!$ gde je N prirodan broj, koliki je zbir cifara broja N?

A) 1 **B)** 2 **V)** 4 **G)** 8 **D)** 9

13. Grafici funckija $y = x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$ sadrže jednu istu tačku u koordinatnoj ravni, za svaki realan broj a. Tada je zbir koordinata zajedničke tačke jednak

A) 2 **B)** 4 **V)** 7 **G)** 8 **D)** ništa od ponuđenog

14. Dato je pet brojeva a_1, a_2, a_3, a_4 i a_5 čiji je zbir S. Za svako k, $1\leqslant k\leqslant 5$, važi da je $a_k = k+S$. Kolika je vrednost zbira S?

A) $\frac{15}{4}$ **B)** $-\frac{15}{4}$ **V)** -15 **G)** 15 **D)** ništa od ponuđenog

15. Koliko parova celih brojeva (m,n) zadovoljava nejednakost $|2m-2023|+|2n-m|\leqslant 1$?

A) 0 **B)** 1 **V)** 2 **G)** 3 **D)** 4

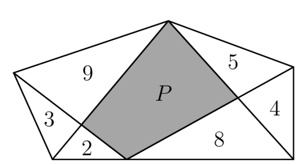
16. U jednom redu u bioskopu sede 23 dabrova i kengura. Poznato je da pored svake životinje sedi bar jedan kengur. Koji je najveći mogući broj dabrova u tom redu?

A) 7 **B)** 8 **V)** 10 **G)** 11 **D)** 12

17. Odrediti prirodan broj n takav da je $n^n = 5^{5^6}$.

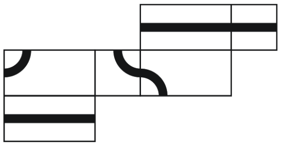
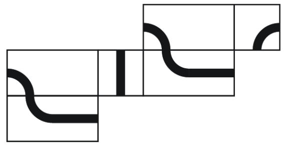
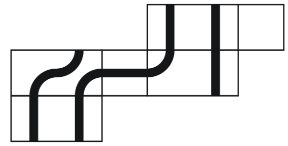
A) 5^{30} **B)** 5^6 **V)** 5^5 **G)** 30 **D)** 11

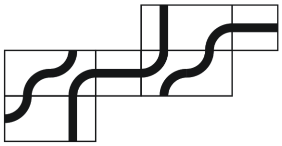
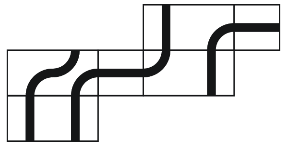
18. Petougao je podeljen na delove, kao na slici desno. Brojevi unutar trouglova predstavljaju površine tih delova petougla. Površina osenčenog četvorougla označenog sa P jednaka je



A) 15 **B)** $\frac{31}{2}$ **V)** 16 **G)** 17 **D)** 18

19. Nemanja je nacrtao zatvoreni put na kvadru, nakon čega je kvadar raspakovao u odgovarajuću mrežu. Koja od ponuđenih mreža može biti mreža kvadra po kome je Nemanja crtao?

A)  **B)**  **V)** 

G)  **D)** 

20. Koliko ima prirodnih brojeva koji su delioci broja $2^{20}3^{23}$, ali nisu delioci broja $2^{10}3^{20}$?

A) 13 **B)** 30 **V)** 273 **G)** 460 **D)** ništa od ponuđenog

Zadaci koji vrede 5 poena

21. Funkcije f i g definisane na skupu $\mathbb{R}$ zadovoljavaju sistem jednačina $f(x) + 2g(1 - x) = x^2$ i $f(1 - x) - g(x) = x^2$. Kako glasi realna funkcija $f(x)$ u eksplicitnom obliku?

A) $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ **B)** $x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ **V)** $-x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$
G) $x^2 - 4x + 5$ **D)** ne postoji takva funkcija

22. Na takmičenju u planinarenju takmiči se 13 alpinista u tri discipline. Ukupan rezultat svakog takmičara je proizvod njegovih rezultata u svakoj od disciplina. Na primer, ako je takmičar osvojio četvrto, treće i šesto mesto u tri discipline, njegov ukupan rezultat je $4 \cdot 3 \cdot 6 = 72$. Dakle, što je ukupan rezultat veći, to je ukupan plasman takmičara na tabeli niži. Milica je zauzela prvo mesto u dve kategorije. Koji je njen najniži mogući ukupan plasman na tabeli?

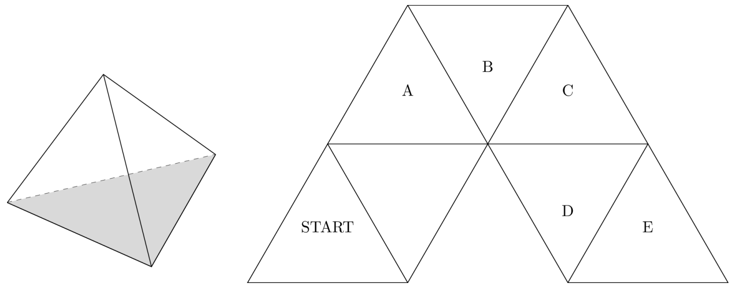
A) 2. mesto **B)** 3. mesto **V)** 4. mesto **G)** 5. mesto **D)** 6. mesto

23. Na slici je prikazano spiralno redjanje uzastopnih brojeva, počevši od 1. U kom od ponuđenih rasporeda će se naći brojevi 625, 626 i 627?

$$\begin{array}{ccccccccc}
\vdots & & 10 & \rightarrow & 11 & \rightarrow & 12 & \rightarrow & 13 \\
\uparrow & & \uparrow & & & & & & \downarrow \\
24 & & 9 & & 2 & \rightarrow & 3 & & 14 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\
23 & & 8 & & 1 & & 4 & & 15 \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
22 & & 7 & \leftarrow & 6 & \leftarrow & 5 & & 16 \\
\uparrow & & & & & & & & \downarrow \\
21 & \leftarrow & 20 & \leftarrow & 19 & \leftarrow & 18 & \leftarrow & 17
\end{array}$$

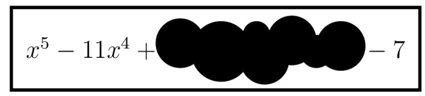
A) $\begin{array}{c} 627 \\ \uparrow \\ 626 \\ \uparrow \\ 625 \end{array}$ **B)** $\begin{array}{cc} 626 \rightarrow & 627 \\ \uparrow & \\ 625 & \end{array}$ **V)** $625 \rightarrow 626 \rightarrow 627$ **G)** $\begin{array}{cc} 625 \rightarrow & 626 \\ & \downarrow \\ & 625 \end{array}$ **D)** $\begin{array}{c} 625 \\ \downarrow \\ 626 \\ \downarrow \\ 627 \end{array}$

24. Blok u obliku tetraedra ima jednu obojenu stranu. Stefan postavlja obojenu stranu bloka na ploču na poziciju trougla sa oznakom START. Stefan zatim premešta blok, od jednog do drugog trougla okrećući ga oko ivica. Na kojoj poziciji na ploči će se ponovo naći obojena strana bloka?



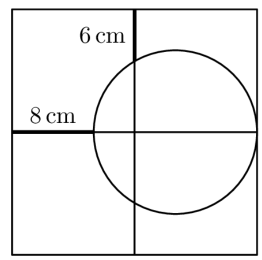
A) A **B)** B **V)** C **G)** D **D)** E

25. Deo polinoma petog stepena se ne može videti zbog mrlje od mastila. Poznato je da su svih pet korena datog polinoma celi brojevi. Koji je najveći stepen binoma $x-1$ koji deli dati polinom?



A) $(x-1)^1$ **B)** $(x-1)^2$ **V)** $(x-1)^3$ **G)** $(x-1)^4$ **D)** $(x-1)^5$

26. Kvadrat je podeljen na četiri manja kvadrata kao na slici desno. Krug dodiruje desnu stranicu kvadrata u njenom središtu. Kolika je dužina stranice velikog kvadrata (uzimajući u obzir da slika nije nacrtana u pravoj razmeri)?

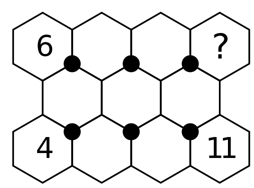


A) 18 cm **B)** 20 cm **V)** 24 cm
G) 28 cm **D)** 30 cm

27. Koji je najveći zajednički delilac prirodnih brojeva oblika $n^3(n+1)^3(n+2)^3(n+3)^3(n+4)^3$, gde je n prirodan broj?

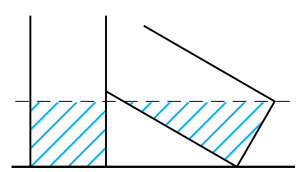
A) $2^9 3^3$ **B)** $2^3 3^3 5^3$ **V)** $2^6 3^3 5^3$ **G)** $2^8 3^2 5^3$ **D)** $2^9 3^3 5^3$

28. Brojevi od 1 do 11 su poređani u šestougaona polja, prikazana na slici desno, tako da je zbir svaka tri broja upisana u polja, koja imaju zajedničko teme označeno jednom od šest crnih tačaka, isti. Tri broja su već postavljena. Koji broj će se naći u polju koje je označeno upitnikom?



A) 1 **B)** 3 **V)** 5 **G)** 7 **D)** 9

29. Dva identična rezervoara za vodu oblika valjka sadrže istu količinu vode. Jedan rezervoar stoji uspravno, a drugi se naslanja na njega tako da je nivo vode u oba rezervoara isti, kao na slici. Osnove oba valjka su krugovi površine $3\pi\,\mathrm{m}^2$. Koliku količinu vode sadrži svaki od rezervoara?



A) $3\sqrt{3}\pi\,\mathrm{m}^3$ **B)** $6\pi\,\mathrm{m}^3$
V) $9\pi\,\mathrm{m}^3$ **G)** $\frac{3\pi}{4}\,\mathrm{m}^3$ **D)** nije moguće odrediti

30. Proizvod šest uzastopnih prirodnih brojeva je dvanaestocifreni broj oblika $\overline{abbcddcddabb}$, gde su a, b, c i d takođe četiri uzastopna prirodna broja, u proizvoljnom redosledu. Tada je vrednost broja d

A) 1 **B)** 2 **V)** 3 **G)** 4 **D)** 5

Zadaci: „Kangaroo Meeting 2022”, Červija, Italija
Organizator takmičenja: Društvo matematičara Srbije
Prevod: Jelena Stevanić, Nemanja Vučićević, doc. dr Aleksandar Milenković
Recenzent: prof. dr Zoran Kadelburg